Sannolikhetslära

Paavo Salminen

7 januari 2010

Innehåll

1 Fördelningsfunktioner och sannolikhetsmått

Definition 1 Funktionen F med $D_f = \mathbb{R}$ sägs vara en **fördelningsfunktion** om
(i) F är icke-avtagande och högerkontinuerlig,
(ii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ och $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Exempel Följande är fördelningsfunktioner:

1. Likformig fördelning på $[a, b]$

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}$$

2. Binomial fördelning med parametrarna $n \in \mathbb{N}$ och $p \in (0, 1)$

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}, & m \leqslant x < m+1, m = 0, \ldots, n-1 \\ 1, & x \geqslant n. \end{cases}$$

3. Låt $\mathbb{Q} = \{r_n : n = 1, 2, \ldots\}$ vara de rationella talen. Funktionen

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \delta_{r_n}(x),$$

där

$$\delta_{r_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < r_n \\ 1, & x \geqslant r_n \end{cases}$$

är en fördelningsfunktion som är kontinuerlig i varje irrationell punkt och diskontinuerlig i varje rationell punkt.

Definition 2 Låt F vara en fördelningsfunktion. Om $F(x) - F(x-) > 0$ sägs x vara F:s **språngpunkt** (eller hoppspunkt) och $F(x) - F(x-)$ är språngets storlek.

Sats 1 *En fördelningsfunktion har högst numrerbart många språngpunkter. Varje diskontinuitetspunkt av en fördelningsfunktion är en språngpunkt.*

Sats 2 *Låt F vara en fördelningsfunktion och $a_j, j = 1, 2, \ldots$ dess språngpunkter och $b_j := F(a_j) - F(a_j-)$ motsvarande språngstorlekar. Inför*

$$F_d(x) := \sum_{j=1}^{\infty} b_j \delta_{a_j}(x).$$

Då gäller att $x \to F_d(x)$ är icke-avtagande, högerkontinuerlig och

$$\lim_{x \to -\infty} F_d(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F_d(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \leqslant 1.$$

Funktionen

$$F_c(x) := F(x) - F_d(x)$$

är icke-avtagande, icke-negativ och kontinuerlig.

Definition 3 Fördelningsfunktionen F sägs vara **diskret** om $F_c \equiv 0$ och **kontinuerlig** om $F_d \equiv 0$.

Definition 4 Låt Ω vara en given (abstrakt) icke-tom mängd. Familjen $\mathcal{F}$ av Ω:s delmängder sägs vara en **σ-algebra** om

(i) $\varnothing \in \mathcal{F}$,
(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$,
(iii) $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \ldots \;\Rightarrow\; \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definition 5 Den minsta σ-algebra av $\mathbb{R}$:s delmängder som innehåller alla intervall av typen

$$(a, b], \quad (-\infty, b], \quad (a, +\infty),$$

där $a, b \in \mathbb{R}$, kallas $\mathbb{R}$:s **Borelmängder** och betecknas med $\mathcal{B}$.

Anmärkning Det finns delmängder av $\mathbb{R}$ som inte tillhör $\mathcal{B}$!

Definition 6 Ett **sannolikhetsmått $\mathbf{P}$** i $(\Omega, \mathcal{F})$ är en mängdfunktion

$$\mathbf{P} : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$$

sådan att

(i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
(ii) $\mathbf{P}(A) \geqslant 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
(iii) $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$ där $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$.

Egenskaper hos $\mathbf{P}$:

1. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbf{P}(A^C) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
3. $A \subseteq B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ (ty $B = A \cup (B \setminus A)$).
4. Monoton konvergens: Antag att $A_n \uparrow A$ eller $A_n \downarrow A$ (dvs. $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\bigcup A_n = A$ eller $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap A_n = A$; observera att $A \in \mathcal{F}$ följer från definitionen av $\mathcal{F}$). Då är $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A)$.
5. Allmän additionsformel:

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Sats 3 *Låt* $\mathbf{P}$ *vara ett sannolikhetsmått i* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$*. Funktionen* F *definierad genom*

$$F(x) := \mathbf{P}((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

är en fördelningsfunktion.

Sats 4 *Låt* F *vara en fördelningsfunktion. Då finns det ett entydigt sannolikhetsmått* $\mathbf{P}$ *i* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *sådant att*

$$\mathbf{P}((-\infty, x]) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2 Stokastiska variabler

Definition 7 Låt$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vara ett sannolikhetsrum. Funktionen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sägs vara en **stokastisk variabel** om för varje $x \in \mathbb{R}$ gäller att

$$\{\omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F}.$$

Exempel Låt $A \in \mathcal{F}$. Då är

$$\mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

en stokastisk variabel.

