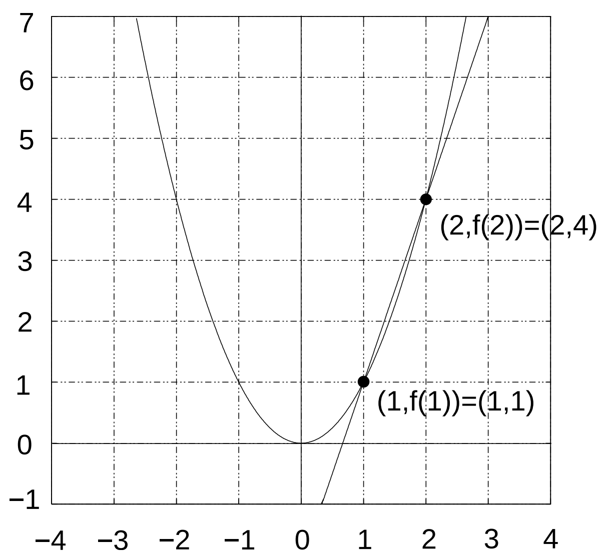
Kapitel 8

Derivata

8.1 Inledning till derivata

Vi vill nu bestämma riktningskoefficienten för tangenten[1] till en given kurva i punkten x_0. För att få en approximation av tangenten ritas en linje genom punkterna $(x_0, f(x_0))$ och $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ där h är ett litet tal.



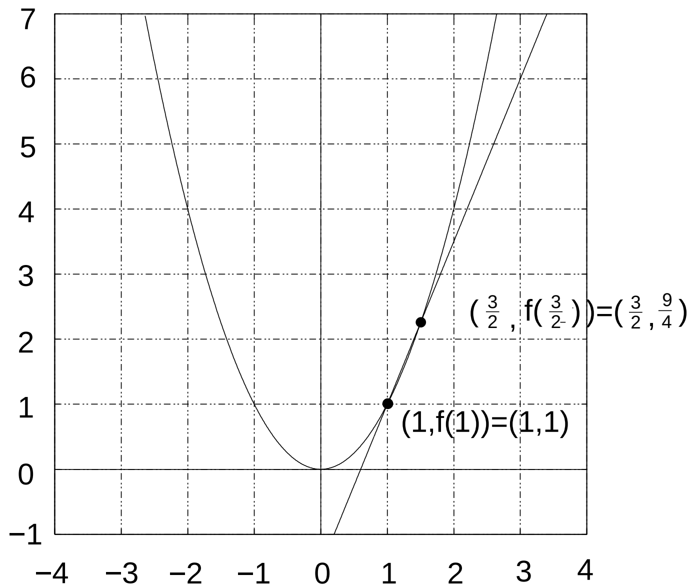
Figur 8.1: Funktionen $f(x) = x^2$. Vi vill beräkna tangentens riktningskoefficient i punkten $(1, f(1)) = (1, 1)$. Som approximation används linjen som går genom punkten $(1, 1)$ och $(1 + h, f(1 + h)) = (2, 4)$ (i figuren är $h = 1$).

[1]Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 12.

Den uppritade linjen kommer att ha riktningskoefficienten

$$k = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Genom att minska på h:s värde kommer vi att erhålla en ännu bättre approximation.



Figur 8.2: Funktionen $f(x) = x^2$. Vi vill beräkna tangentens riktningskoefficient i punkten $(1, f(1)) = (1, 1)$. Som approximation används linjen som går genom punkten $(1, 1)$ och $(1 + h, f(1 + h)) = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ (sätter $h = \frac{1}{2}$).

Derivatan är tangentens riktningskoefficient. Genom att låta $h \to 0$ definieras derivatan.

Definition 8.1 Derivatan *av funktionen $f(x)$ i punkten $x_0 \in D_f$ är*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

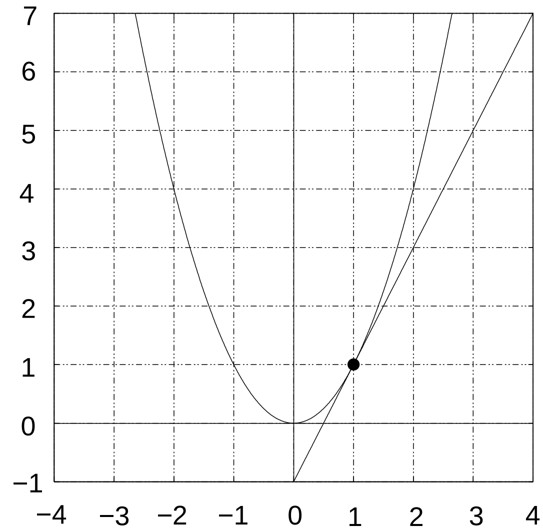
Förutsatt att gränsvärdet existerar. Om detta gäller sägs f vara deriverbar i punkten $(x_0, f(x_0))$. Vidare är derivatan = tangentens riktningskoefficient.

Eftersom linjens ekvation ges av:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

där k är riktningskoefficienten och (x_0, y_0) är en punkt på linje, så är ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Figur 8.3: Funktionen $f(x) = x^2$. Tangenten i punkten $x_0 = 1$.

Exempel 8.2 *Funktionen* $f(x) = x^3$. *Bestäm*

a) $f'(1)$

b) Ekvationen för tangenten genom punkten $(1, f(1))$.

Lösning:

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1 + 3h + 3h^2 + h^3) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3 + 3h + h^2 = 3 + 3\cdot 0 + 0^2 = 3 \\
&\therefore f'(1) = 3.
\end{aligned}
$$

Eftersom $f(1) = 1$ *och* $f'(1) = 3$ *fås följande uttryck för tangentens ekvation genom punkten* $(1, 1)$

$$y - 1 = 3(x - 1) \Longleftrightarrow y = 3x - 2.$$

I många fall kan det vara lättare att skriva om definition på derivata. Observera att

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exempel 8.3 *Bestäm ett allmänt uttryck för $f'(x_0)$ då $f(x) = \sqrt{x}$ och vi kräver att $x_0 > 0$.*

Lösning:
Använder omskrivningen ovan.

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}
$$

8.2 Derivatafunktionen

I föregående kapitel koncentrerade vi oss på derivatan i en viss punkt. Ändå såg vi i det sista exemplet att vi kunde skriva derivatan som en funktion[2] av den punkt vi undersöker. Vårt mål är att utveckla detta resonemang och bilda en funktion $f'(x)$ där $x \in D_f$, så att denna funktion beskriver värdet av derivatan i olika punkter. Detta innebär att derivatan i punkten $(x_0, f(x_0))$ är derivatafunktionen i punkten $(x_0, f'(x_0))$.

Derivatafunktionen är definierad i de punkter $x_0 \in D_f$ där $f'(x_0)$ existerar. Detta betyder att $D_{f'} \subseteq D_f$.

Exempel 8.4 *Enligt det förra exemplet gäller det att derivatafunktionen för $f(x) = \sqrt{x}$ är*

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad , x > 0.$$

Definition 8.5 *Funktionen f är* **deriverbar i intervallet** $]a, b[$ *om den är deriverbar för alla $x \in]a, b[$. Om det dessutom gäller att $D_f =]a, b[$ säges f vara* **deriverbar.** *(Intervallet $]a, b[$ kan här också vara $\boldsymbol{R}$ eller något annat öppet intervall.)*

Vi betecknar ibland

$$f'(x) = Df(x) \qquad \text{eller} \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Exempel 8.6 *Vi kan alltså också skriva*

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{d\sqrt{x}}{dx}.$$

[2]Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 13.

Räkneregler 8.7 *För derivatan gäller, då $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara funktioner och c är en konstant, följande räkneregler (den första visas genom att bryta ut c och den andra visas genom att förenkla högerledet).*

1. $$D(cf(x)) = cDf(x)$$

2. $$D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x)$$

Man brukar säga att en operator D som uppfyller dessa villkor är linjär.

8.3 Deriveringsregler

Se Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 14.

Exempel 8.8 *Derivera $f(x) = x^n$ i punkten x_0.*

Lösning:
Uppgiften kan formuleras som

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}.$$

Vi kontrollerar enkelt att ("teleskoperande summa"):

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Detta innebär att:

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})$$

Insättning av detta i definitionen på derivata ger:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ &= x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \cdots + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

För ett polynom gäller alltså:

Sats 8.9

$$Dx^n = nx^{n-1} \text{ för alla } n \in \boldsymbol{N}.$$

Då vi använder summaformeln för derivata och formeln för derivatan av en en konstant gånger en funktion får vi således följande resultat.

$$\begin{aligned} D \quad & (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) \\ & = a_n \cdot n\, x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1)\, x^{n-2} + \ldots + a_1. \end{aligned}$$

Exempel 8.10

$$f(x) = 7 = 7 \cdot x^0 \qquad \text{ger} \qquad f'(x) = 7 \cdot 0x^{-1} = 0$$

$$g(x) = 4x^5 \qquad \text{ger} \qquad g'(x) = 4 \cdot 5x^4 = 20x^4$$

$$h(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{ger} \qquad h'(x) = f'(x) + g'(x) = 0 + 20x^4 = 20x^4$$

Exempel 8.11

$$D(3x^3 + 5x^2 - 4x + 2) = 9x^2 + 10x - 4.$$

Exempel 8.12 *Definiera $f(x) = x^2 - 4x$ och lös ekvationen*

$$f'(x^2) = f'(3).$$

Lösning:
Med $f(x) = x^2 - 4x$ gäller det att $f'(x) = 2x - 4$. Detta innebär att

$$f'(x^2) = 2x^2 - 4 \qquad \text{och} \qquad f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

Ekvationen $f'(x^2) = f'(3)$ löses.

$$2x^2 - 4 = 2 \Longleftrightarrow 2x^2 = 6 \Longleftrightarrow x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Exempel 8.13 *Bestäm en funktion f så att $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.*

Lösning:
f:s gradtal är 3. Ett allmänt polynom av tredje graden har följande utseende:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Om detta deriveras erhålls

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

För att $p'(x) \equiv f'(x)$ (beteckningen $\equiv$ betyder ”identisk”, dvs. lika i alla *punkter) krävs att:*

$$3 = 3a \Longleftrightarrow a = 1, \quad -4 = 2b \Longleftrightarrow b = -2 \quad \text{och} \quad 1 = c.$$

