

1. Definera följande begrepp:

- a) sannolikhetsmått,
- b) stokastisk variabel,
- c) oberoende mellan två stokastiska variabler X och Y .

2. Låt $\Omega = \mathbf{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ och $\mathcal{F}$ vara alla delmängder av Ω . Låt $\alpha \in (0, 1)$ vara givet och sätt $p_i = \alpha^i$, $i = 1, 2, \dots$. För vilka värden på α är det möjligt att bestämma ett sannolikhetsmått $\mathbf{P}$ på $(\Omega, \mathcal{F})$ sådant att $\mathbf{P}(\{i\}) = p_i$, $i = 1, 2, \dots$. Beräkna $\mathbf{P}(\{5n; n \in \mathbf{N}_0\})$.

3. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler sådana att

$$\mathbf{P}(X = j) = p(1 - p)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

och

$$\mathbf{P}(Y = k) = (k + 1)p^2(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

där $0 < p < 1$. Beräkna fördelningen av $Z := X + Y$. Hur kan resultatet förklaras?

4. Låt X och Y vara oberoende och likformigt på $[-1, 1]$ fördelade stokastiska variabler. Bestäm $\mathbf{P}(|X + Y| \leq 1)$, $\mathbf{E}(|X + Y|)$ och $\mathbf{Var}(|X + Y|)$.

5. Låt X och Y vara oberoende och exponentiellt med parametern λ fördelade stokastiska variabler. Låt

$$Z := \min\{X, Y\} / \max\{X, Y\}.$$

Fördelningen av Z beror inte av λ . Varför? Beräkna $\mathbf{P}(Z < z)$, där $0 < z < 1$.