Definition 8 Den stokastiska variabeln X sägs vara **enkel** om den endast antar ändligt många olika värden. Härvid kan X representeras enligt

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega),$$

där $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$, $x_i \neq x_j, i \neq j$.

Definition 9 Låt X vara en stokastisk variabel. Funktionen

$$F_X(x) := \mathbf{P}(X \leqslant x)$$

kallas **fördelningsfunktionen** av X.

Sats 5 *Låt F_X vara fördelningsfunktionen av den stokastiska variabeln X. Då är F_X icke-avtagande, högerkontinuerlig,*

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

Anmärkning Från Definition 9 fås att

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \mathbf{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-), \\ \text{(ii)} & \mathbf{P}(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a), \\ \text{(iii)} & \mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a-). \end{array}$$

Definition 10 **(i)** X sägs vara **diskret** om F_X är diskret (mao $F_c \equiv 0$, jmf. Definition 3).
(ii) X sägs vara **kontinuerlig** om F_X är kontinuerlig.
(iii) X sägs ha **tätheten** f om för varje $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Anmärkning Om variabeln X har tätheten f som är kontinuerig i x, följer det från integralkalkylens huvudsats att

$$F'_X(x) = f(x).$$

Definition 11 Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sägs vara **Borelmätbar** om för varje $y \in \mathbb{R}$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leqslant y\} \in \mathcal{B}^n,$$

där $\mathcal{B}^n$ är mängden av Borel-mängder i $\mathbb{R}^n$.

Sats 6 **(i)** *Låt X vara en stokastisk variabel och $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ en Borel-mätbar funktion. Då är $Y := g(X)$ en stokastisk variabel.*
(ii) *För $n \in \mathbb{N}$ låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara stokastiska variabler och $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en Borel-mätbar funktion. Då är $Z := g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ en stokastisk variabel.*

Anmärkning Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är Borel-mätbar t.ex. i följande fall

(a) g är kontinuerlig

(b) g är styckevis kontinuerlig

(c) g är högerkontinuerlig och vänster gränsvärden existerar

(d) g är monoton.

Sats 7 **(i)** *Låt $\{X_j : j = 1, 2, \dots\}$ vara en följd av stokastiska variabler. Då är*

$$\inf_j X_j, \quad \sup_j X_j, \quad \lim_{j\to\infty} (\inf_{k\geq j} X_k), \quad \lim_{j\to\infty} (\sup_{k\geq j} X_k)$$

stokastiska variabler (observera dock att de kan anta "värdena" $+\infty$ eller $-\infty$).
(ii) *Antag att $X(\omega) := \lim_{j\to\infty} X_j(\omega)$ existerar för varje $\omega \in \Omega$. Då är X en stokastisk variabel.*

Definition 12 De stokastiska variablerna $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, sägs vara **oberoende** om $\forall B_j \in \mathcal{B}, j = 1, 2, \dots, n$,

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \in B_i).$$

Sats 8 *Variablerna $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, är oberoende om och endast om för varje $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$,*

$$\begin{aligned} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) &:= \mathbf{P}(X_1 \leqslant x_1, \dots, X_n \leqslant x_n) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \leqslant x_i) =: \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) \end{aligned}$$

Sats 9 *Antag att den simultana fördelningen $F_{X_i,\dots,X_n}(x_i, \dots, x_n)$ har tätheten $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$ sådan att*

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) \qquad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

och att $F_{X_i}, i = 1, 2, \dots, n$, *har tätheten* $f_{X_i}, i = 1, 2, \dots, n$. *Då är* $X_1, \dots, X_n$ *oberoende om och endast om för varje* $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$,

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i).$$

Sats 10 *Antag att variablerna* $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, *är diskreta och beteckna deras gemensamma numrerbara värdemängd med* V. *Då är* $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, *oberoende om och endast om för varje* $k_i \in V, i = 1, 2, \dots, n$,

$$p_{1,\dots,n}(k_1, \dots, k_n) := \mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = k_i) =: \prod_{i=1}^{n} p_i(k_i).$$

Definition 13 Händelserna $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, sägs vara **oberoende** om variablerna $\mathbf{1}_{A_i}, i = 1, 2, \dots, n$, är oberoende. Om $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, är oberoende gäller det att

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \dots \mathbf{P}(A_n).$$

Sats 11 *Om* $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, *är oberoende och* $g : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ *och* $h : \mathbb{R}^{n-k} \mapsto \mathbb{R}$ *är Borel-mätbara, då är variablerna* $g(X_1, \dots, X_k)$ *och* $h(X_{k+1}, \dots, X_n)$ *oberoende.*

Definition 14 Låt X vara en enkel stokastisk variabel, dvs.