Konstanten d försvinner vid deriveringen och kan alltså väljas godtyckligt.

$$d \in \boldsymbol{R}.$$

$$\therefore \qquad f(x) = x^3 - 2x^2 + x + d \qquad , d \in \boldsymbol{R}.$$

Vi har nu inte bestämt bara ett *polynom som uppfyller det givna villkoret, utan faktiskt* alla*, eftersom den konstanta funktionen är den enda funktion som försvinner vid derivering. (Tangenten är vågrät överallt endast om funktionen är konstant.)*

8.4 En kurvas tangent och normal

Vi definierade derivatan i punkten x_0 utgående från dess tolkning som tangentens riktningskoefficient[3]. Normalen i punkten x_0 är den linje som skär tangenten vinkelrätt. Förhållandet mellan riktningskoefficienten för tangenten, k_1 och riktningskoefficienten för normalen k_2 ges av:

$$k_1 k_2 = -1$$

Eftersom tangentens riktningskoefficient är $f'(x_0)$ är normalens riktningskoefficient

$$-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Utgående från att linjens ekvation genom punkten (x_0, y_0) kan skrivas $y - y_0 = k(x - x_0)$ kan följande sats härledas:

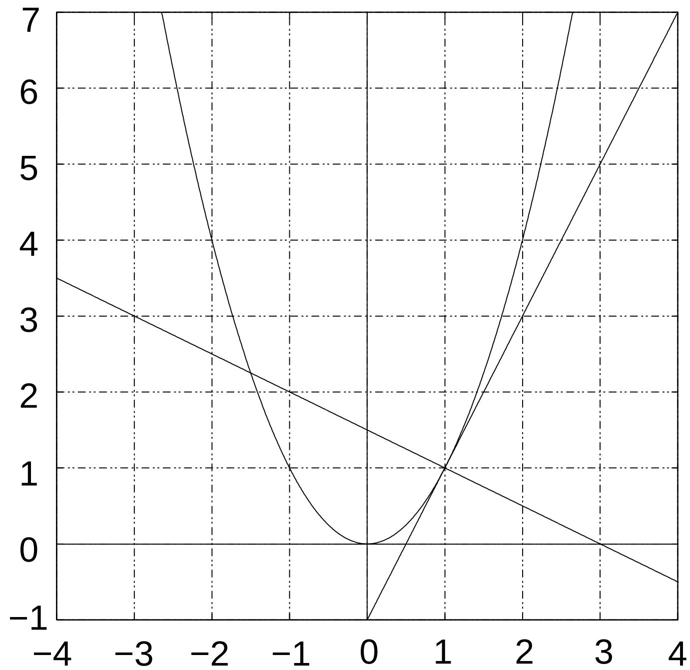
Sats 8.14 *Antag att $f'(x_0)$ existerar. Ekvationen för tangenten genom punkten $(x_0, f(x_0))$ ges av:*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

och om därtill $f'(x_0) \neq 0$, så ges ekvationen för normalen genom punkten av

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

[3]Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 15



Figur 8.4: Funktionen $f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$. Tangentens riktning i punkten $x_0 = 1$ är $f'(1) = 2$. Normalens riktningskoefficient är $-\frac{1}{2}$.

Exempel 8.15 *Funktionen f definieras som*

$$f(x) = x^2 - 6x + 2.$$

Bestäm a) Koordinaterna för toppen av parabeln och b) Ekvationen för tangenten och normalen i punkten $(4, -6)$.

Lösning:
a) Funktionens graf är en parabel som öppnar sig uppåt. Då vi söker koordinaterna för toppen av parabeln söker vi den punkt där tangenten är vågrät, dvs. den punkt där kurvan håller på att vända uppåt igen. Tangenten i en punkt är vågrät om och endast om derivatan i punktens x-koordinat är noll. Bestämmer derivatafunktionen:

$$f'(x) = 2x - 6$$

Löser ekvationen

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = 3.$$

$x_0 = 3$ *motsvarar y-koordinaten* $y_0 = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 2 = -7$.

$$\therefore \textit{ Toppen finns i punkten } (x_0, y_0) = (3, -7).$$

b) Punkten $(4,-6)$ *finns på kurvan, eftersom*

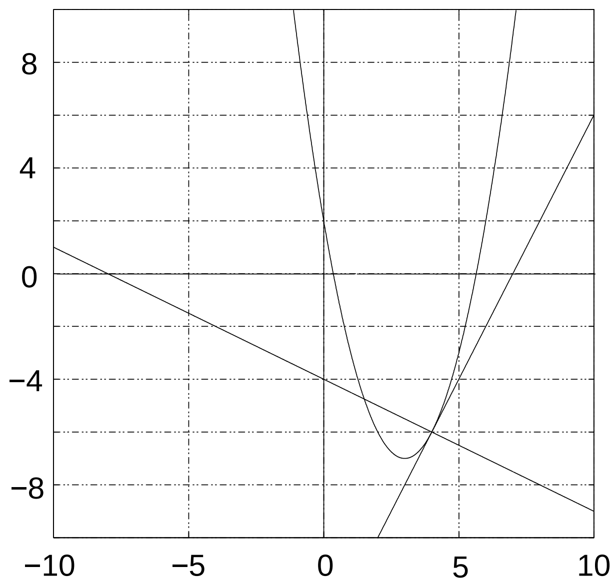
$$f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 2 = -6.$$

Derivatan i punkten $x_0 = 4$ *är* $f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2 \neq 0$. *Eftersom tangenten och normalen går genom punkten* $(4,-6)$ *är tangentens ekvation*

$$y - (-6) = 2(x-4) \Longleftrightarrow y = 2x - 14$$

och normalens ekvation är

$$y - (-6) = -\frac{1}{2}(x-4) \Longleftrightarrow y = -\frac{x}{2} - 4.$$



Figur 8.5: Funktionen $f(x) = x^2 - 6x + 2$. Toppen på parabeln i punkten $(3,-7)$. Tangenten och normalen utritad i punkten $(4,-6)$.

Exempel 8.16 *Parabeln*

$$y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

har två tangenter som är parallella med linjen $y = 2x - 3$. *Bestäm ekvationerna för dessa.*

Lösning:
Tangentens riktningskoefficient bör vara 2 eftersom den är parallell med linjen $y = 2x - 3$. *Bildar* $f'(x)$ *då* $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 2$$

Nu bör det gälla att $f'(x) = 2$. *Löser ekvationen*

$$6x^2 - 2x - 2 = 2 \Longleftrightarrow 6x^2 - 2x - 4 = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$$

$$\therefore \qquad x = 1 \vee x = -\frac{2}{3}.$$

I två punkter, $x_1 = 1$ *och* $x_2 = -\frac{2}{3}$ *är tangenten parallell med linjen* $y = 2x - 3$. *Motsvarande* y*-värden ges av:*

$$y_1 = f(x_1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$$

och

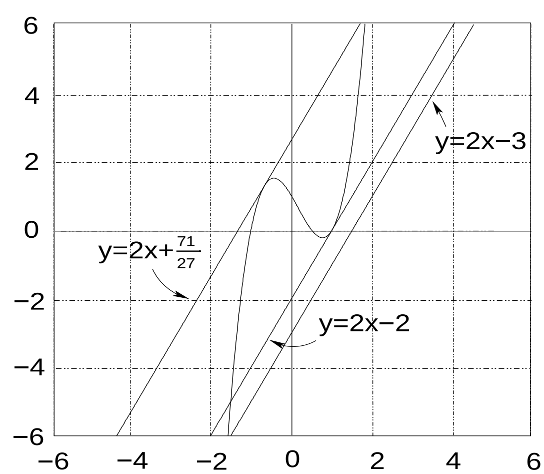
$$y_2 = f(x_2) = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{16}{27} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 1$$

$$= \frac{-16 - 12 + 36 + 27}{27} = \frac{35}{27}$$

Detta ger de båda tangenterna:

$$y - 0 = 2(x - 1) \Longleftrightarrow y = 2x - 2$$

$$y - \frac{35}{27} = 2\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) \Longleftrightarrow y = 2x + \frac{4}{3} + \frac{35}{27} \Longleftrightarrow y = 2x + \frac{71}{27}$$



Figur 8.6: Tangenterna har ekvationerna $y = 2x - 1$ och $y = 2x + 71/27$.

Exempel 8.17 *Bestäm ekvationerna för de tangenter till kurvan* $y = x^3 + 1$ *som går genom punkten* $(-1, 1)$.

Lösning:
Punkten $(-1, 1)$ *är inte på kurvan eftersom*

$$f(-1) = (-1)^3 + 1 = 0 \neq 1.$$

Gör följande ansats:
Tangeringspunkten är i $(x_0, f(x_0))$ *och riktningen för tangenten är* $f'(x_0)$. *Eftersom tangentens ekvation ges av:*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

och

$$f'(x) = 3x^2$$

kan vi för den okända punkten $(x_0, f(x_0))$ *skriva tangentens ekvation som*

$$y - (x_0^3 + 1) = 3x_0^2(x - x_0) \iff y = 3x_0^2 x + (1 - 2x_0^3).$$

Nu känner vi till att linjen går genom punkten $(-1, 1)$, *d.v.s. för tangentens ekvation måste gälla att:*

$$1 = 3x_0^2(-1) + 1 - 2x_0^3 \iff 3x_0^2 + 2x_0^3 = 0$$

För att få reda på den okända punkten x_0 *löses nu ekvationen med avseende på denna.*

$$2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \iff x_0^2(2x_0 + 3) = 0$$

$$\therefore x_0 = 0 \vee x_0 = -\frac{3}{2}$$

För $x_0 = 0$ *är tangentens riktningskoefficient*

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$$

För $x_0 = -\frac{3}{2}$ *är tangentens riktningskoefficient*

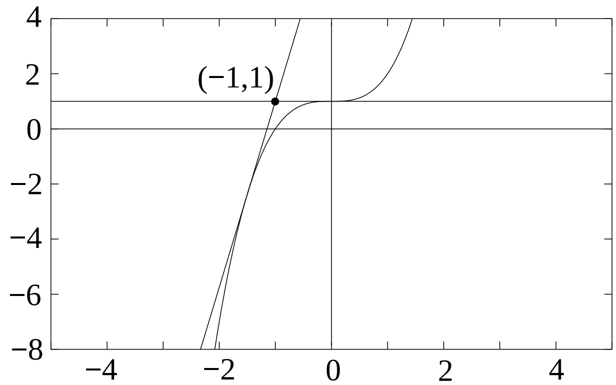
$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$$

Eftersom båda tangenterna går genom punkten $(-1, 1)$ *fås ekvationerna:*

$$y - 1 = 0(x - (-1)) \iff y = 1$$

och

$$y - 1 = \frac{27}{4}(x - (-1)) \iff y = \frac{27}{4}x + \frac{31}{4}.$$



Figur 8.7: Funktionen $f(x) = x^3 + 1$. Tangenterna genom punkten $(-1, 1)$ har ekvationerna $y = 1$ och $y = \frac{27}{4}x + \frac{31}{4}$.

