Hemarbete - Assignment

Hemarbetena får gärna göras i samarbete, men var och en bör vara i stånd att självständigt redogöra för sitt arbete muntligt för klassen och skriftligt i sin rapport.

Genomgången av arbetena börjar med en muntlig presentation den 28 april. Den skriftliga rapporten lämnas in senast den 4 maj.

Cooperation between students to complete their assignments is encouraged. However, every student is supposed to be able to describe his/her work orally in class and later in a written report.

The oral presentation in class starts on 28 April. The written report is to be submitted by 4 May.

1.

Definiera en övergångssannolikhetsmatris $P = (P_{i,j}), i, j = 0, 1, 2, \ldots 13,$ på följande sätt.

$$P = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{4}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Undersök det asymptotiska beteendet hos matrisen P^n då $n \to \infty$. Visa hur storheterna kan beräknas genom att lösa linjära ekvationssystem för stationära fördelningar och absorptionssannolikheter, jfr. avsnittet om *förstastegsanalys*.

Consider the transition probability matrix $P = (P_{i,j}), i, j = 0, 1, 2, \ldots 13,$ given above.

Study the asymptotic behavior of the matrix P^n as $n \to \infty$. Show how all the quantities may be calculated by solving systems of linear equations for stationary distributions and absorption probabilities, cf. the section on *first-step analysis*.

2.

Självrepellerande slumpvandring i tre dimensioner

Låt $X_0, X_1, X_2, \ldots$ vara den enkla symmetriska slumpvandringen på Z^3. Definiera T genom

$$T = \min\{n \geq 1 | X_n \in \{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}\}.$$

(Om alla X_n'n är olika sättes $T = \infty$.)

Bevisa att $\mathbf{Pr}\{T = \infty\} = 0$.

Bevisa att $\mathbf{E}(T) < \infty$.

Gör en uppskattning av $\mathbf{E}(T)$.

Simulera processen

$$X_0, X_1, X_2, \ldots X_T$$

(*den självrepellerande slumpvandringen*). Bestäm speciellt den empiriska fördelningen för T och jämför dess medelvärde med ditt tidigare estimat av $\mathbf{E}(T)$.

Self-avoiding random walks in three dimensions

Let $X_0, X_1, X_2 \ldots$ be the simple symmetric 3D random walk. Define T to be the random time

$$T = \min\{n \geq 1 | X_n \in \{X_0, X_1, \ldots X_{n-1}\}\}.$$

(If all X_n's are different from each other we set $T = \infty$.)

Prove that $\mathbf{Pr}\{T = \infty\} = 0$.

Prove that $\mathbf{E}(T) < \infty$.

Calculate an estimate of $\mathbf{E}(T)$.

Make a simulation study of the process

$$X_0, X_1, X_2, \ldots X_T$$

(*the self-avoiding random walk*). In particular, find the distribution of T and compare the empirical mean of T with your earlier estimate of $\mathbf{E}(T)$.

3.

Inspektionsparadoxen

Antag att bussarna på en viss linje kommer slumpmässigt (t. ex. i enlighet med en Poissonprocess) med i medeltal 10 minuters mellanrum. Du går ut precis kl. 12 och åker med den buss som kommer närmast efter kl. 12. Det visar sig att mellanrummet mellan den bussen och den buss som kom närmast före kl. 12 är *längre än 10 minuter* (i medeltal).

Antag att du går tvärsöver ett rum ända fram till dörren med steg av slumpmässig oberoende längd, väntevärdet av steglängden är 80 cm. Det sista steget, det som för dig över tröskeln, är emellertid (till sitt väntevärde) längre än 80 cm!

Redogör för och exemplifiera inspektions- eller väntetidsparadoxen. Simulera olika fall och visa hur den skenbara paradoxen kan förklaras.

Ref.: William Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II,* 2nd ed., Wiley 1966, särskilt I.4, VI.7, XI.4.

The Inspection Paradox

Assume that the busses from your home to the department run randomly, e. g., in accordance with a Poisson process. Let the time between consecutive busses be 10 minutes on the average. Suppose that you go to your bus stop exactly at 12 noon and take the bus which arrives right after 12:00. It turns out that the (average) time difference between that bus and the bus passing your bus stop right before noon is *longer than 10 minutes.*

Suppose that you walk over a room, from the far wall to the door, with random independent steps, with an average step length of 80 cm. However, the last step, the step carrying you over the threshold is longer than 80 cm on the average!

Give an account of the so-called inspection or waiting-time paradox. Give many examples, simulate them and show how the paradox may be resolved.

Ref.: William Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II,* 2nd ed., Wiley 1966, in particular I.4, VI.7, XI.4.