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i}$$

där $A_i = \{X = x_i\}$ och $x_i \neq x_j$ då $i \neq j$. Talet

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(A_i)$$

kallas för X:s **väntevärde**.

Sats 12 *Låt* X *vara en icke-negativ stokastisk variabel Då finns det en växande följd* $\{X_i : i = 1, 2, \dots\}$ *av enkla stokastiska variabler sådan att för varje* $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_n(\omega).$$

Sats 13 *Låt X vara en icke-negativ stokastisk variabel och $\{X_i\}$ och $\{Y_i\}$ två växande följder av enkla stokastiska variabler sådana att*

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \lim X_i(\omega) = \lim Y_i(\omega) = X.$$

Då gäller att

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{E}(X_i) = \lim_{i\to\infty} \mathbf{E}(Y_i).$$

.

Definition 15 **(i)** Låt X vara en icke-negativ stokastisk variabel och $\{X_i\}$ en växande följd av approximerande stokastiska variabler såsom infördes i Sats 12. Väntevärdet av X sägs existera om gränsvärdet

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{E}(X_i)$$

existerar. I detta fall definieras väntevärdet av X att vara lika med gränsvärdet:

$$\mathbf{E}(X) := \lim_{i\to\infty} \mathbf{E}(X_i)$$

(ii) För en godtycklig stokastisk variabel X inför

$$X^+ = \max(X, 0) \quad \text{och} \quad X^- = -\min(X, 0).$$

Då är $X = X^+ - X^-$ och $|X| = X^+ + X^-$. X sägs ha väntevärdet $\mathbf{E}(X)$ om både $\mathbf{E}(X^+)$ och $\mathbf{E}(X^-)$ existerar. Härvid defineras

$$\mathbf{E}(X) := \mathbf{E}(X^+) - \mathbf{E}(X^-).$$

Anmärkning Det kan visas att väntevärdet av X är oberoende av den approximerande följden $\{X_i\}$.

Sats 14 $\mathbf{E}(X)$ *existerar omm* $\mathbf{E}(|X|)$ *existerar.*

Sats 15 *Låt X och X_i, $i = 1, \ldots, n$, vara stokastiska variabler sådana att $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$, existerar. Då gäller*

(i) $\mathbf{E}(cX) = c\mathbf{E}(X) \quad \forall c \in \mathbf{R}$,

(ii) $\mathbf{E}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)$,

(iii) $\mathbf{E}(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)$ *förutsatt att X_i, $i = 1, \ldots, n$, är oberoende.*

Sats 16 *Låt X vara en stokastisk variabel sådan att $\mathbf{P}(X = c) = 1$ för någon konstant $c \in \mathbb{R}$. Då är $\mathbf{E}(X) = c$.*

Sats 17 *Låt X och Y vara stokastiska variabler sådana att $\mathbf{E}(X)$ och $\mathbf{E}(Y)$ existerar samt $\mathbf{P}(X \leqslant Y) = 1$ (det säges att $X \leqslant Y$ nästan säkert (n.s.)). Då är $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.*

Sats 18 *Om $X \geqslant 0$ och $\mathbf{E}(X) = 0$ då är $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.(Det sägs att $X = 0$ n.s. (nästan säkert).)*

Sats 19 *(Schwartz' olikhet) Om $\mathbf{E}(X^2)$ och $\mathbf{E}(Y^2)$ existerar då är*

$$|\mathbf{E}XY| \leqslant \sqrt{\mathbf{E}X^2\mathbf{E}Y^2}.$$

Sats 20 *(Jensens olikhet) Låt $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vara en konvex funktion och X en stokastisk variabel. Antag att $\mathbf{E}(X)$ och $\mathbf{E}(g(X))$ existerar. Då är*

$$\mathbf{E}(g(X)) \geqslant g(\mathbf{E}(X)).$$

Sats 21 **(i)** *Låt X vara en diskret stokastisk variabel med fördelningsfunktionen F_X och för $i = 1, 2, \ldots$*

$$\mathbf{P}(X = a_i) = F_X(a_i) - F_x(a_i-) =: b_i.$$

Då gäller att $\mathbf{E}X$ existerar om och endast om

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| b_i < \infty,$$

och i detta fall gäller att

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i.$$

(ii) *Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med tätheten f_X. Då gäller att $\mathbf{E}(X)$ existerar om och endast om*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$$

och i detta fall gäller att

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Sats 22 **(i)** *Låt X vara en diskret stokastisk variabel såsom i Sats 21 och g en Borel-mätbar funktion. Antag att väntevärdet av $Y := g(X)$ existerar. Då är*