Sats 8.18 *Om funktion $f(x)$ är deriverbar i punkten $x = x_0$ medför det att funktionen är kontinuerlig i $x = x_0$. Kontinuitet behöver inte medföra deriverbarhet.*

Bevis:
Antag att $f(x)$ är deriverbar i punkten x_0. Då har vi att

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \pm\infty.$$

Eftersom nämnaren går mot noll och gränsvärdet är ändligt, så måste också täljaren gå mot noll. Dvs. vi har gränsvärde av typen "a/0". Detta kan vara ändligt endast om $a = 0$. Vi har alltså

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

ty $f(x_0)$ är en konstant, vilket precis betyder att $f(x)$ är kontinuerlig i x_0.

Vi väntar med att visa att kontinuitet inte medför deriverbarhet.

■

Satsen kan tolkas så att om en funktion är diskontinuerlig i punkten x_0 så är den ej heller deriverbar i x_0.

8.5 Ensidiga derivator

Hittas i Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 16. På liknande sätt som vänster- och högergränsvärde definierades definieras nu *vänster- och höger-derivata.*

Definition 8.19 *Funktionen f har för $x_0 \in D_f$ en* **vänsterderivata** *eller f är* **deriverbar från vänster,** *om*

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existerar och en **högerderivata** *eller f är* **deriverbar från höger,** *om*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existerar. Vänserderivatan betecknas med $f'_-(x_0)$ och högerderivatan betecknas $f'_+(x_0)$.

Följande ses direkt.

Sats 8.20 *Funktionen f är deriverbar för x_0, om och endast om dess vänster- och högerderivator existerar och är lika. Då gäller*

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

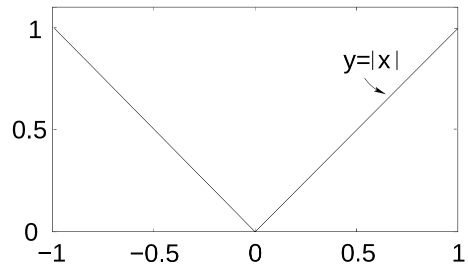
Exempel 8.21 *Vi ska nu slutföra beviset av sats 8.18 genom att visa att det finns funktioner som kan vara kontinuerliga i en punkt utan att vara deriverbara där. Vi väljer för detta ändamål $f(x) = |x|$. Vi visar att $f(x)$ är kontinuerlig, men inte deriverbar, i $x_0 = 0$.*

$$\begin{aligned} f(x) \text{ kont i } 0 &\iff \lim_{x \to 0^-} |x| = |0| = \lim_{x \to 0^+} |x| \\ &\iff \lim_{x \to 0^-} -x = 0 = \lim_{x \to 0^+} x \iff \textit{sant} \end{aligned}$$

Vi har alltså att $f(x)$ är kontinuerlig i $x_0 = 0$. Dock gäller att

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1, \end{aligned}$$

så $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. Därför är $f(x)$ inte deriverbar i 0 och saken är klar.



Figur 8.8: Funktionen är inte deriverbar i punkten $x_0 = 0$ eftersom "tangenten inte är entydig" i den punkten. Kontinuitet behöver inte medföra deriverbarhet. Både vänster- och högerderivata existerar men de är olika.

Exempel 8.22 *Är*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4, & x > 1 \end{cases}$$

deriverbar på hela $\boldsymbol{R}$*?*

Lösning:
Eftersom $f(x)$ styckevist är en polynomfunktion är denna deriverbar överallt utom möjligtvis i skarven. Det enda frågetecknet kan vara den möjliga diskontinuitetspunkten $x = 1$. Det bör gälla att funktionens höger- och vänsterderivata båda existerar och är lika i $x = 1$. Undersöker vänsterderivatan:

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(2 - x^2) - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} -(x + 1) = -2.$$

Undersöker därefter högerderivatan.

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2 - 4x + 4) - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$$

Andragradsekvationen $x^2 - 4x + 3 = 0$ har lösningarna:

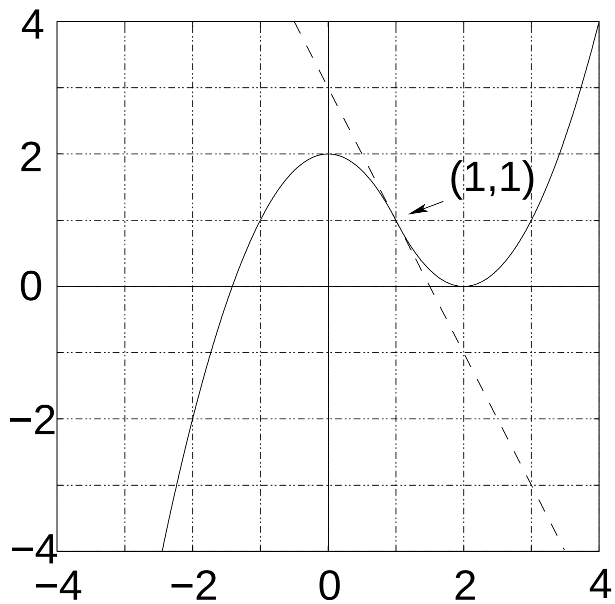
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \qquad \therefore x_1 = 3 \; x_2 = 1$$

Gränsvärdesuttrycket kan därför skrivas:

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-3) = 1-3 = -2$$

$$\therefore f'_-(1) = f'_+(1) = -2$$

Detta innebär att funktionen är deriverbar i $x = 1$ och därmed (med motiveringen att $f(x)$ styckevist är ett polynom) på hela $\boldsymbol{R}$.



Figur 8.9: Funktionen f(x) är deriverbar (och därför kontinuerlig) i $x = 1$.

Vi behöver inte alltid gå till definitionen för att undersöka deriverbarheten hos en funktion i en punkt utan vi kan dra nytta av följande sats (som vi inte bevisar).

Sats 8.23 *Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i x_0 och deriverbar nära x_0. (Vi behöver inte anta att $f(x)$ är deriverbar* i *x_0.) Antag vidare att $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ existerar. Då gäller att $f(x)$ är deriverbar också i x_0 och*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

Anmärkning 8.24 *Resultatet gäller faktiskt sidvist, så vi har också följande variant. Antag att $f(x)$ är högerkontinuerlig i x_0 och deriverbar nära x_0 ($x > x_0$ räcker). Antag vidare att $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ existerar. Då gäller att $f(x)$ är deriverbar från höger också i x_0 och $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$.*

Med hjälp av denna sats kunde vi ha beräknat $f'_-(1)$ som $\lim_{x\to 1^-} f'(x)$ och $f'_+(1)$ som $\lim_{x\to 1^+} f'(x)$ i senaste exempel, vilket skulle beparat oss proceduren med derivatans definition.

Exempel 8.25 *Bestäm a och b så att $f(x)$ är deriverbar överallt.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 3, & x \leq a \\ 1 - x^2, & x > a \end{cases}$$

Lösning:
För att vi skall kunna tillämpa satsen ovan bör $f(x)$ vara kontinuerlig. Det bör alltså gälla att:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x\to a^-} (x^2 + bx + 3) = \lim_{x\to a^+} (1 - x^2) = a^2 + ab + 3$$

Vi kan göra insättning direkt:

$$a^2 + ab + 3 = 1 - a^2 = a^2 + ab + 3$$

Detta innebär att

$$a^2 + ab + 3 = 1 - a^2 \Longleftrightarrow 2a^2 + ab = -2.$$

Vi har nu fått ett villkor som måste gälla för att f skall vara kontinuerlig. För att f skall vara deriverbar måste ytterligare $f'_-(a) = f'_+(a)$. Bildar $f'(x)$ för de x som vi vet att derivatan existerar.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b, & x < a \\ -2x, & x > a \end{cases}$$

Vi kan nu beräkna höger- och vänsterderivatan:

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = \lim_{x\to a^-} 2x + b = 2a + b$$

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^+} -2x = -2a$$

Eftersom det bör gälla att vänster- och högerderivatan är lika stora fås:

$$2a + b = -2a \Longleftrightarrow 4a + b = 0$$

Vi har två krav på parametrarna a och b. Löser därför ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2a^2 + ab + 2 & = 0 \quad (1) \\ 4a + b & = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Enligt (2) gäller det alltså att $b = -4a$. Insättning i (1) ger ekvationen

$$2a^2 + a(-4a) + 2 = 0 \Longleftrightarrow -2a^2 = -2 \Longleftrightarrow a = \pm 1$$

Ur sambandet $b = -4a$ erhålls för $a = 1,\ b = -4$ och för $a = -1,\ b = 4$. Detta är de värden på a, b som gör $f(x)$ deriverbar på hela $\boldsymbol{R}$.

8.6 Derivatan av en produkt och en kvot

Vi skall i denna sektion se på deriveringsregler[4] för en produkt $f(x) \cdot g(x)$ och en kvot $\frac{f(x)}{g(x)}$ av två funktioner. Vi härleder först deriveringsreglerna för en produkt:

$$D\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)g(x) - f(x_0)g(x)) + (f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0))}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Sats 8.26 *Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är två funktioner som är deriverbara i x_0. Då gäller att*

$$D\big(f(x_0)g(x_0)\big) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

För de deriverbara funktionerna f, g, h gäller vidare att:

$$D(fgh) = D\big((fg)h\big) = D(fg)\cdot h + fgh' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Därför har vi också att

$$Df^n = nf^{n-1}f'.$$

Exempel 8.27

$$D\big((x^2 - 3x)(x^2 + x - 4)\big) = (2x - 3)(x^2 + x - 4) + (x^2 - 3x)(2x + 1)$$
$$= 2x^3 + 2x^2 - 8x - 3x^2 - 3x + 12 + 2x^3 + x^2 - 6x^2 - 3x$$
$$= 4x^3 - 6x^2 - 14x + 12$$

Exempel 8.28

$$D(4x + 4)^{11} = 11(4x + 4)^{10} \cdot 4$$

[4]Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 17.

