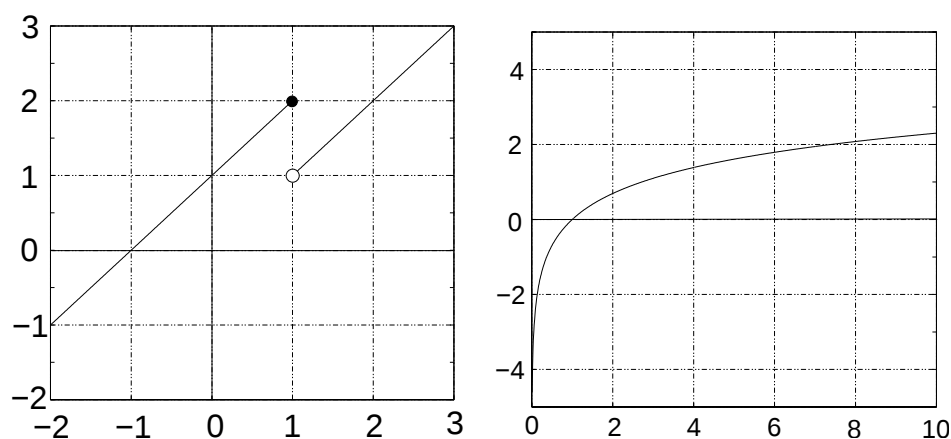


# Kapitel 7

## Kontinuitet

### 7.1 Definitioner

Vi har sett på olika typer av funktioner. Vi skall fortsätta att undersöka dem, men ur en ny synvinkel. Vår utgångspunkt är nu att försöka undersöka om de är *sammanhängande*. Om en kurva är sammanhängande säger man att funktionen är *kontinuerlig*<sup>1</sup>. Vi skall börja med att definiera kontinuitet i en punkt  $x_0$ .



Figur 7.1: Kurvan till vänster är ej sammanhängande, medan kurvan till höger är sammanhängande

---

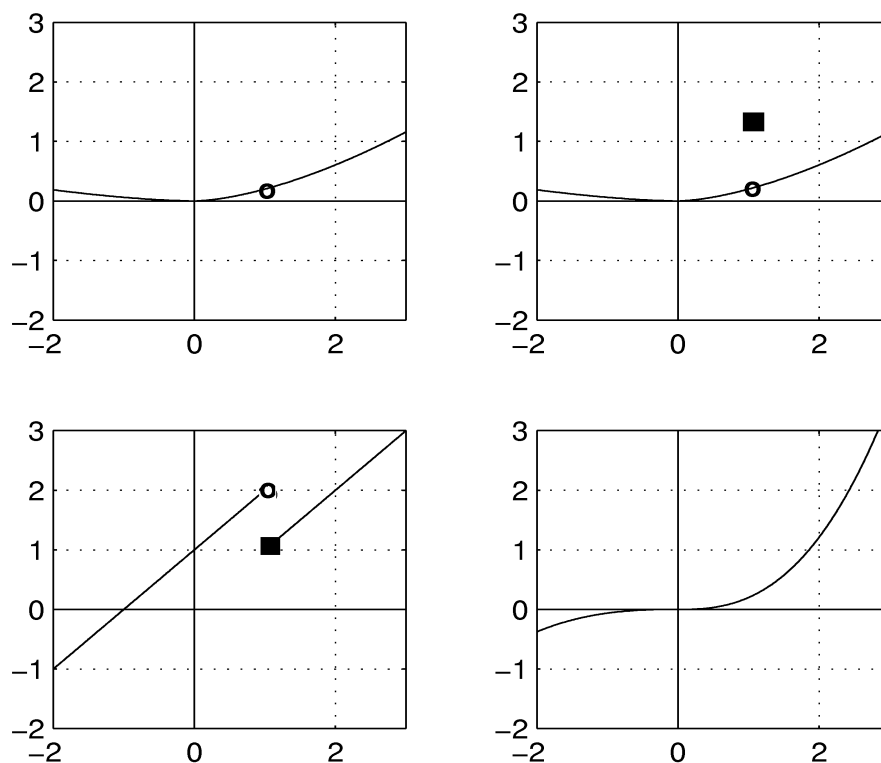
<sup>1</sup>Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 5