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} g(a_i)\mathbf{P}(X = a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(a_i)b_i.$$

(ii) *Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel såsom i Sats 21 och g en Borel-mätbar funktion. Antag att väntevärdet av $g(X)$ existerar. Då är*

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Definition 16 Låt X vara en stokastisk variabel sådan att $\mathbf{E}(X)$ existerar. I fall $\mathbf{E}((X - \mathbf{E}X)^2) < \infty$ sägs att variansen, bet $\mathbf{Var}(X)$ av X existerar och är lika med $\mathbf{E}((X - \mathbf{E}X)^2)$:

$$\mathbf{Var}(X) := \mathbf{E}((X - \mathbf{E}X)^2).$$

Talet $\sqrt{\mathbf{Var}(X)}$ kallas för X:s **standardavvikelse**.

Sats 23 *Antag att $\mathbf{E}(X)$ existerar. Då existerar X:s varians om och endast om $\mathbf{E}(X^2)$ existerar, och $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$.*

Sats 24 **(i)** $\mathbf{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow \exists c : \mathbf{P}(X = c) = 1$.
(ii) $\mathbf{Var}(aX + b) = a^2\mathbf{Var}(X)$ *för varje* $a, b \in \mathbf{R}$.
(iii) *Om X och Y är oberoende då är* $\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y)$.
(iv) *Om $\{X_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ är parvis oberoende (dvs. X_i och X_j är oberoende för varje $i \neq j$) då är*

$$\mathbf{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Var}(X_i).$$

3 Om Poisson-fördelningen

Definition 17 Den stokastiska variabeln X sägs vara **Poisson-fördelad** med parametern $\lambda > 0$, om

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Beteckning: $X \sim Po(\lambda)$.

3.1 Poissonfördelning som gränsfördelning för binomialfördelning

Låt $X \sim Bin(n,p)$. Vi vill visa att "om n, är stort och p är litet", då är

$$X \overset{appr.}{\sim} Po(np).$$

I praktiken är approximationen nöjaktig redan då $n > 10$ och $p < 0,01$.

Sats 25 *För $n = 1, 2, \ldots$ låt $X_n \sim Bin(n, p_n)$ och antag att $\lambda := \lim_{n\to\infty} n\, p_n$ existerar och är positivt. Då gäller för varje $k = 0, 1, 2, \ldots$*

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \textit{då } n \to \infty.$$

Anmärkning Observera i Sats 25 att $p_n \to 0$ då $n \to \infty$. Speciellt om $p_n = \lambda/n$, har vi

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

I beviset av Sats 25 kan användas t.ex. **Stirlings formel**:

$$n! = (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+c_n}$$

där $0 \leqslant c_n \leqslant \frac{1}{12n}$. Påståendet kan också bevisas med hjälp av momentgenererande funktioner.

3.2 Poisson-fördelning som en modell för oförutsedda och oberoende förändringar

Betrakta ett fenomen som upprepar sig på ett slumpmässigt sätt oberoende av dess tidigare förekomster, t.ex. stjärnfall eller kunder som anländer till en självbetjäningsaffär. Sådana här fenomen, dvs. antalet förekomster kan under vissa antaganden modelleras med Poisson-fördelningen.

Sats 26 *Om - oberoende av antalet förändringar under tiden $(0,t)$ - sannolikheten för exakt en förändring under tiden $(t, t+\Delta t)$ är $c\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t)$ och sannolikheten för mer än en förändring under tiden $(t, t+\Delta t)$ är $\mathbf{o}(\Delta t)$, då är antalet förändringar under tiden $(0,t)$ Poisson-fördelat med parametern ct.*

Beteckningen $\mathbf{o}(\Delta t)$ i Sats 26 avser en funktion av Δt sådan att

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{o}(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

($\mathbf{o}(\Delta t)$ kunda vara t.ex. $(\Delta t)^2$).