Sats 8.29 *För derivatan av kvoten $h(x) = f(x)/g(x)$ där $f(x), g(x)$ är deriverbara i x_0 och $g(x_0) \neq 0$ gäller att*

$$h'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Speciellt gäller att:

$$D\frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \qquad (g(x) \neq 0)$$

Exempel 8.30 *Vi skall visa att deriveringsregerna för potenser även gäller när exponenten är ett negativt heltal. Antag att $n \in \boldsymbol{Z}_+$*

$$Dx^{-n} = D\frac{1}{x^n} = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}.$$

Det gäller alltså för varje $n \in \boldsymbol{Z}$ att

$$Dx^n = nx^{n-1}.$$

Exempel 8.31 *Beräkna derivatan av*

$$\frac{2x+1}{x^2+x-4}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} D\frac{2x+1}{x^2+x-4} &= \frac{2(x^2+x-4) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x-4)^2} \\ &= \frac{(2x^2+2x-8) - (4x^2+4x+1)}{(x^2+x-4)^2} \\ &= \frac{-2x^2-2x-9}{(x^2+x-4)^2} \end{aligned}$$

8.7 Högre derivator

[5]Eftersom $f'(x)$ anger tangentens riktningskoefficient kan man tolka derivatan som tillväxthastigheten hos funktionen i en viss punkt. Växer funktionen snabbt är derivatan "stor" och positiv. Deriverar man derivatan borde man få tillväxthastigheten hos derivatan, d.v.s. accelerationen.

Definition 8.32 *Andra derivatan av funktionen f är derivatan av f'. Den betecknas f'', $D^2 f$ eller $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.*

Exempel 8.33 *Beräkna derivatan och andra derivatan av*

$$f(x) = x^3 + 2x - 7.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x - 7 \\ f'(x) &= 3x^2 + 2 \\ f''(x) &= 3 \cdot 2x = 6x \end{aligned}$$

Analogt med andra derivatan kan man även beräkna tredje derivatan, fjärde derivatan o.s.v. Dessa betecknas $f'''(x)$ eller $f^{(3)}(x)$ o.s.v.

Exempel 8.34 *Tredje derivatan av $f(x) = x^3 + 2x - 7$ är 6. Vidare är $f^{(n)}(x) = 0$ för $n \geq 4$.*

Exempel 8.35 *En bil rör längs en väg, så att dess tillryggalagda sträcka (m) beskrivs av*

$$s(t) = \sqrt{t}, \qquad (m) \quad t \geq 0.$$

(Tiden anges i sekunder.) Vid tidpunkten $t_0 = 9$ (s) har bilen (momentana) hastigheten $s'(9)$.

$$s'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad \left(\frac{m}{s}\right) \quad t > 0,$$

så hastigheten är $1/6$ m/s och accelerationen $s''(9)$ m/s^2.

$$s''(t) = \frac{0 \cdot (2\sqrt{t}) - 1 \cdot \left(\frac{2}{2\sqrt{t}}\right)}{4t} = -\frac{1}{4t\sqrt{t}} \qquad \left(\frac{m}{s}^2\right) \quad t > 0,$$

så $s''(9) = -1/108$ m/s^2.

[5]Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 18

8.8 Deriveringsregler för vissa vanliga funktioner

I denna sektion kommer vi att presentera några deriveringsregler[6].

Räkneregler 8.36 *För derivatan av följande funktioner gäller ($x \in \boldsymbol{R}$):*

1. $$Dx^a = ax^{a-1} \qquad a \in \boldsymbol{R},\ x \in \boldsymbol{R}_+$$

   Om $a \in \mathbf{Z}$, så gäller formeln för alla $x \in \mathbf{R}$.

2. $$Da^x = a^x \ln a \qquad a > 0, a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}$$

   Speciellt $De^x = e^x \ln e = e^x$.

3. $$D \log_a x = \frac{1}{x \ln a} \qquad a > 0, a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}_+$$

   Speciellt $D \ln x = 1/(x \ln e) = 1/x$.

4. $$D \sin x = \cos x \qquad D \cos x = -\sin x \qquad x \in \mathbf{R}$$

5. $$D \tan x = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \middle| n \in \mathbf{Z} \right\}$$

[6] Oinas-Kukkonen m.fl Kurs 7 kapitel 12, 14-16, 19.

Exempel 8.37 *Bevisa deriveringsregeln*

$$D\tan x = \frac{1}{cos^2 x}.$$

Lösning:
Eftersom

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{och} \qquad D\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

kan vi skriva att

$$D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(D\sin x)(\cos x) - (\sin x)(D\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}.$$

Nu gäller ju att $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *och*

$$D\tan x = \frac{1}{cos^2 x}.$$

Exempel 8.38 *Visa att derivatan till funktionen*

$$f(x) = e^x(x^3 - x^2)$$

har åtminstone ett nollställe i intervallet $]0,1[$.

Lösning:
Vi bildar derivatan ($D(fg) = f'g + fg'$):

$$f'(x) = e^x(x^3 - x^2) + e^x(3x^2 - 2x) =$$

$$e^x(x^3 + 2x^2 - 2x) = e^x x(x^2 + 2x - 2)$$

Detta är en kontinuerlig funktion. Nu gäller det att

$$f'\left(\frac{1}{10}\right) \approx e^{\frac{1}{10}}\frac{1}{10}\cdot(-1,79) < 0$$

och

$$f'\left(\frac{9}{10}\right) \approx e^{\frac{9}{10}}\frac{9}{10}\cdot(0,61) > 0.$$

Eftersom derivatan är kontinuerlig och ändrar tecken måste den ha åtminstone ett nollställe i intervallet $]0,1[$.

8.9 Derivatan av en sammansatt funktion

Hittills har vi presenterat regler för derivering av summor och produkter av funktioner. Ännu har vi dock inte studerat derivering av sammansatta funktioner[7], d.v.s. funktioner av formen:

$$h(x) = \sin\left(4x^2\right).$$

Funktionen h kan uppfattas som den sammansatta funktionen gof, där

$$g(x) = \sin x \qquad \text{och} \qquad f(x) = 4x^2.$$

Vi har alltså

$$h(x) = g(f(x)) = \sin(4x^2).$$

Oftast då man i praktiken deriverar en funktion, så är den av denna sammansatta typ, så följande deriveringsregel är mycket viktig.

Sats 8.39 *Antag att $f(x)$ är deriverbar i x_0 och att $g(x)$ är deriverbar för $x = f(x_0)$. Då är $g\big(f(x)\big)$ deriverbar i x_0 och*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Denna sats kallas *kedjeregeln*. $f'(x)$ brukar kallas "inre derivatan". Vi kommer i fortsättningen att kalla g för den yttre funktionen och f för den inre funktionen.

Exempel 8.40 *Derivera*

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-2}\right)^2.$$

Lösning:
För att derivera denna bildar vi hjälpfunktionerna:

$$g(x) = x^2 \qquad \text{och} \qquad h(x) = \frac{x}{x-2}$$

Nu gäller det att

$$f(x) = g(h(x)).$$

Eftersom

$$g'(x) = 2x$$

och

$$h'(x) = \frac{(x-2)-x}{(x-2)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$$

får vi den sammansatta derivatan

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \left(2\frac{x}{x-2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{(x-2)^2}\right) = -\frac{4x}{(x-2)^3}.$$

[7] Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 7 kapitel 11.

Exempel 8.41 *Bestäm derivatan av*

$$f(x) = (x^4 - x^2)^6.$$

Lösning:
Här är den yttre funktionen $g(x) = x^6$ *och den inre* $f(x) = x^4 - x^2$. *Vi deriverar yttre och inre funktionerna.*

$$Dx^6 = 6x^5 \qquad \text{och} \qquad D(x^4 - x^2) = 4x^3 - 2x.$$

Derivatan fås nu genom att sätta in den inre funktionen i den yttre deriverade yttre funktionen och multiplicera med derivatan av den inre funktionen.

$$f'(x) = 6(x^4 - x^2)^5 \cdot (4x^3 - 2x) = (24x^3 - 12x)(x^4 - x^2)^5.$$

Exempel 8.42 *Derivera*

$$\sqrt{\cos x}$$

Här är $\sqrt{x}$ *den yttre funktionen och* $\cos x$ *den inre funktionen. Det gäller att:*

$$D\sqrt{x} = Dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

och

$$D\cos x = -\sin x.$$

Genom att sätta in den oderiverade inre funktionen i den yttre och multiplicera med den deriverade inre funktionen fås:

$$D\sqrt{\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Exempel 8.43 *Derivera* $\ln \cos x$.

Lösning:

$$D\ln\cos x = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

(Vi borde egentligen sätta $\cos x > 0$, *dvs.* $x \in]-\pi/2 + 2n\pi, \pi/2 + 2n\pi[$, $n \in \mathbf{Z}$.*)*

Anmärkning 8.44 *Orsaken till att formeln kallas för kedjeregeln. Under lämpliga antaganden:*

$$Df\big(g\big(h(x)\big)\big) = f'\big(g\big(h(x)\big)\big) \cdot Dg\big(h(x)\big) = f'\big(g\big(h(x)\big)\big) \cdot g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$$

etc.

Exempel 8.45

$$\begin{aligned} D\cos(\sin 2x) &= -\sin(\sin 2x) \cdot D\sin 2x \\ &= -\sin(\sin 2x) \cdot \cos 2x \cdot D2x \\ &= -2\sin(\sin 2x)\cos 2x \end{aligned}$$

8.10 En tillämpning: L'Hôpitals regel

Vi ska nu se litet på en mycket användbar metod att beräkna gränsvärden. Metoden är ofta bra då man vill *beräkna* ett gränsvärde, men den kan tyvärr inte användas i bevis. Följande sats ger l'Hôpitals regel[8].

