

Hemuppgifter till fredagen den 16 september
Exercises to Friday, September 16

Övningsuppgifterna lämnas in senast **onsdagen 14.9.** till David Stenlund, per e-post `dstenlun@abo.fi` eller i pappersform till mig, för bedömning. Genomgås på klass fredagen den 16 september. **Övningarna kan sammanlagt ge maximalt 5 bonuspoäng för slutförhåret.**

The exercises are to be sent to David Stenlund by e-mail to `dstenlun@abo.fi` or on paper to me. Deadline: **Wednesday, September 14.** Problems will be reviewed on Friday, September 16. **We will correct them and credit you with up to a maximum total of 5 bonus points for the final examination.**

1. - 2. De två övningarna om Lights associativitetstest (se anteckningarna)

The two exercises on Light's Associativity Test (see Notes)

3. Bevisa att $(\mathbf{Z}, +)$ saknar egentliga ideal, dvs. det enda idealet är hela semigruppen.

Prove that $(\mathbf{Z}, +)$ has no proper ideals, i. e., the only ideal is the whole semigroup.

4. Låt a vara ett givet element i semigruppen S . Bevisa att $\langle a \rangle$ är den minimala undersemigruppen som innehåller a .

Let a be a given element in a semigroup S . Prove that $\langle a \rangle$ is the minimal subsemigroup containing a .

5. Låt X vara mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Låt $S = T_X$ med $\circ$ som semigruppoperation. Konstruera funktioner $f, g, h \dots \in S$ som uppfyller

(a) $|\text{Range}(f)| = 5$ (dvs. en bijektion)

(b) $|\text{Range}(g)| = 3$

(c) $|\text{Range}(h)| = 1$ (en *konstant* funktion)

(d) Bestäm $h \circ g, h \circ f, g \circ h, f \circ h$.

(e) Är *mängden funktioner* f med $|\text{Range}(f)| \leq 3$ ett ideal?

Take $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Let $S = T_X$ with $\circ$ as semigroup operation. Construct functions $f, g, h \dots \in S$ satisfying

- (a) $|\text{Range}(f)| = 5$ (i. e., a bijection)
- (b) $|\text{Range}(g)| = 3$
- (c) $|\text{Range}(h)| = 1$ (a *constant* function)
- (d) Determine $h \circ g, h \circ f, g \circ h, f \circ h$.
- (e) Is *the set of functions f with $|\text{Range}(f)| \leq 3$* an ideal?

Hemuppgifter, inlämnas den 21 september

Övningsuppgifterna lämnas in senast **onsdagen 21.9.** till David Stenlund, per e-post dstenlun@abo.fi eller i pappersform till mig, för bedömning. Genomgås på klass fredagen den 23 september.

1. Låt S vara en semigrupp och A och B delmängder av S . s är ett givet element i S .

Svarar något av alternativen (a) - (d) nedan exakt mot utsagan $sB = A$?

(a) $\forall b \in B : sb \in A$.

(b) För varje $a \in A$ har ekvationen $sx = a$ en lösning $x \in B$.

(c) För något $a \in A$ och något $b \in B$ gäller $sb = a$.

(d) För ett godtyckligt $a \in A$ ligger alla lösningar till ekvationen $sx = a$ i B .

2. Bevisa: Om e är ett idempotent element av en vänsterförkortningsbar (vänsterkancellativ) semigrupp S så är e en vänsteridentitet i S .

3. Låt f vara ett idempotent element av $\mathcal{T}_X$. Bestäm restriktionen av f till sin värdemängd.

4. Visa att en (tvåsidigt) kancellativ ändlig semigrupp är en grupp. Visa med exempel att en kancellativ oändlig semigrupp inte behöver vara en grupp.

5. Låt X ha n element. Vi betraktar semigruppen $\mathcal{T}_X$ av avbildningar från X till X med funktionssammansättning som operation.

Visa att $\mathcal{T}_X$ har exakt $\binom{n}{k} k^{n-k}$ idempotenter av rang k ($1 \leq k \leq n$). Totala antalet idempotenter är alltså

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

6. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Låt $f \in \mathcal{T}_X$ vara

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm $\langle f \rangle$.

Hemuppgifter, inlämnas den 28 september

Övningsuppgifterna lämnas in senast **onsdagen 28.9.** till David Stenlund, per e-post `dstenlun@abo.fi` eller i pappersform till mig, för bedömning. Genomgås på klass fredagen den 30 september.