4 Betingade sannolikhetsmått och fördelningar

Definition 18 Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vara ett sannolikhetsrum och $B \in \mathcal{F}$ sådan att $\mathbf{P}(B) > 0$. Den **betingade sannolikheten** för händelsen A med avseende på B är talet

$$\mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Sats 27 *Låt $B \in \mathcal{F}$ vara sådan att $\mathbf{P}(B) > 0$. Då är $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot|B))$ ett sannolikhetsrum.*

Sats 28 *(Den allmänna multiplikationsregeln) För $n \geq 2$ låt $A_1, A_2, \ldots, A_n$, vara händelser och antag att*

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0.$$

Då gäller

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_2 \cap A_1) \cdots \mathbf{P}(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Sats 29 *(Formeln för totalsannolikhet) Låt $\{A_i\}_{i=1}^n$, vara händelser sådana att*

- $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j,$
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega,$

mao. $\{A_i\}_{i=1}^n$, utgör en partition av Ω. Antag också att $\mathbf{P}(A_i) > 0$ för $i = 1, 2, \ldots, n,$. Då gäller för $B \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B|A_i).$$

Sats 30 *(Bayes formel) Låt $\{A_i\}_{i=1}^n$, vara som i Sats 29 och $B \in \mathcal{F}$ sådan att $\mathbf{P}(B) > 0$. Då gäller för $k = 1, \ldots, n$,*

$$\mathbf{P}(A_k|B) = \frac{\mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}(B|A_k)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B|A_i)}$$

4.1 Betingade fördelningar

(A) Det diskreta fallet. Låt Y vara en diskret stokastisk variabel med värdemängden $V_Y = \{y_i : i = 1, 2, \dots\}$ och $\mathbf{P}(Y = y_i) > 0$. Låt X vara en godtycklig stokastisk variabel. Den betingade fördelningen för X givet att $Y = y_i$ är

$$\mathbf{P}(X \leqslant x | Y = y_i) := \frac{\mathbf{P}(X \leqslant x, Y = y_i)}{\mathbf{P}(Y = y_i)}.$$

För att kunna bestämma den betingade fördelningen måste man (vanligtvis) först bestämma fördelningen för (X, Y). Ifall också X är diskret med $V_X = \{x_i : i = 1, 2, \dots\}$ och $g_{X,Y}$ är frekvensfunktionen för (X, Y), dvs.,

$$g_{X,Y}(x_i, y_j) := \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j),$$

då är den betingade frekvensfunktionen för X givet att $Y = y_i$

$$\mathbf{P}(X = x_i | Y = y_i) = \frac{g_{X,Y}(x_i, y_i)}{g_Y(y_i)},$$

där $g_Y(y_i) := \mathbf{P}(Y = y_i), j = 1, 2, \dots$.

Det betingade väntevärdet av X givet att $Y = y_i$, bet. $\mathbf{E}(X|Y = y_i)$, definieras via den betingade frekvensfunktionen på följande sätt

$$\mathbf{E}(X|Y = y_i) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, \mathbf{P}(X = x_i | Y = y_i).$$

(B) Det kontinuerliga fallet med täthet. Låt $f_{X,Y}$ vara tätheten för (X, Y), mao.

$$F_{X,Y}(x, y) := \mathbf{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} dv \, f_{X,Y}(u, v) \quad \forall x, y.$$

Observera att om $f_{X,Y}$ är kontinuerlig i (x, y) då är

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y) = f_{X,Y}(x, y).$$

Den betingade tätheten av X givet att $Y = y$ är funktionen

$$f_{X|Y}(x|y) := \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} & , \text{ om } f_Y(y) > 0, \\ 0 & , \text{ om } f_Y(y) = 0, \end{cases}$$

där f_Y är Y:s täthet. Nu definieras t.ex.

$$\mathbf{P}(X \leqslant x|Y=y) := \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\, du$$

Det betingade väntevärdet av X givet att $Y=y$ är funktionen

$$\mathbf{E}(X|Y=y) := \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx.$$

Anmärkning. (i) Om

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

för varje x och y då är X och Y oberoende. I detta fall gäller också att

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x).$$

(ii) Multiplikationsregeln:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$$

(iii) Formeln för totalsannolikhet:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_{Y|X}(y|x)\, dx$$

(iv) Bayes formel:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_X(x) f_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_{Y|X}(y|u)\, du}$$

Exempel Låt $X \geqslant 0, Y \geqslant 0$, och $X \perp Y$. Vi bestämmer fördelningen för $X+Y$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y \leqslant z) &= \int_0^z \mathbf{P}(X+Y \leqslant z|Y=y) f_Y(y)\, dy \\
&= \int_0^z \mathbf{P}(X \leqslant z-y|Y=y) f_Y(y)\, dy \\
&\overset{X\perp Y}{=} \int_0^z F_X(z-y)\, f_Y(y)\, dy
\end{aligned}$$

Exempel Låt $X \geqslant 0, Y \geqslant 0$, och $X \perp Y$. Vi bestämmer fördelningen för XY:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(XY \leqslant z) &= \int_0^\infty \mathbf{P}(XY \leqslant z|Y=y) f_Y(y)\, dy \\
&= \int_0^\infty \mathbf{P}(X \leqslant \frac{z}{y}|Y=y)\, f_Y(y)\, dy \\
&\overset{X\perp Y}{=} \int_0^\infty F_X(\frac{z}{y})\, f_Y(y)\, dy
\end{aligned}$$

5 Momentgenererande funktioner

5.1 Sannolikhetsgenererande funktioner

Definition 19 Låt X vara en diskret stokastisk variabel med värdemängden $V_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Funktionen

$$G_X(t) := \mathbf{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k$$

kallas X:s **sannolikhetsgenererande funktion**.