Sats 8.46 *Låt* $\lim$ *betyda* $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a^+}$, $\lim_{x\to a^-}$, $\lim_{x\to\infty}$ *eller* $\lim_{x\to-\infty}$ *och anta att* f *och* g *är två gånger kontinuerligt deriverbara nära den intressanta punkten samt* $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ *eller* $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$. *Om gränsvärdet*

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existerar eller "är oändligt", så gäller det att

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exempel 8.47 *Beräkna*

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x}.$$

Lösning:
Direkt insättning ger "0/0", som är odefinierat. Låt därför $f(x) = \sin x$ *och* $g(x) = \pi - x$, *så att* $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$. *Då är*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ g'(x) &= -1 \\ f''(x) &= -\sin x \\ g''(x) &= 0, \end{aligned}$$

som alla är kontinuerliga, så l'Hôpitals regel kan användas. Vi får alltså

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{-1} = \frac{-1}{-1} = \underline{1}.$$

I vissa fall kan man bli tvungen att använda regeln två gånger för att få ett resultat, som följande exempel visar.

[8] Namnet uttalas "l'Hospital". Det lär, lustigt nog, ska vara så att Johann Bernoulli (1667—1748) fann resultatet, men sålde det åt den franska markisen G.F.A. de l'Hôpital. Se Sjöberg, Boris: Från Euklides till Hilbert, 5 uppl., Åbo Akademis Förlag, Åbo 2001.

Exempel 8.48 *Beräkna* $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$.

Lösning:
Direkt insättning ger "$\infty \cdot 0$*", som är odefinierat. Vi kan skriva om uttrycket* $x^2e^{-x} = x^2/e^x$ *och således få ett gränsvärde av typen* ∞/∞. *Låt nu* $f(x) = x^2$ *och* $g(x) = e^x$, *så att* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. *Vi har* $f'(x) = 2x$ *och* $g'(x) = e^x$, *så regeln ger*

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Vi fick tyvärr inget resultat ännu. Men vi kan använda l'Hôpitals regel igen på det nya gränsvärdet genom att derivera täljaren och nämnaren skilt pånytt. $D2x = 2$ *och* $De^x = e^x$, *så*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0,$$

vilket alltså är det sökta gränsvärdet.

I vissa fall ger regeln inget resultat alls, därför att uttrycket inte blir enklare av derivering. Följande enkla exempel visar detta.

Exempel 8.49 *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Lösning:
Direkt insättning ger "∞/∞*" och derivatan av nämnaren fås enligt kedjeregeln till*

$$D\sqrt{1+u^2} = \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}} \cdot D(1+u^2) = \frac{2u}{2\sqrt{1+u^2}} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

så l'Hôpital leder till följande beräkningar:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u/\sqrt{1+u^2}} = \lim_{u\to\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} = \frac{\infty}{\infty}$$

Använder man l'Hôpital igen, så återfås det ursprungliga uttrycket:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{u/\sqrt{1+u^2}}{1} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

Vi är alltså tillbaka där vi startade.

Gränsvärdet är inte svårt att beräkna på "vanligt sätt":

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{|u|\sqrt{1+1/u^2}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/u^2}} = \frac{1}{1} = \underline{1},$$

ty u *är ett stort positivt tal, så* $|u| = u$.

8.11 En funktions extremvärden

[9]Vi har definierat derivatan som tangentens riktningskoefficient. Detta gör att derivatan är ett kraftfullt verktyg för att undersöka funktionsförlopp. Vi kan m.hj.a. derivatan bestämma punkter där funktionen antar största och minsta värden, var funktionen växer o.s.v.

8.11.1 Sambandet mellan funktionsförloppet och derivatans tecken

Sats 8.50 *Antag att funktionen f är kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar i $]a,b[$. Om det i intervallet $]a,b[$ för varje x gäller att*

1.	$f'(x) \geq 0$	*så är*	f *växande i* $[a,b]$
2.	$f'(x) > 0$		f *strängt växande i* $[a,b]$
3.	$f'(x) \leq 0$		f *avtagande i* $[a,b]$
4.	$f'(x) < 0$		f *strängt avtagande i* $[a,b]$
5.	$f'(x) = 0$		f *konstant i* $[a,b]$

Observera att a, b tillåts vara $\pm\infty$.

Exempel 8.51 *Undersök i vilka intervall f är strängt avtagande då*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x, & x > 0 \end{cases}.$$

Lösning:
Det gäller att f är kontinuerlig på hela $\boldsymbol{R}$ eftersom

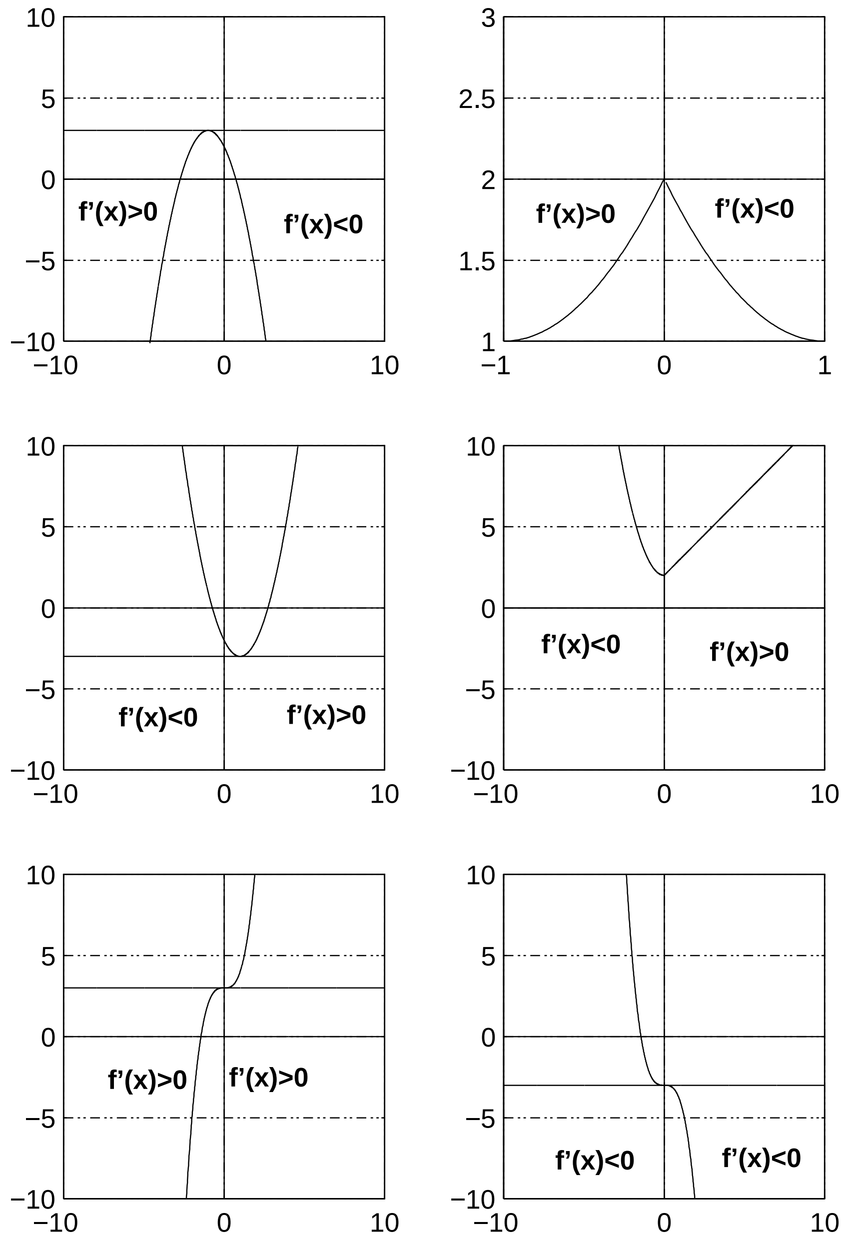
$$\lim_{x \to 0^-} -x = 0 = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{2}x = f(0).$$

Funktionen f är deriverbar på hela $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$. Derivatan är

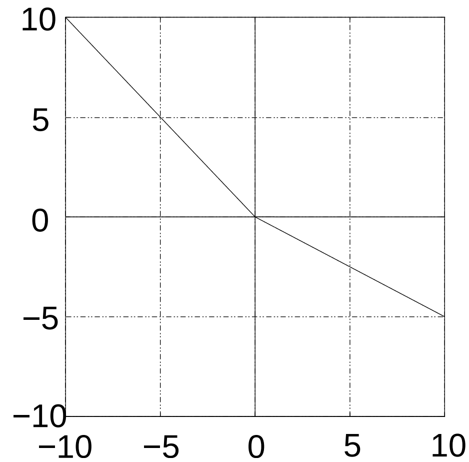
$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ -\frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}.$$

Eftersom $f'(x) < 0$ på $]-\infty, 0[$ så är $f(x)$ strängt avtagande på $]-\infty, 0]$. Ytterligare gäller att $f'(x) < 0$ på $]0, \infty[$ vilket leder till att $f(x)$ är strängt avtagande på $[0, \infty[$. Dessa båda påståenden implicerar att $f(x)$ är strängt avtagande på hela $\boldsymbol{R}$. Se figur 8.11.

[9]Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 19, Kaus 7 kapitel 2-4, 7-8.



Figur 8.10: Tecknet på derivatan anger om funktionen är växande eller avtagande.



Figur 8.11: Funktionen $f(x)$ i exempel 8.51 är strängt avtagande på hela $\boldsymbol{R}$.

Anmärkning 8.52 *Vi kan alltid förfara på det sätt, som illustreras i exemplet ovan. Vi inser att det inte stör resonemanget att derivatan kanske inte existerar i vissa* enskilda punkter*. Då blir det å andra sidan viktigt att anta att f åtminstone är kontinuerlig där derivatan inte existerar. (Vi har ju att deriverbarhet medför kontinuitet, så ovan är antagandet om kontinuitet intressant endast för ändpunkterna.)*

Lösning av olikheter med hjälp av derivatan

Vi tittar bara på ett snabbt exempel.

Exempel 8.53 *Visa att* $\forall x \in \mathbf{R}_+ : \sin x < x$.