1.

Ovanstående riktade graf är grafrepresentationen av en relation α på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Bestäm

- (a) grannmatrisen A_α ,
- (b) relationerna α^2 , α^3 och α^n ($n > 3$),
- (c) transitiva höljet α^t och
- (d) den av α genererade ekvivalensrelationen α^e .

2. $X = \{2, 3, 4, \dots, N-1, N\}$ där N är ett (stort) heltal. Definiera relationen α på X genom

$$x\alpha y \iff \frac{y}{x} \in \mathbf{Z}_+$$

(dvs. y delbart med x). Rita figur för $N = 17$.

α är reflexiv och transitiv (varför?). Bestäm α^e , den minsta ekvivalensrelation som innehåller α .

Antag att X i stället är mängden av alla heltal ≥ 2 . Bestäm α^e i detta fall.

3. Sant eller falskt? (α är en relation på X .)

Om grannmatrisen A_α har alla radsummor $= 1$ så är α en funktion från X till X .

Om α är reflexiv så är $A_{\alpha^k} \neq 0$ (nollmatrisen) för alla $k = 1, 2, 3, \dots$

Om grannmatrisen A_α har exakt en etta i varje rad och varje kolonn så är α en bijektion.
Anm. En 0-1-matris med exakt en etta i varje rad och varje kolonn kallas en *permutationsmatris*.

4. Låt α vara en relation på mängden X . Antag att grannmatrisen för α^k (där k är ett positivt heltal) har en rad som består av idel ettor. Bevisa att $\alpha^e = X \times X$. Hur är det med α^t ?

5. (Jfr. anteckningarna sid. T28) Låt $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ge exempel på en undergrupp T av $\mathcal{T}_X$ bestående av funktioner $f \in \mathcal{T}_X$ med en given partition π av X som består av exakt tre mängder och en värdemängd R som är ett tvärsnitt av π . Det finns högst 6 sådana funktioner (varför?).

6. Om α och β är två relationer på X hur ser grannmatrisen för snittet $\alpha \cap \beta$ ut?

Hemuppgifter, inlämnas den 5 oktober

Övningsuppgifterna lämnas in senast **onsdagen 5.10.** till David Stenlund, per e-post dstenlun@abo.fi eller i pappersform till mig, för bedömning. Genomgås på klass fredagen den 7 oktober.

1. Låt α vara en relation på den ändliga mängden X . Antag att α är reflexiv. Gäller det alltid att

α^2 är reflexiv eller

$\alpha^{n+1} \subset \alpha^n$, $n = 1, 2, \dots$ eller

$\alpha^n \subset \alpha^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$?

Motivera dina svar!

2. Antag att vi har en stor mängd hunduppfödningsdata. Databasen anger bl. a. släktskapsförhållanden. Med hjälp av databasen kan vi konstruera relationen α definierad av

$$x\alpha y \Leftrightarrow x \text{ är förälder till } y.$$

Grundmängden X är de hundar som är inskrivna i databasen.

Vad representerar relationen $\alpha^2 \circ \alpha^{-2}$?

Vad representerar relationen $(\alpha^2 \circ \alpha^{-2}) \cap (\alpha^{-1} \circ \alpha)$?

Kalla ovanstående relation β . Bilda skalära produkten $A_\beta(x, \cdot)A_\beta(y, \cdot)^T$ av x -raden $A_\beta(x, \cdot)$ med y -raden $A_\beta(y, \cdot)$. Hur kan detta tal tolkas? (Skalära produkten av två radvektorer u och v är $uv^T = \sum_{z \in X} u(z)v(z)$.)

Vad representerar talet $\frac{1}{2} \sum_{x \neq y} A_\beta(x, \cdot)A_\beta(y, \cdot)^T$?

3. Frågan gäller igen relationen α definierad av

$$x\alpha y \Leftrightarrow x \text{ är förälder till } y.$$

Grundmängden X är nu mängden människor.

Min mormor Karin hade en kusin Ernst som hon var "dubbelkusin" med, kusin både på modernet och fädernet. Hennes mor var nämligen faster åt Ernst, medan hennes far var Ernsts morbror. Hur skulle man lämpligen uttrycka/identifiera dylika fall av dubbelkusiner med hjälp av grannmatrisen för α^{-2} .