Observera att $t \mapsto G_X(t)$ är väldefinierad (åtminstone) för $|t| \leqslant 1$.

Sats 31 *Antag att X:s sannolikhetsgenererande funktion $G_X(t)$ existerar för $|t| < 1 + \delta$ för något $\delta > 0$. Då gäller*

(a) $\mathbf{E}(X) = G'_X(t)|_{t=1}$,
(b) $\mathbf{E}(X^2) = G''_X(t) + G'_X(t)|_{t=1}$,
(c) $\mathbf{Var}(X) = G''_X(t) + G'_X(t) - (G'_X(t))^2|_{t=1}$.

Anmärkning Eftersom $G_X(t)$ definieras genom en potensserie är den godtyckligt många gånger deriverbar och derivatorna fås genom att derivera serien termvis.

Sats 32 *Den sannolikhetsgenererande funktionen av en stokastisk variabel bestämmer variabelns fördelning entydigt.*

Följande sats har inte bevisats på föreläsningarna.

Sats 33 *Funktionen $G : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ är en sannolikhetsgenererande funktion av en stokastisk variabel om och endast om*

(1) $G_X^{(n)} \geq 0$ *i intervallet* $(0, 1)$ *för varje* $n = 1, 2, \ldots$.
(2) $\lim_{t \to 1} G(t) = 1$

5.2 Momentgenererande funktioner

Definition 20 Låt X vara en godtycklig stokastisk variabel. Funktionen

$$M_X(t) := \mathbf{E}\left(e^{tX}\right)$$

kallas X:s **momentgenererande funktion** (förutsatt att den existerar för $|t| < \delta$ för något $\delta > 0$).

Sats 34 *Låt X vara en diskret stokastisk variabel med $V_X = \{0, 1, 2, \dots\}$ och antag att dess sannolikhetsgenererande funktion $G_X(t)$ existerar för $|t| < 1+\delta$ där $\delta > 0$. Då är*

$$M_X(t) = G_X(e^t)$$

där $t < \ln(1 + \delta)$.

Sats 35 *Antag att variabeln X har den momentgenererande funktionen $M_X(t)$, $|t| < \delta$. Då har variabeln $Y := aX + b$, där $a, b \in \mathbb{R}$ den momentgenererande funktionen*

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at), \qquad |t| < \frac{\delta}{|a|}.$$

Sats 36 *Antag att variabeln X har den momentgenererande funktionen $M_X(t)$, $|t| < \delta$. Då existerar alla origomoment $\mathbf{E}(X^n), n = 1, 2, \dots,$ funktionen $t \to M_X(t)$ är godtyckligt många gånger deriverbar och*

$$\mathbf{E}(X^n) = M_X^{(n)}(t)|_{t=0}.$$

Korollarium 1 *Antag att den momentgenerande funktionen M_X av variabeln X har serieutvecklingen*

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, |t| < \delta.$$

Då är

$$\mathbf{E}(X^n) = n! c_n.$$

Följande sats har inte bevisats på föreläsningarna.

Sats 37 *Antag att X har den momentgenererande funktionen $M_X(t)$, $|t| < \delta$ för något $\delta > 0$. Då bestäms X:s fördelning entydigt av M_X .*

5.3 Tillämpningar

1. Låt $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, vara oberoende stokastiska variabler sådana att $M_{X_i}(t)$ existerar för varje i då $|t| < \delta$ med $\delta > 0$. Då har $Y := X_1 + \dots + X_n$, följande momentgenererande funktion

$$\mathbf{E}\left(e^{tY}\right) = \mathbf{E}\left(e^{t(X_1 + \dots, X_n)}\right) = \mathbf{E}\left(e^{tX_1}\right)\mathbf{E}\left(e^{tX_2}\right)\cdots\mathbf{E}\left(e^{tX_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t).$$

   Speciellt om variablerna X_i är identiskt fördelade gäller det att

$$\mathbf{E}\left(e^{tY}\right) = (M_X(t))^n,$$

   där $M_X(t)$ är den gemensamma momentgenererande funktionen av variablerna $X_i, i = 1, 2, \dots, n$.