Lösning:
Definiera $f(x) = x - \sin x$*. Vi ska alltså visa att* $x > 0 \Longrightarrow f(x) > 0$*. Det är trivialt att olikheten är uppfylld då* $x > 1$*, eftersom sinusfunktionen inte antar värden större än 1. Vi behöver alltså endast undersöka intervallet* $]0, 1]$.

1. $f(0) = 0$*, så om vi kan visa, att* $f(x)$ *är strängt växande på* $\mathbf{R}_+$*, så är saken klar.*

2. $f'(x) = 1 - \cos x > 0$*, utom i* $x = 0$*. Vi har alltså* f *kontinuerlig i* 0 *och* $f'(x) > 0$ *för* $x > 0$*, så* f *är strängt växande på* $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$*. Med andra ord:* $x > x_0 \geq 0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0)$ *och om vi speciellt tar* $x_0 = 0$*, så fås* $x > 0 \Longrightarrow f(x) > f(0) = 0$.

■

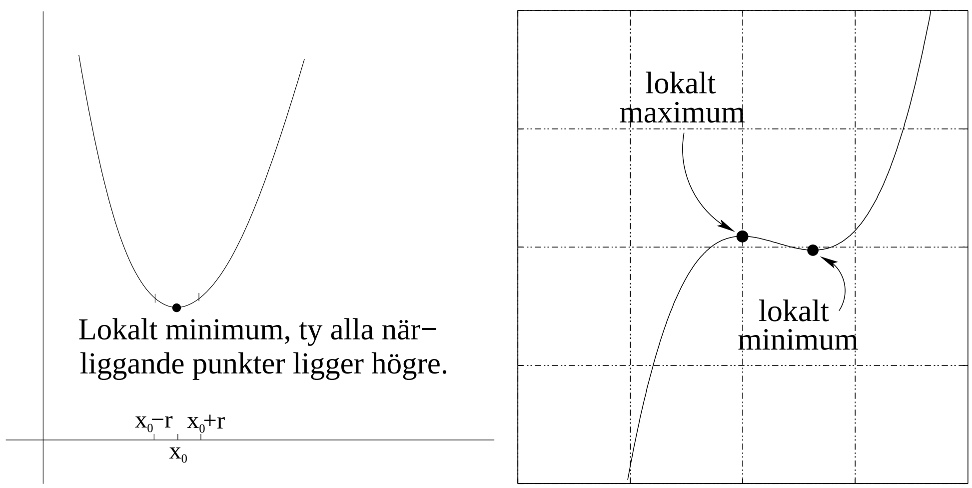
8.11.2 Lokala extremvärden

I många fall kan vi ha en punkt x_0 som ger upphov till ett funktionsvärde som är större (eller mindre) än funktionsvärden kring $f(x_0)$. Sådana värden kallas lokala extremvärden.

Definition 8.54 *Om det för $x_0 \in D_f$ existerar ett (litet) $r > 0$ sådant att i hela $I =]x_0 - r, x_0 + r[$ gäller att*

1. $f(x_0) \geq f(x)$, *så är x_0 ett* **lokalt maximiställe** *till funktionen f och $f(x_0)$ ett* **lokalt maximivärde.**
2. $f(x_0) \leq f(x)$, *så är x_0 ett* **lokalt minimiställe** *till funktionen f och $f(x_0)$ ett* **lokalt minimivärde.**

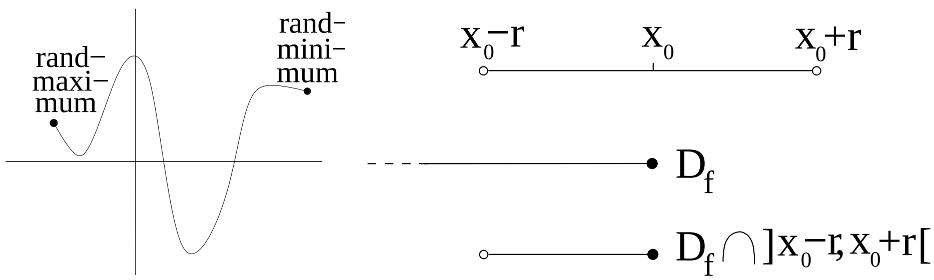
(Se figuren nedan.)



Figur 8.12: Till vänster idén med lokala extremvärden illustrerad och till höger har $f(x)$ lokala extremvärden.

I definitionen på lokalt extremvärde sägs att funktionen f ska vara definierad i en omgivning av det lokala extremstället. Vi gör följande definition, som påminner om ett ”ensidigt lokalt extremvärde”.

Definition 8.55 *Funktionen f antar* **randextremvärde** *i x_0, ifall x_0 är en ändpunkt (randpunkt) i D_f och det finns ett (litet) $r > 0$, sådant att för alla $x \in D_f \cap]x_0 - r, x_0 + r[$ gäller att $f(x_0) \geq f(x)$ (randmaximum) eller $f(x_0) \leq f(x)$ (randminimum).*



Figur 8.13: Till vänster en möjlig situation med randextremvärden och till höger en illustration av hur $x \in D_f \cap]x_0 - r, x_0 + r[$ ska tolkas.

Anmärkning 8.56 *Randextremvärden är väsentligen lokala extremvärden i definitionsintervallets ändpunkter, så vi gör ingen större skillnad mellan dessa. Vi betraktar snarare randvärden som specialfall av lokala extremvärden.*

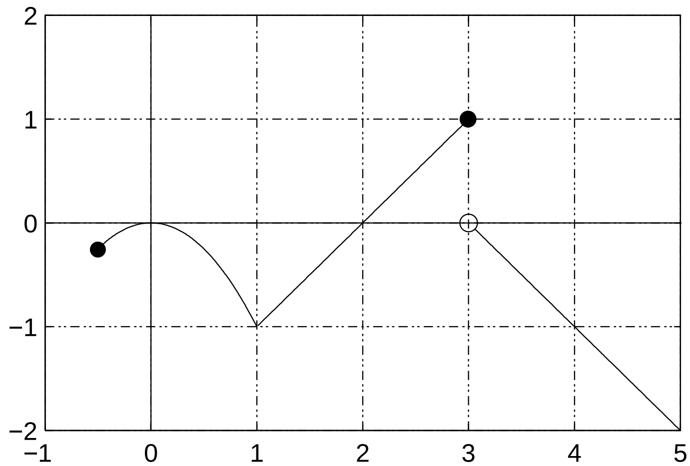
Det som vi har definierat som "lokala extremvärden" kunde man, om man vill utesluta randextremvärden, kalla inre lokala extremvärden.

Exempel 8.57 *Bestäm m.hj.a. grafen lokala extremvärden till*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x - 2, & 1 < x \leq 3 \\ 3 - x, & x > 3 \end{cases} .$$

Lösning:
Se figur 8.14. De lokala extremställena och -värdena ges av följande:

extremställe	*extremvärde*	*maximum/minimum*
$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	*lokalt minimivärde, randminimum*
$x = 0$	0	*lokalt maximivärde*
$x = 1$	-1	*lokalt minimivärde*
$x = 3$	1	*lokalt maximivärde*



Figur 8.14: $f(x)$ definierad som i exempel 8.57.

Sats 8.58 *Funktionen $f(x)$ kan ha lokala extremvärden (eller randextremvärden)*

1. *i f:s diskontinuitetsställen,*
2. *i derivatans nollställen,*
3. *för x-värden, där derivata saknas och*
4. *i definitionsintervallets randpunkter.*

Exempel 8.59 *Har $f(x) = x^5 + x^3 + x$ lokala extremställen?*

Lösning:
Vi undersöker värdet i de punkter som anges i satsen.

1. *Funktionen saknar diskontinuitetsställen.*
2. $$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$$
   Derivatan saknar nollställen. Det saknas alltså punkter där $f'(x) = 0$.
3. *Derivatan existerar i varje punkt.*
4. *Ändpunkter i definitionsintervallet saknas.*

$$\therefore f(x) \textit{saknar lokala extremvärden}$$

Exempel 8.60 *Bestäm lokala extremvärden till*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \leq 1 \\ 2 - x & , \ x > 1 \end{cases}$$

Lösning:
Funktionen är kontinuerlig för $x = 1$, ty

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 = \lim_{x \to 1^+} (2 - x) = f(1).$$

Derivatafunktionen:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \ x < 1 \\ -1 & , \ x > 1 \end{cases}$$

Vi kan söka extremvärden för fyra olika typer av punkter:

1. *Derivatans nollställen. För $x < 1$ gäller att $2x = 0$ för $x = 0$. Derivatan saknar nollställen för $x > 1$.*

2. *Ändpunkter till intervallet saknas.*

3. *Diskontinuitetsställen finns ej. (Varför?)*

4. *För x-värden för vilka derivata saknas. Derivata saknas för $x = 1$.*

Eftersom funktionen är kontinuerlig kan vi utnyttja ovanstående sats för att bestämma vilka typer av extremvärden som de extremställen vi hittat ger upphov till. Vi gör upp följande tabell:

		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	*odef*	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(0) = 0$ är alltså ett lokalt minimivärde och $f(1) = 1$ är ett lokalt maximivärde.

Följande sats hjälper oss att med hjälp av derivatan avgöra vilken typ av extremvärde vi har för en viss punkt.

Sats 8.61 *Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i x_0 och deriverbar nära x_0, möjligtvis med undantag av punkten x_0. Då gäller för f att:*

1. *x_0 är ett lokalt maximiställe, om $f'(x) > 0$ för $x < x_0$ och $f'(x) < 0$ för $x > x_0$.*

2. *x_0 är ett lokalt minimiställe, om $f'(x) < 0$ för $x < x_0$ och $f'(x) > 0$ för $x > x_0$.*

3. *x_0 är inte något extremställe (x_0 kallas terasställe) om f' behåller sitt tecken, då x växer och passerar x_0.*

Bevis:

1. Då $f'(x) > 0$ för $x < x_0$, har vi att f är strängt växande till vänster om x_0 och således $f(x_0) > f(x)$, då $x < x_0$. Å andra sidan så är $f'(x) < 0$, dvs. f är avtagande för $x > x_0$, så $f(x_0) > f(x)$, då $x > x_0$. Slutsatsen blir alltså att $f(x_0) \geq f(x)$, för x nära x_0 och enligt definitionen på lokalt maximum, så har vi alltså att x_0 är ett lokalt maximiställe.