**Definition 7.1** Antag att funktionen  $f$  är definierad i ett öppet intervall runt  $x_0 \in \mathbf{R}$ . Funktionen  $f$  är då **kontinuerlig i punkten**  $x_0$ , om

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Annars är den **diskontinuerlig i punkten**  $x_0$ .

Detta innebär att för att en funktion skall vara kontinuerlig i en punkt  $x_0$  bör den vara definierad i punkten samt i en liten omgivning kring denna. Gränsvärdet bör existera och vara samma som funktionsvärdet. Om en funktion inte är kontinuerlig för  $x = x_0$  är den *diskontinuerlig* i punkten.



Figur 7.2: Av de ovanstående kurvorna är det bara kurvan nere till höger som är kontinuerlig i punkten  $x = 1$ . Den första är inte definierad i  $x = 1$ . Den andra kan göras kontinuerlig i  $x = 1$ , genom att flytta ner  $f(1)$  tillbaka, medan den tredje inte kan fås kontinuerlig.

På ett liknande sätt som vi definierade gränsvärde från höger och vänster kan vi definiera kontinuitet från höger och vänster.

**Definition 7.2** Funktionen  $f$  är **kontinuerlig från vänster** i  $x_0 \in D_f$ , om

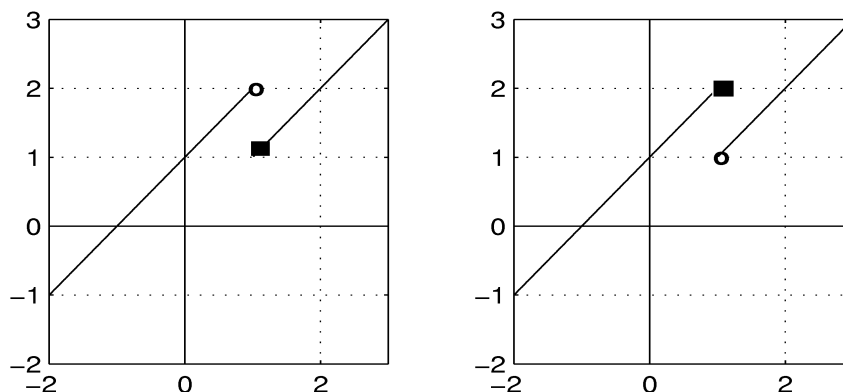
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

och **kontinuerlig från höger** i  $x_0 \in D_f$ , om

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Funktionen  $f$  är **kontinuerlig** i  $x_0$  om och endast om den är kontinuerlig både från vänster och höger, d.v.s. om

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$



Figur 7.3: Den första kurvan är högerkontinuerlig i punkten  $x = 1$  och den andra är vänsterkontinuerlig i punkten  $x = 1$ .

Hittills har vi sett på funktioner som är kontinuerliga i en punkt. Vi skall nu utvidga kontinuitetsbegreppet och definiera kontinuitet i ett intervall.

**Definition 7.3** En funktion är **kontinuerlig i intervallet**  $]a, b[$  om den är kontinuerlig för varje  $x_0 \in ]a, b[$ .

En funktion är **kontinuerlig i intervallet**  $[a, b]$  om den är kontinuerlig för varje  $x_0 \in ]a, b[$  samt högerkontinuerlig i  $a$  och vänsterkontinuerlig i  $b$ .

En funktion som är kontinuerlig på hela  $D$  är en **kontinuerlig funktion**.

Följande tumregel är nästan sann:

”Grafen av en kontinuerlig funktion är en sammanhängande kurva.”