4. Låt V vara en mängd noder ("städer"). Låt A och B vara riktade grafer på V med icke-negativa vikter. Antag vidare att det går en kant med vikten 0 från varje nod till sig själv. (A och B kan t. ex. representera vägkartor. Vikterna kan då vara avståndet i km eller minuter mellan städerna.)

Definiera matrisen M på följande sätt: Om det i grafen A finns en kant mellan x och y låt M_{xy} = kantens vikt; om det inte finns någon kant sätt $M_{xy} = \infty$.

Definiera matrisen N på motsvarande sätt utgående från grafen B .

Definiera en multiplikationen mellan matriserna M och N :

$$(M * N)_{xy} = \min_{z \in V} (M_{xz} + N_{zy}), \quad x, y \in V.$$

Undersök om operationen $*$ är associativ.

5. (fortsättning på uppgift 4)

Hur kan man tolka M^2 (dvs. $M * M$), M^3 etc.?

Visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ existerar. Vad representerar gränsvärdet?

Exemplifiera!

Anm. Om kortaste avståndet mellan matematiker.

På sidan <http://www.ams.org/mathscinet/freeTools.html> under rubriken Collaboration Distance kan man få fram kortaste avståndet mellan två matematiker i en "samarbetsgraf". I denna är matematikerna noder och det finns en kant mellan matematikerna x och y om och endast om x och y har en gemensam publikation. (Det krävs att den gemensamma publikationen har blivit refererad i referattidskriften *Mathematical Reviews* eller i varje fall finns omnämnd där. Antalet författare är drygt 600 000.) Den kortaste vägen finns också angiven.

Du kan lätt kontrollera att lärarna på Mat. inst. har ett kort avstånd till exempelvis nobelpristagarna Albert Einstein och John Nash.

Hemuppgifter, inlämnas den 12 oktober

1. Låt följderna 0123456789 representera tio kort i ordningsföljd. Låt M vara en förenklad "kortblandare" eller "permutator" som kan utföra tre operationer: σ flyttar varje kort ett steg till höger (och det sista kortet längst till vänster), τ flyttar första kortet till tredje positionen, det andra till sjätte, tredje till nionde, det fjärde kortet till andra positionen, det femte lämnas kvar på femte positionen, det sjätte flyttas till åttonde positionen, det sjunde till första positionen, det åttonde till fjärde, det nionde till sjunde, medan det tionde kortet lämnas kvar på tionde positionen (mao. multiplikation med tre modulo 10), och R (*reset*) återställer den ursprungliga ordningen 0123456789.

Vi som åskådare kan emellertid bara se det första och det sista kortet.

(a) Låt m, n vara vilka två olika heltal som helst mellan 0 och 9. Avgör om det finns en kombination av operationer så att vi kan se m som första kort och n som sista kort.

(b) Om 0 är först och 9 är sist, kan vi då vara säkra på att korten däremellan är placerade i ordningen 12345678?

(c) Antag att våra kort ligger i ordningen 1023456789. Kan vi återställa den ursprungliga ordningen 0123456789 *utan* att använda operationen R ?

2. Låt S vara en abelsk semigrupp. Bevisa: Om I är ett minimalt ideal i S så är I en grupp.

Visa att om S är ändlig så finns alltid ett sådant minimalt ideal I .

3. Bevisa att den multiplikativa gruppen $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ (de komplexa talen olika noll) är isomorf med den direkta produkten $T \times \mathbb{R}$ där T är intervallet $[0, 2\pi)$ med addition modulo 2π som operation och $\mathbb{R}$ är de reella talen med addition som operation. Ledning: Börja med att övergå till polära koordinater.

4. (jfr T 33) Vilka funktioner ingår i $\langle \alpha, \beta \rangle$?

5. Tänk dig en maskin med en ändlig mängd X av interna tillstånd, t. ex. en räknemaskin där tillståndet är innehållet i ett stort antal register. Vi opererar nu på maskinen. *Indata* eller *input* består av en följd av tryck på knappar betecknade $A, B, \dots$. Varje tryckning (bokstav) genererar en ändring av tillståndet, från x till $a(x)$, säg, där $a: X \rightarrow X$. [$A, B, \dots$ opererar (*acts*) på X på detta sätt. Motsvarande avbildning betecknas med liten bokstav.] Ett ord, dvs. en följd av bokstäver $BBAA$ resulterar i att x övergår i $b(b(a(a(x))))$. *Utdata*

(*output*) är en funktion av tillståndet, eventuellt tillståndet självt; vi kan t. ex. tänka oss att en funktion av tillståndet är synlig i ett fönster.