2. Vi kunde bevisa detta fall på motsvarande sätt. Dock betraktar vi istället $g(x) = -f(x)$. Då uppfyller $g'(x) = -f'(x)$ antagandena i första fallet och vi drar slutsatsen att $g(x_0) \geq g(x)$ för $x \approx x_0$. Detta kan vi direkt tolka som att $-f(x_0) \geq -f(x)$, dvs. $f(x_0) \leq f(x)$ för $x \approx x_0$. Vi har visat att x_0 är ett lokalt minimiställe.

3. a) Antag att $f'(x) > 0$ nära x_0. Då är f strängt växande både till vänster och till höger om x_0. x_0 är inte ett lokalt maximiställe eftersom $x > x_0$ ger att $f(x) > x_0$, oberoende hur liten omgivning av x_0 vi betraktar. På motsvarande sätt är x_0 inte heller ett lokalt minimiställe, ty $x < x_0$ ger $f(x) < f(x_0)$. x_0 är alltså inte ett lokalt extremställe.
   b) Antag att $f'(x) < 0$ nära x_0. a) bevisar att $-f(x)$ inte har lokalt extremställe i x_0 och därför har inte heller $f(x)$ det.

■

Vi har följande nyttiga följdsats.

Korollarium 8.62 *Antag att f är två gånger deriverbar för x_0 och därtill att $f'(x_0) = 0$. Då är x_0 ett*

1. *lokalt maximiställe om*
$$f''(x_0) < 0$$

2. *lokalt minimiställe om*
$$f''(x_0) > 0$$

Märk att satsen inte säger någonting ifall $f''(x_0) = 0$. Då måste man undersöka situationen noggrannare.

Bevis:

1. Då f är två gånger deriverbar, så måste f' vara kontinuerlig i x_0. (Om f' är deriverbar i en punkt, så är f' också kontinuerlig där.) f' är strängt avtagande i x_0 eftersom $f''(x_0) < 0$. Detta ger att i någon (liten) omgivning av x_0 gäller att $x < x_0 \Longrightarrow f'(x) > 0$ och $x > x_0 \Longrightarrow f'(x) < 0$. Satsen ovan ger att x_0 är ett maximiställe.

2. $-f$ har enligt del 1. ett lokalt maximum i x_0. Därför har f ett lokalt minimum här.

■

Anmärkning 8.63 *Märk, att man kan försöka med att undersöka derivatans teckenväxling genom upprepad derivering. Idén är att man deriverar tills man får en derivata som inte antar värdet noll i x_0, då kan vi säga något om också de lägre derivatornas teckenväxling nära x_0. (Se avsnittet om lösning av olikheter med hjälp av derivata tidigare.)*

Exempel. *$f(x) = x^3$ ger $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ och $f'''(x) = 6$. Vi har att $f'(0) = f''(0) = 0$. Båda är kontinuerliga och $f'''(0) > 0$, så $f''(x)$ är strängt växande för $x \in \mathbf{R}$. Detta ger, då $f''(0) = 0$, att $f''(x) > 0$ för $x > 0$. På samma sätt är då $f'(x) > 0$ för $x > 0$. Detta ger, att f är strängt växande för $x > 0$. På motsvarande sätt visas, att för $x < 0$ är f' strängt avtagande och f strängt växande.*

Exempel 8.64 *Undersök arten av de lokala extremvärdena till funktionen*

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3$$

med hjälp av andra derivatan.

Lösning:
Vi deriverar $f(x)$:

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

Lokala extremställen sökes bland lösningarna till ekvationen:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 15x^4 - 60x^2 = 0$$

Bryter ut x^2 och tillämpar nollregeln:

$$x^2(15x^2 - 60) = 0$$

$$x^2 = 0 \vee 15x^2 - 60 = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = \frac{60}{15} \Longleftrightarrow x^2 = 4 \Longleftrightarrow x = \pm 2$$

För att bestämma arten av dessa möjliga extrempunkter bildas andra derivatan:

$$f''(x) = 60x^3 - 120x$$

Nu gäller att

$$f''(-2) = 60(-2)^3 - 120(-2) = -480 + 240 = -240 < 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ är ett lokalt maximiställe}$$

och

$$f''(2) = 60 \cdot 2^3 - 120 \cdot 2 = 480 - 240 = 240 > 0.$$

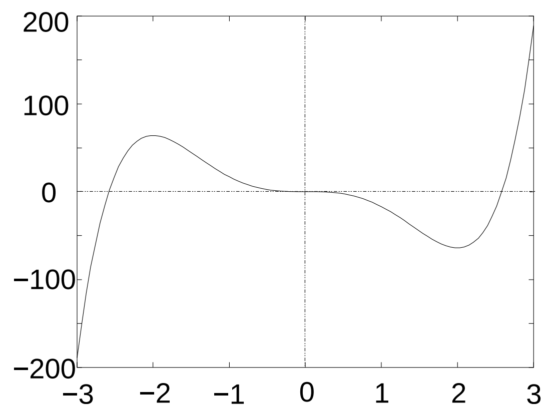
$$\therefore x = 2 \text{ är ett lokalt minimiställe}$$

Vi får problem i origo:

$$f''(0) = 0$$

Vi kan inte bestämma om $x = 0$ är ett lokalt maximi- eller minimiställe utgående från andra derivatan.

Anmärkning 8.65 *I exemplet kunde vi dock fortsätta att derivera i origo och se vad vi får. $f^{(3)}(x) = 180x^2 - 120$, så $f^{(3)}(0) = -120 < 0$ och f'' är tydligen strängt avtagande nära noll. Därför är $f''(x) > 0$ för $x < 0, x \approx 0$ och $f''(x) < 0$ för $x > 0, x \approx 0$. Då är $f'(x) < 0$ både för $x < 0$ och $x > 0$. Slutsats: Origo utgör en terasspunkt, eftersom derivatans tecken bibehålls.*



Figur 8.15: $f(x)$ definierad som i uppgiften.

8.11.3 Globala maximi- och minimivärden

Vi skall börja med att definiera ett begrepp som vi kommer att använda:

Definition 8.66 *Funktionen* $f : D_f \to V_f$ *antar för* $x_0 \in D_f$ *sitt* **globala maximivärde** *om det för varje* $x \in D_f$ *gäller att*

$$f(x_0) \geq f(x).$$

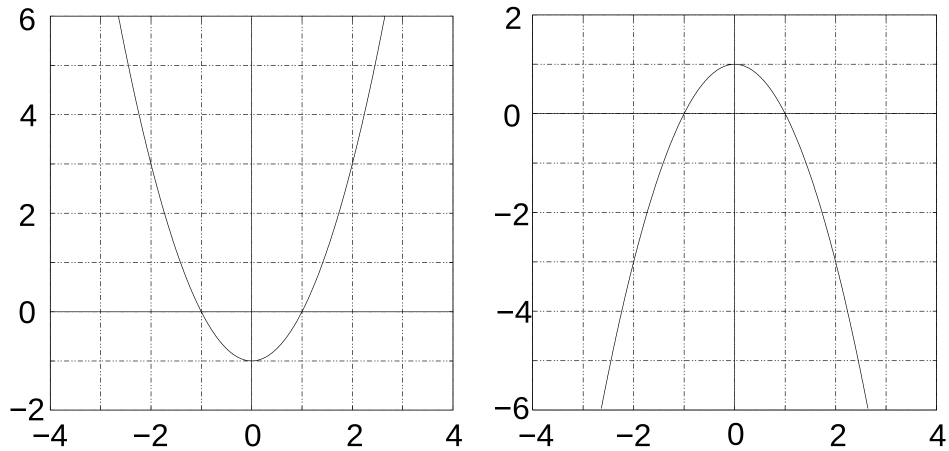
Punkten x_0 *kallas* **globalt maximiställe.** *Funktionen antar för* $x_0 \in D_f$ *sitt* **globala minimivärde** *om det för varje* $x \in D_f$ *gäller att*

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Punkten x_0 *kallas* **globalt minimiställe.**

Anmärkning 8.67 *Lägg märke till att definitionen av ett globalt extremvärde är mycket lik definitionen av ett lokalt extremvärde. Skillnaden är dock, som namnet säger, att ett globalt maximivärde är det största värde som* en given funktion överhuvudtaget antar*, medan definitionen av lokalt maximivärde bara talar om* en del av definitionsmängden*.*

Följande sats hjälper oss att hitta globala maximi- och minimivärden för en funktion på ett slutet intervall. Observera att vi söker efter lokala extrempunkter. Då intervallet är slutet måste vi också undersöka randextremvärden. De senare är ointressanta om randpunkterna inte tillhör definitionsintervallet.



Figur 8.16: Funktionen $f(x) = x^2 - 1$ (till vänster) har globalt minimivärde -1. Detta värde antas i det globala minimistället $x = 0$. Globalt maximivärde saknas, eftersom funktionen antar godtyckligt stora värden. Funktionen till höger är $f(x) = 1 - x^2$ och för den är situationen den omvända.

Sats 8.68 *Om funktionen f är kontinuerlig på $[a, b] = D_f$ fås globalt maximivärde och globalt minimivärde genom att välja det största resp. det minsta funktionsvärdet som fås i följande ställen:*

1. *Derivatans nollställen i intervallet $]a, b[$.*
2. *Intervallets ändpunkter*
3. *x-värden för vilka derivata saknas*

Anmärkning 8.69 *Om f inte är kontinuerlig, så måste man också undersöka diskontinuitetspunkterna. I dessa punkter är f dock ej heller deriverbar, så de hamnar egentligen också in under punkt tre.*

Exempel 8.70 *Bestäm globalt maximi- och minimivärde för funktionen $f(x)$ med definitionsmängden $D_f = [0,3]$.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 3x + 2, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Lösning:
Funktionen är kontinuerlig i punkten $x_0 = 1$ (och därmed på hela $\mathbf{R}$) eftersom:

$$\lim_{x \to 1^-} (x^2 + 2x - 3) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} (x^2 - 3x + 2) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$

$$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0.$$

Satsen ovan kan därför tillämpas. Globalt maximi- eller minimivärde finns i punkten $(x_0, f(x_0))$ där x_0 kan hittas i

1. *Derivatans nollställen.*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < 1 \\ 2x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

För $x < 1$ fås derivatans nollställe som lösningen till ekvationen

$$2x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \notin [0, 1[$$

För $x > 1$ fås derivatans nollställe som lösningen till ekvationen

$$2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2} \in]1, 3].$$

Vidare är

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4}.$$

2. *Ändpunkterna på intervallet.*

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$$

3. *För x-värden för vilka derivatan saknas.*

$$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0.$$

Globalt maximivärde är alltså 2 och globalt minimivärde är -3. Dessa antas för $x = 3$ respektive $x = 0$.