**Exempel 7.4** Är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \leq 0 \\ x^2 - x & , x > 0 \end{cases}$$

kontinuerlig i  $x_0 = 0$ ?

*Lösning:*

Kravet för kontinuitet i punkten  $x_0$  är:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Vi undersöker:

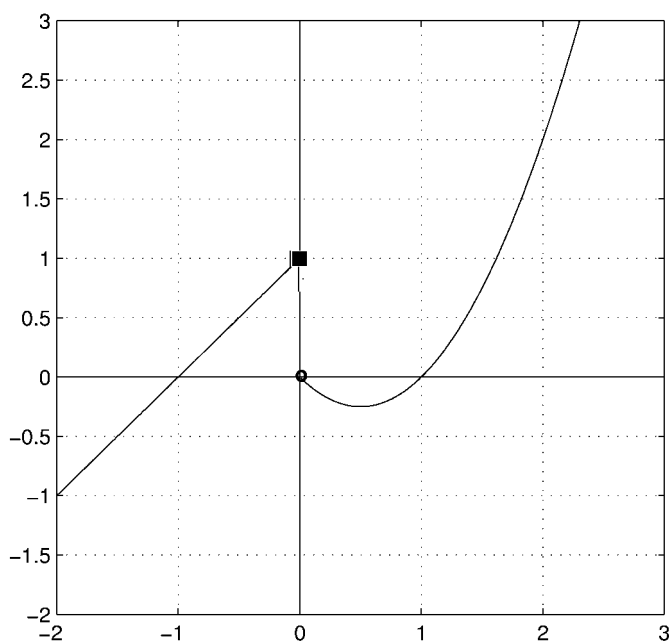
$$f(0) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 0 + 1 = 1 = f(0) \quad \therefore \text{v-kont}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0^2 + 0 = 0 \neq f(0) \quad \therefore \text{ej h-kont}$$

$\therefore$  funktionen är inte kontinuerlig i  $x = 0$ .

Funktionen är däremot nog vänsterkontinuerlig i  $x = 0$ . Vi ser att detta stämmer med grafen.



**Exempel 7.5** Bestäm  $a, b$  så att

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & , x < 1 \\ a & , x = 1 \\ x^2 + b & , x > 1 \end{cases}$$

är kontinuerlig i  $x = 1$ .

*Lösning:*

Eftersom det måste gälla att

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

kan vi sätta kravet

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 2) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + b) \iff$$

$$-1 + 2 = a = 1^2 + b \iff 1 = a = 1 + b,$$

vilket ger att  $a = 1$  och  $b = 0$ .

## 7.2 Satser om kontinuitet

Se Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 6.

**Sats 7.6** Antag att  $f(x)$  och  $g(x)$  är kontinuerliga funktioner med  $D_f = D_g$ . Då är följande funktioner kontinuerliga (på  $D_f = D_g$ ).

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x) \quad \text{och} \quad f(x) \cdot g(x).$$

**Bevis:**

Vi bevisar att den sista funktionen är kontinuerlig i alla  $x_0 \in D_f$ . Ta alltså godtyckligt  $x_0 \in D_f$ . Då  $f(x)$  är kontinuerlig i  $x_0$ , vet vi att  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existerar och att gränsvärdet är lika med  $f(x_0)$ . På motsvarande sätt är  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ . Klart att funktionen  $f(x) \cdot g(x)$  antar värdet  $f(x_0) \cdot g(x_0)$  i punkten  $x = x_0$ . Det återstår att konstatera, att

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = f(x_0) \cdot g(x_0).$$

Detta är dock sant, enligt räkneregel 3 för gränsvärden på sidan 132. (Vi antog ovan att  $x_0$  inte är en ändpunkt i  $D_f$ . Om så vore fallet, byter vi ut gr. v. mot motsvarande ensidiga gr. v.)