2. **Kombinerade försök - betingade fördelningar** Betrakta följande situation: Variabeln X har en given, känd fördelning. Uppgiften är att bestämma fördelningen för en annan variabel Y som är beroende av X. Fördelningen för Y givet att $X = x$ antas vara känd. Härvid är det ofta enklast att karakterisera Y:s fördelning via dess momentgenererande funktion.

   (a) Antag att $V_X = \{0, 1, 2, \dots\}$. Då är

   $$M_Y(t) = \mathbf{E}\left(e^{tY}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = n)\mathbf{E}(e^{tY}|X = n),$$

   där

   $$\mathbf{E}(e^{tY}|X = n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} f_{Y|X}(y|n)dy$$

   förutsatt att den betingade tätheten $f_{Y|X}(y|x)$ existerar.

   (b) Om $V_X = \mathbf{R}$ och X har tätheten f_X har vi

   $$\begin{aligned} M_Y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, \mathbf{E}(e^{tY}|X = x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{ty} f_{Y|X}(y|x). \end{aligned}$$

6 Gränsvärdessatser

6.1 Olikheter

Sats 38 *(Markovs olikhet) Antag att X är en icke-negativ stokastisk variabel. Då gäller för varje $a > 0$*

$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a}\mathbf{E}(X).$$

och i allmänhet för $n = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a^n}\mathbf{E}(X^n). \tag{1}$$

Korollarium 2 *Antag att X är en icke-negativ stokastisk variabel sådan att $\mu := \mathbf{E}(X)$ existerar. Då gäller för varje $k > 0$*

$$\mathbf{P}(X \geqslant k\mu) \leqslant \frac{1}{k}\ .$$

Sats 39 *(Tjebysjevs olikhet) Antag att variabeln X har väntevärdet μ och variansen σ^2. Då gäller för varje $k > 0$*

$$\mathbf{P}(|X-\mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}. \tag{2}$$

Anmärkning Välj i (2) $k = a/\sigma,\ a > 0$. Då fås

$$\mathbf{P}(|X-\mu| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}$$

och

$$\mathbf{P}(|X-\mu| < a) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}\,.$$

6.2 De stora talens lag (i svag form)

Definition 21 Följden $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ av stokastiska variabler sägs konvergera **i sannolikhet** mot variabeln X då $n \to \infty$ om

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Sats 40 *Antag att $X_n \to X$ i sannolikhet och $X_n \to Y$ i sannolikhet. Då är $X = Y$ nästan säkert, dvs. $\mathbf{P}(X = Y) = 1$.*

Sats 41 *(Tjebysjevs sats) Låt $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ vara en följd av parvis oberoende stokastiska variabler sådana att*

$$\exists c\ \forall i\ :\ \mathbf{Var}(X_i) \leqslant c.$$

Sätt

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \bar{\mu}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i \qquad (\mu_i := \mathbf{E}(X_i)).$$

Då gäller

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| < \epsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

dvs. $\bar{X}_n - \bar{\mu}_n \to 0$ i sannolikhet.

Korollarium 3 *Låt $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ vara en följd av parvis oberoende och identiskt fördelade stokastiska variabler så att $\sigma^2 := \mathbf{Var}(X_i)$ existerar. (Observera att $\mathbf{Var}(X)$ existerar $\Rightarrow$ $\mathbf{E}(X)$ existerar.) Då gäller $\bar{X}_n \to \mu$ i sannolikhet, där $\mu := \mathbf{E}(X_i)$.*

Korollarium 4 *(Bernoullis sats) Låt sannolikheten för händelsen A vara p och inför*

$$f_n(A) := \frac{1}{n} \times \text{Antalet gånger } A \text{ inträffar vid } n \text{ oberoende upprepningar av försöket,}$$

mao., $f_n(A)$ är den relativa frekvensen för händelsen A. Då gäller

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|f_n(A) - p| \geqslant \varepsilon) = 0 \ \ \forall \varepsilon > 0.$$

Korollarium 5 *(Poissons sats) Låt A_i vara en händelse som inträffar vid den i:te upprepningen av ett försök med sannolikheten p_i. Sätt*

$$f_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}.$$

Då gäller att $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|f_n - \bar{p}_n| \geqslant \varepsilon) = 0 \ \ \forall \varepsilon > 0$, där $\bar{p}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$.

Sats 42 *(Khinchins sats) Låt $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ vara en följd av parvis oberoende och identiskt fördelade stokastiska variabler så att $\mu := \mathbf{E}(X_i)$ existerar. Då gäller att*

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \to \mu \text{ i sannolikhet.}$$

6.3 Konvergens i fördelning

Definition 22 Låt $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av stokastiska variabler och beteckna fördelningsfunktionen av X_n med F_n. Det sägs att $X_n \to X$ **i fördelning** om

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

i varje kontinuitetspunkt x av X:s fördelningsfunktion F.