8.11.4 Extremvärdesproblem

Exempel 8.71 *Bestäm värdemängden för funktionen*

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

då $x > 0$.

Lösning:
I detta intervall är f *kontinuerlig. Eftersom*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

och

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \infty = +\infty$$

är funktionen obegränsad uppåt. Vi undersöker nu globala extremställen. De kan finnas i:

1. *Derivatans nollställen.*
$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{4}{x^2} = 1 \Longleftrightarrow x^2 = 4 \Longleftrightarrow x = \pm 2.$$
Eftersom $x > 0$ *gäller att den enda lösningen är* $x = 2$. *Värdet i punkten är* $f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$.

2. *Ändpunkterna tillhör inte definitionsintervallet.*

3. *Funktionen är kontinuerlig.*

4. *Derivatan existerar för varje* $x \in D_f$.

Eftersom

$$f''(x) = \frac{8}{x^3}$$

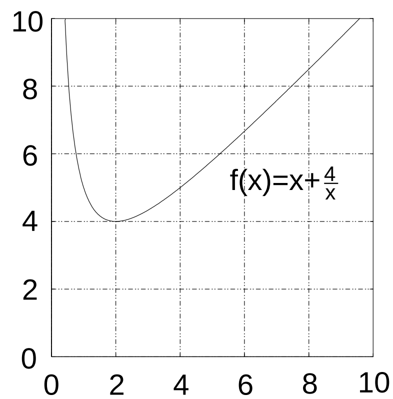
och

$$f''(2) = \frac{8}{8} = 1 > 0$$

gäller det att $x = 2$ *är ett lokalt minimiställe. (Detta kunde vi också ha sett ur en tabell över derivatans teckenväxling). Samtidigt utgör* $x = 2$ *ett globalt minimiställe, eftersom* f *ingenstans i* $\mathbf{R}_+$ *antar ett värde mindre än* $f(2) = 4$.

Eftersom talet 4 är globalt minimum och funktionen f *är kontinuerlig och obegränsad uppåt är värdemängden*

$$\underline{V_f = [4, \infty[}.$$



Figur 8.17: Funktionen $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $x > 0$.

Exempel 8.72 *Bestäm globalt maximivärde och minimivärde för*

$$f(x) = x^2 - |x|^3 \qquad -1 \le x < 2.$$

Lösning:
Eftersom

$$|x| = \begin{cases} x & , \ \textit{då } x \ge 0 \\ -x & , \ \textit{då } x < 0 \end{cases}$$

kan vi skriva

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 & , \ -1 \le x < 0 \\ x^2 - x^3 & , \ 0 \le x < 2 \end{cases}$$

Lokala extremvärden kan finnas i:

1. *Derivatans nollställen.*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3x^2 & , \ -1 < x < 0 \\ 2x - 3x^2 & , \ 0 < x < 2 \end{cases}$$

För $-1 < x < 0$ *har derivatan nollstället:*

$$2x + 3x^2 = 0 \iff x(2 + 3x) = 0 \iff (x = 0) \vee x = -\frac{2}{3}$$

Värdet i punkten $x = -\frac{2}{3}$ *är*

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

För $0 < x < 2$ *har derivatan nollstället:*

$$2x - 3x^2 = 0 \iff x(2 - 3x) = 0 \iff (x = 0) \vee x = \frac{2}{3}$$

Värdet för punkten $x = \frac{2}{3}$ är

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

2. *Intervallets ändpunkter:*

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1)^3 = 0$$

Funktionen är odefinierad i punkten $x = 2$. Vi bör ändå undersöka gränsvärdet då $x \to 2^-$.

$$\lim_{x\to 2^-}(x^2 - x^3) = 4 - 8 = -4.$$

3. *Diskontinuitetsställen saknas eftersom*

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 - x^3 = 0 = \lim_{x\to 0^-} x^2 + x^3 = 0 = f(0).$$

4. *Derivata saknas i punkten $x = 0$. Vi har från tidigare att $f(0) = 0$.*

Ur dessa punkter kan vi dra slutsatsen att globalt maximiställe fås för $x = \pm\frac{2}{3}$ och globalt maximivärde är $\frac{4}{27}$. Globalt minimivärde saknas, eftersom vi kan komma godtyckligt nära -4 genom att låta x närma sig 2 från vänster, men värdet -4 antas inte för något x i definitionsmängden.

Exempel 8.73 *Bestäm de värden på k för vilka funktionen*

$$f(x) = \frac{k}{3}x^3 - kx^2 + x - 1$$

är växande överallt.

Lösning:
Funktionen är definierad på hela $\boldsymbol{R}$. För att funktionen f skall vara växande på hela sin definitionsmängd bör $f' \geq 0$ för varje x. Bildar $f'(x)$:

$$f'(x) = kx^2 - 2kx + 1.$$

Denna bör nu vara större än eller lika med 0 för varje x. Vi löser alltså olikheten $f'(x) \geq 0$.

f' är kontinuerlig på $\mathbf{R}$, så vi behöver bara se till att f' inte korsar x-axeln och att $f'(x)$ antar ett positivt värde. (Kom ihåg att en kontinuerlig funktion inte kan byta tecken utan att passera värdet noll. Det är dock okej att derivatan tangerar *x-axeln.)*

Om $k = 0$, så är f' konstant och f därmed växande. Löser alltså ekvationen $f'(x) = 0$, $k \neq 0$:

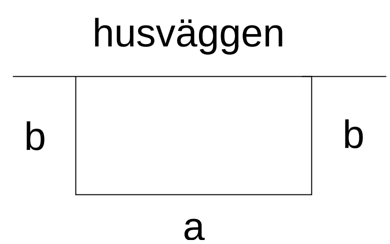
$$kx^2 - 2kx + 1 = 0 \iff x^2 - 2x + \frac{1}{k} = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{k}}$$

Vi ser att ekvationen har noll eller precis en lösning (dvs. f' korsar inte x-axeln) om och endast om $1-1/k \leq 0 \iff (k-1)/k \leq 0$. (Om vi har två olika nollställen, så byter derivatan tecken och då är funktionen inte monoton.) Låt oss alltså kräva att $0 < k \leq 1$.

Då $k > 0$, är f en rättvänd parabel och således ickenegativ, då vi har högst ett nollställe.

$$\therefore \text{Svar}: k \in [0, 1]$$

Exempel 8.74 *Vi har till vårt förfogande 20 meter staket och ska bygga en rektangulär hage åt hunden, så att vi använder husets vägg som hagens ena vägg. Hur långa ska sidorna vara, för att hagen ska bli så stor som möjligt? (Se figuren.)*



Lösning:
Det är klart att vi ska använda allt staket för att få hagen så stor som möjligt. Vi har alltså att

$$a + 2b = 20 \qquad \text{och} \qquad A = ab.$$

Vi kan uttrycka arean A som en funktion av kantlängden b:

$$A = ab = (20 - 2b)b \qquad \text{dvs.} \qquad A(b) = 20b - 2b^2, \quad 0 \leq b \leq 10.$$

Vår funktion A är nu deriverbar (och därför också kontinuerlig) i alla inre punkter i definitionsintervallet. $A(0) = A(10) = 0$, så vi bör rimligtvis hitta vårt globala maximum i derivatans nollställe. Vi söker detta.

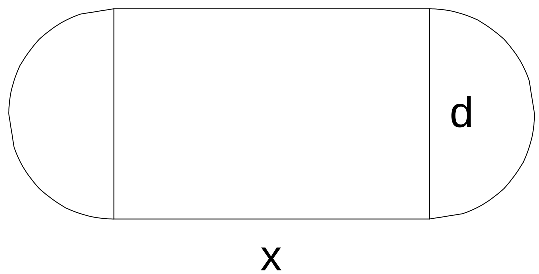
$$A'(b) = 20 - 4b \qquad \text{ger} \qquad A'(b) = 0 \textit{ omm } b = 5.$$

Vår enda kandidat till globalt maximum är alltså $b = 5$, vilket i sin tur ger $a = 20 - 2 \cdot 5 = 10$ och arean $A(5) = 50$ kvadratmeter.

$$\therefore \textit{Svar: } a = 10 \textit{ m och } b = 5 \textit{ m}.$$

Exempel 8.75 *Kring en rektangulär fotbollsplan byggs en löpbana som är 400 m lång. Kurvorna har formen av en halvcirkel. Hur stor är den största arean som fotbollsplanen kan anta?*

Lösning:



Vi betecknar långsidan med x och kortsidan med d. Arean av fotbolssplanen är:

$$A = x \cdot d.$$

Banan har längden 400 m. Långsidan har betecknats med x. Kurvorna har båda längden $\frac{d\pi}{2}$ eftersom de utgör halvorna i en cirkel med diametern d. Det bör nu gälla att:

$$2x + 2 \cdot \frac{\pi d}{2} = 400 \Longleftrightarrow x = \frac{400 - \pi d}{2}$$

Vi kan alltså skriva A som en funktion av d:

$$A(d) = x \cdot d = \left(200 - \frac{\pi d}{2}\right) d = 200d - \frac{\pi}{2} d^2, \qquad 0 \leq d \leq \frac{400}{\pi}.$$

Genom att derivera A m.a.p. d och söka nollställen kan vi hitta ett maximivärde.

$$A'(d) = 200 - \pi d$$

löser ekvationen

$$A'(d) = 0 \Longleftrightarrow 200 - \pi d = 0 \Longleftrightarrow d = \frac{200}{\pi}$$

Då funktionen är deriverbar och funktionsvärdena i intervallets ändpunkter är noll, fås inga andra kandidater, så den maximala arean är

$$A\left(\frac{200}{\pi}\right) = \frac{200^2}{\pi} - \frac{\pi}{2}\frac{200^2}{\pi^2} = \frac{200^2}{2\pi} = \frac{20000}{\pi} \approx 6370 m^2.$$