■

**Sats 7.7** Antag att  $g(x)$  är kontinuerlig i  $x_0$ .

1. Om också  $f(x)$  är kontinuerlig i  $x_0$ , så är  $f(x)/g(x)$  kontinuerlig i  $x_0$  om och endast om  $g(x_0) \neq 0$ .
2. Om  $f(x)$  är kontinuerlig i  $g(x_0)$ , så är  $(f \circ g)(x)$  kontinuerlig i  $x_0$ .

**Sats 7.8** Följande funktioner är kontinuerliga (på hela sin definitionsmängd):

1.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad D_f = \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}_+$$

2.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{där } p, q \text{ polynomfunktioner}$$

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{x \in \mathbf{R} \mid q(x) = 0\}$$

3.

$$f(x) = x^q \quad q \in \mathbf{Q}, D_f = \begin{cases} \mathbf{R}, & q \in \mathbf{Z} \\ \mathbf{R}_+ \cup \{0\}, & q \in \mathbf{Q}_+ \\ \mathbf{R}_+, & q \in \mathbf{Q}_- \end{cases}$$

4.

$$f(x) = a^x, a > 0 \quad D_f = \mathbf{R}$$

5.

$$f(x) = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1 \quad D_f = \mathbf{R}_+$$

6.

$$f(x) = \sin x \quad D_f = \mathbf{R}$$

7.

$$f(x) = \cos x \quad D_f = \mathbf{R}$$

8.

$$f(x) = \tan x \quad D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$$

9.

$$f(x) = |x| \quad D_f = \mathbf{R}$$

**Anmärkning 7.9** Enligt vår definition på kontinuitet, är tangensfunktionen kontinuerlig, men den är ju, som vi vet, inte helt "sammanhängande". Däremot gäller det att varje gren av tangensfunktionen (t.ex. för  $x$  som uppfyller  $-\pi/2 < x < \pi/2$ ) är sammanhängande.

Som satserna 7.6—7.7 ovan säger, så är också summor, differenser och produkter av funktionerna i sats 7.8 ovan kontinuerliga. (Ger att t.ex. punkt 1. med polynomen egentligen är överflödig.) Kvoterna blir också kontinuerliga där nämnaren är olik noll.

**Exempel 7.10** Eftersom  $f(x)$  i exempel 7.5 sammanfaller med polynom överallt utom för  $x = 1$ , så är  $x = 1$  den enda tänkbara diskontinuitetspunkten. Vi gjorde alltså  $f$  **kontinuerlig**, inte bara kontinuerlig i  $x = 1$ .

**Anmärkning 7.11** Definitionen på kontinuitet säger, att om  $f(x)$  är kontinuerlig i  $x_0$ , så är

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Vi kan använda detta för att flytta in gränsvärdesberäkning innanför funktioner.

**Exempel 7.12** Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + x}).$$

Lösning:

Vi förlänger med konjugatet:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \sqrt{4x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - \sqrt{4x^2 + x})(2x + \sqrt{4x^2 + x})}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + x)}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x}{2x + |x|\sqrt{4 + \frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x}{x \left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} \\ &= -\frac{1}{2 + \sqrt{4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2 + \sqrt{4 + 0}} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

För att komma till tredje raden använde vi att  $x$  är ett stort positivt tal, så  $|x| = x$  och på sista raden använde vi att  $g(t) = -1/(2 + \sqrt{4+t})$  är kontinuerlig i  $t = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} 1/x$  för att flytta in gränsvärdesbeteckningen i kvadratroten.

**Exempel 7.13** För vilka  $x$  är

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \ln x}$$

kontinuerlig?

