Total sannolikhet och Bayes sats – Exempel

Total sannolikhet

Låt oss anta att vi är på bjudning i ett för oss obekant stort hus och önskar hitta fram till toaletten som framöver kallas T. Framför oss har vi tre dörrar av vilka alla leder till skilda rum. Låt oss kalla rummen R_1, R_2 och R_3. I R_1 finns två dörrar av vilka en leder till T. I R_2 finns fyra dörrar av vilka en leder till T och slutligen i R_3 finns tre dörrar av vilka av vilka två leder till T. Om vi endast får röra oss framåt (dvs. öppna en dörr och stiga in i följande rum genom dörren), vad är då sannolikheten att vi når T?

Vi har nu sannolikheterna

$$P(R_1) = P(R_2) = P(R_3) = \frac{1}{3}$$

samt

$$\begin{aligned} P(T|R_1) &= \frac{1}{2} \\ P(T|R_2) &= \frac{1}{4} \\ P(T|R_3) &= \frac{2}{3} \ . \end{aligned}$$

Av sannolikheterna ovan tolkar vi t.ex. $P(R_2)$ som sannolikheten att vi väljer rum R_2, och $P(T|R_2)$ som sannolikheten att vi når toaletten T då vi väl har valt att gå in i rum R_2. Den *totala sannolikheten* för att nå T blir nu

$$\begin{aligned} P(T) &= P(R_1)P(T|R_1) + P(R_2)P(T|R_2) + P(R_3)P(T|R_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{2}{9} \approx 0.47 \ . \end{aligned}$$

I ord kan den totala sannolikheten ovan beskrivas som ”sannolikheten att vi väljer R_1 *och* där väljer rätt dörr till T *eller* att vi väljer R_2 *och* därifrån når T *eller* att vi väljer R_3 *och* där öppnar någon av dörrarna som leder till T”. Notera, att i den muntliga beskrivningen motsvarar ordet ”*och*” formelns multiplikation och ordet ”*eller*” formelns addition.

Bayes sats

Låt oss nu anta att vi lyckades nå fram till toaletten T men har hunnit glömma bort via vilket av rummen R_1, R_2 eller R_3 vi gjorde det. Med hjälp av *Bayes sats* kan vi då räkna ut sannolikheten för att det var just ett visst rum vi gick igenom. Vi kan t.ex. fråga oss vad sannolikheten är att vi nådde fram via R_2. Vi söker alltså sannolikheten $P(R_2|T)$, dvs. den betingade sannolikheten för rum R_2 givet att vi hittade fram till toaletten T. Den totala sannolikheten för T fick vi ovan genom att addera ihop sannolikheterna för de alternativa rutterna genom de tre rummen. Bayes sats går nu ut på att vi räknar ut vilken andel av den totala sannolikheten $P(T)$ som utgjordes av rutten via R_2, dvs. $P(R_2)(T|R_2)$. Vi får då

$$\begin{aligned}
P(R_2|T) &= \frac{P(R_2)(T|R_2)}{P(T)} \\
&= \frac{P(R_2)(T|R_2)}{P(R_1)P(T|R_1) + P(R_2)P(T|R_2) + P(R_3)P(T|R_3)} \\
&= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{2}{9}} \approx 0.18 \; .
\end{aligned}$$