Sats 43 *Låt $X, X_1, X_2, \ldots$ vara diskreta stokastiska variabler som antar värden i $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Det gäller att $X_n \to X$ i fördelning om och endast om*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X = k)$$

för varje $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Sats 44 *$X_n \to X$ i sannolikhet $\Rightarrow X_n \to X$ i fördelning.*

Följande sats bevisades inte på föreläsningarna.

Sats 45 *Antag att variabeln X_n har den momentgenererande funktionen $M_n(t), |t| < \delta$ för något $\delta > 0$ för $n = 1, 2, \ldots$. Om det existerar en funktion M så att*

$$M(t) = \lim_{n\to\infty} M_n(t)$$

för varje $|t| < \delta$, då är M en momentgenererande funktion för en stokastisk variablel X och $X_n \to X$ i fördelning.

6.4 Den centrala gränsvärdessatsen

Sats 46 *Låt $X_i, i = 1, 2, \ldots$ vara oberoende och identiskt fördelade stokastiska variabler. Antag att $M_{X_i}(t), |t| < \delta$ existerar för varje $i = 1, 2, \ldots$. Sätt $\mu := \mathbf{E}(X_i), \sigma^2 := \mathbf{Var}(X_i)$. Då gäller*

$$Z_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to Z \text{ i fördelning},$$

där $Z \sim N(0, 1)$.

Följande sats har inte bevisats på föreläsningarna.

Sats 47 *(Ljapunovs sats) Låt $X_i, i = 1, 2, \ldots$ vara oberoende och antag att $\mathbf{E}(X_i^3)$ existerar för varje $i = 1, 2, \ldots$. Inför*

$$\sigma_i^2 := \mathbf{Var}(X_i), \quad \rho^3 := \mathbf{E}(|X_i - \mathbf{E}X_i|^3)$$

och

$$s_n := (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^{1/2}, \quad r_n := (\sum_{i=1}^n \rho_i^3)^{1/3}.$$

Om $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} = 0$ då gäller det att

$$\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbf{Var}(S_n)}} \to Z \sim N(0, 1) \text{ i fördelning}$$

($S_n := \sum_{i=1}^n X_i$).

Korollarium 6 *Låt $X_i, i = 1, 2, \ldots$ vara oberoende och identiskt fördelade sådana att $\mathbf{E}(X_i^3)$ existerar. Då gäller*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbf{Var}(S_n)}} \to Z \sim N(0, 1) \text{ i fördelning.}$$

Villkoret $\lim r_n/s_n = 0$ i Sats 47 är inte alltid lätt att kontrollera. Det gäller t.ex. om variablerna X_i är likformigt begränsade, dvs,

$$\exists M \ \forall i \ : \ \mathbf{P}(|X_i - \mu_i| \leqslant M) = 1,$$

och om $\lim s_n = +\infty$.

Sats 48 *(Lindebergs och Fellers sats) Låt $\{X_i\}$ vara oberoende stokastiska variabler sådana att $\sigma_i := \mathbf{Var}(X_i)$ existerar för varje i. Antag att för varje $t > 0$*

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|y-\mu_i|>ts_n} (y-\mu_i)^2 F_i(dy) \to 0,$$

där F_i är fördelningsfunktionen av X_i och $s_n^2 := \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$. Då gäller att

$$\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbf{Var}(S_n)}} \to Z \sim N(0,1) \ \textit{i fördelning.}$$

Korollarium 7 *Låt $X_i, i = 1, \ldots, n$, vara oberoende och identiskt fördelade sådana att $\mathbf{E}(X_i^2)$ existerar. Då gäller*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbf{Var}(S_n)}} \to Z \sim N(0,1) \ \textit{i fördelning.}$$

7 Litteratur

Dessa anteckningar bygger bl.a. på följande litteratur

Chung, K-L. : *A course in probability theory.* Harcourt, Brace & World, inc., New York (1968)

Råde, L.: *Sannolikhetslära och Statistik.* Biblioteksförlaget, Stockholm (1966)

Tuominen, P.; Norlamo, P. : *Todennäköisyyslaskenta.* Limes ry, Helsinki (1986)

På föreläsningarna har också använts material från följande böcker:

Gut, A. : *An intermediate course in probability theory.* Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1995)

Meester, R. : *A natural introduction to probability theory.* Birkhauser, Basel (2003)

Pitman, J.: *Probability.* Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1993)