Betrakta ett enkelt exempel. Låt tillstånden vara $\{0, 1, \dots, 8, 9\} =: X$. Knapparna kallas P, M, D, T , and Q . De opererar på X på följande sätt:

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

och, med en förenklad beteckning där första raden är bortlämnad,

$$d = (0246802468), \quad t = (0369258147), \quad q = (0149656941).$$

Exempelvis är $p(5) = 6, m(0) = 9, d(2) = 4, t(5) = 5, q(4) = 6$. (Bokstäverna syftar på Plus ett (modulo 10), Minus ett, förDubbla, Trefaldiga och "Qvadrera".)

Möjlig inmatning i vår maskin är ord bildade av bokstäverna P, M, D, T, Q , dvs. indata bildas av elementen i semigruppen $S = \{P, M, D, T, Q\}^*$, se sidan T 11. (Vi inkluderar tomta ordet Λ , identiteten i S .)

Definiera relationen $\sim$ på S genom

$$W \sim W' \iff \forall x \in X : w(x) = w'(x).$$

Ge några exempel på ord W som är relaterade till Λ : $W \sim \Lambda$

Undersök om $\sim$ är en kongruensrelation på S .

Visa att $S/\sim$ är isomorf med en undersemigrupp $\mathcal{S}$ av $\mathcal{T}_X$.

Anm. Ovan beskrivna maskin är ett enkelt exempel på en s. k. *semigruppmaskin* (*semi-group machine*).

Hemuppgifter, inlämnas den 19 oktober

Påminnelse: Tentamen hålls tisdagen den 25 oktober kl. 9-13 i aud. Stina i Axelia, tillsammans med Grundkurs i analys del 1.

1. (forts. på 5 / 12.10.)

a. Är $S/\sim$ isomorf med hela $\mathcal{T}_X$?

b. Betrakta orden W genererade av enbart D och T (dvs. $W \in \{D, T\}^+$, jfr T 11). Beskriv tre olika avbildningar $w(x), x \in X$, som åstadkoms på detta sätt.

c. Finns det en synkroniserande instruktion i S ? Med andra ord, finns det ett W sådant att $W \sim C$ där C opererar på X som en konstant, $c = (0000000000)$.

2. (forts. på föregående)

a. Kan vår maskin åstadkomma samma avbildningar utan M -knapp? Eller exaktare uttryckt, är $\{P, D, T, Q\}^*/\sim$ isomorf med hela semigruppen $\mathcal{S}$ i uppgift 5 / 12.10?

b. Hur är det med $\{D, T, Q\}^*/\sim$?

c. Vad gör T^2 ? Undersök också om det finns någon synkroniserande instruktion i $\{P, T\}^*/\sim$.

d. Visa att $\mathcal{S}$ inte är abelsk. Identifiera några abelska undersemigrupper.

3. Låt X vara mängden $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ där $n > 3$.

Sök en funktion $f \in \mathcal{T}_X$ av rang $n-1$ sådan att f^n har rangen 1, dvs. är en konstant.

Hur många idempotenter av rang $n-1$ finns det i $\mathcal{T}_X$?

Låt $n \geq 10$. Finns det över 1000 idempotenter av rang 2 i $\mathcal{T}_X$?

4. Finns det ett h i $\mathcal{T}_X$ som uppfyller $f \circ h = g$, där

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 5 & 5 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Kan $h \circ f = g$ lösas?

Var god vänd!

5. Låt f, g, h vara element i $\mathcal{T}_X$ där X består av heltalen från 0 till 19.

$$\forall x \in X : f(x) = x^2 \pmod{20}, \quad g(x) = 2x \pmod{20}, \quad h(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor.$$

($\lfloor t \rfloor$ är heltalsdelen av t , dvs. största heltallet $\leq t$.)

Är $\langle f, h \rangle$ abelsk?

Sök idempotenterna i $\langle f \rangle$, $\langle g \rangle$ och $\langle h \rangle$.

6. (forts. på uppg. 5) Betrakta nu f, g , och h som *relationer* på X , dvs. element i $\mathcal{R}_X$ med relationssammansättning $\circ$ som operation.

Bestäm inverserna f^{-1}, g^{-1}, h^{-1} i $\mathcal{B}_X$.

Bestäm f^t, f^e, g^t och g^e .