Introduktion till semigrupper Period 1, 2011
Introduction to Semigroups

Hemuppgifter till fredagen den 16 september
Exercises to Friday, September 16

Övningsuppgifterna lämnas in senast **onsdagen 14.9.** till David Stenlund, per e-post `dstenlun@abo.fi` eller i pappersform till mig, för bedömning. Genomgås på klass fredagen den 16 september. **Övningarna kan sammanlagt ge maximalt 5 bonuspoäng för slutförhöret.**

The exercises are to be sent to David Stenlund by e-mail to `dstenlun@abo.fi` or on paper to me. Deadline: **Wednesday, September 14**. Problems will be reviewed on Friday, September 16. **We will correct them and credit you with up to a maximum total of 5 bonus points for the final examination.**

1. - 2. De två övningarna om Lights associativitetstest (se anteckningarna)

The two exercises on Light's Associativity Test (see Notes)

3. Bevisa att ($\mathbf{Z}$, +) saknar egentliga ideal, dvs. det enda idealet är hela semigruppen.

Prove that ($\mathbf{Z}$, +) has no proper ideals, i. e., the only ideal is the whole semigroup.

4. Låt a vara ett givet element i semigruppen S. Bevisa att $< a >$ är den minimala undersemigruppen som innehåller a.

Let a be a given element in a semigroup S. Prove that $< a >$ is the minimal subsemigroup containing a.

5. Låt X vara mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Låt $S = T_X$ med $\circ$ som semigruppoperation. Konstruera funktioner $f, g, h \ldots \in S$ som uppfyller

(a) $|\text{Range}(f)| = 5$ (dvs. en bijektion)

(b) $|\text{Range}(g)| = 3$

(c) $|\text{Range}(h)| = 1$ (en *konstant* funktion)

(d) Bestäm $h \circ g, h \circ f, g \circ h, f \circ h$.

(e) Är *mängden funktioner f med* $|\text{Range}(f)| \leq 3$ ett ideal?

Take $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Let $S = T_X$ with $\circ$ as semigroup operation. Construct functions $f, g, h \ldots \in S$ satisfying

(a) $|\text{Range}(f)| = 5$ (i. e., a bijection)

(b) $|\text{Range}(g)| = 3$

(c) $|\text{Range}(h)| = 1$ (a *constant* function)

(d) Determine $h \circ g, h \circ f, g \circ h, f \circ h$.

(e) Is *the set of functions f with* $|\text{Range}(f)| \leq 3$ an ideal?

Hemuppgifter, inlämnas den 21 september

Övningsuppgifterna lämnas in senast **onsdagen 21.9.** till David Stenlund, per e-post `dstenlun@abo.fi` eller i pappersform till mig, för bedömning. Genomgås på klass fredagen den 23 september.

1. Låt S vara en semigrupp och A och B delmängder av S. s är ett givet element i S.

Svarar något av alternativen (a) - (d) nedan exakt mot utsagan $sB = A$?

(a) $\forall b \in B : sb \in A$.

(b) För varje $a \in A$ har ekvationen $sx = a$ en lösning $x \in B$.

(c) För något $a \in A$ och något $b \in B$ gäller $sb = a$.

(d) För ett godtyckligt $a \in A$ ligger alla lösningar till ekvationen $sx = a$ i B.

2. Bevisa: Om e är ett idempotent element av en vänsterförkortningsbar (vänsterkancellativ) semigrupp S så är e en vänsteridentitet i S.

3. Låt f vara ett idempotent element av $\mathcal{T}_X$. Bestäm restriktionen av f till sin värdemängd.

4. Visa att en (tvåsidigt) kancellativ ändlig semigrupp är en grupp. Visa med exempel att en kancellativ oändlig semigrupp inte behöver vara en grupp.

5. Låt X ha n element. Vi betraktar semigruppen $\mathcal{T}_X$ av avbildningar från X till X med funktionssammansättning som operation.

Visa att $\mathcal{T}_X$ har exakt $\binom{n}{k} k^{n-k}$ idempotenter av rang k ($1 \leq k \leq n$). Totala antalet idempotenter är alltså

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

6. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Låt $f \in \mathcal{T}_X$ vara

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm $\langle f \rangle$.