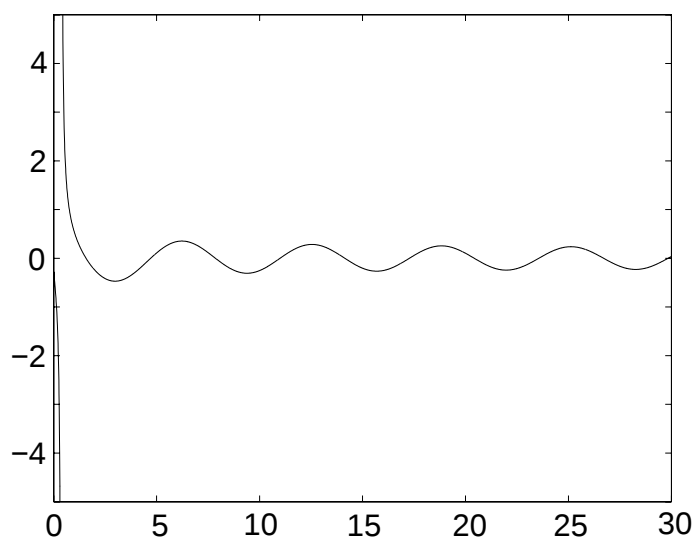
*Lösning:*

Vi börjar med att undersöka  $D_f$ .  $\ln x$  är definierad på  $\mathbf{R}_+$ . Nämnarens nollställen tillhör inte heller  $D_f$ . Dessa är:

$$1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff e^{\ln x} = e^{-1} \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Funktionen är alltså definierad på:

$$D_f = \mathbf{R}_+ \setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\}.$$



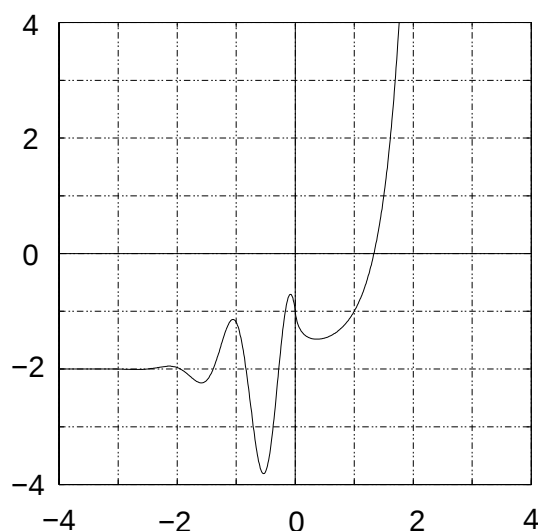
Figur 7.4: Figuren.  $f$  ser ut ungefär som  $1/(1 + \ln x)$  för  $x$  nära noll (ty  $\cos x \approx 1$  för små  $x$ ) och då vi går längre mot höger så blir funktionskurvan en svagt dämpad cosinuskurva, som faktiskt dör ut till sist ( $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ).

Konstanten 1 kan uppfattas som en polynomfunktion av grad noll och är därför kontinuerlig på  $\mathbf{R}$ , speciellt på  $D_f$ .  $\ln x$  är kontinuerlig på  $D_f$ , så summan av dessa två är kontinuerlig.  $\cos x$  är också kontinuerlig på  $D_f$ .  $f(x)$  är kontinuerlig (på  $D_f$ ), eftersom nämnaren i kvoten är olik noll överallt i  $D_f$ .

**Sats 7.14** Satsen om mellanliggande värden. Antag att funktionen  $f(x)$  är kontinuerlig på intervallet  $I$  och att  $f$  på detta intervall antar värdena  $p$  och  $q$ ,  $p < q$ . Då antar  $f$  på  $I$  alla värden i  $[p, q]$ .

Speciellt gäller det, att om  $f$  är kontinuerlig i  $[a, b]$ ,  $f(a) < 0$  och  $f(b) > 0$ , så finns det ett  $x_0$  i  $]a, b[$ , sånt att  $f(x_0) = 0$ , dvs. ekvationen  $f(x) = 0$  har (minst) en lösning i  $]a, b[$ .

**Anmärkning 7.15** En tolkning av denna sats är, att en funktion som är kontinuerlig på ett intervall inte kan byta tecken på intervallet utan att anta värdet 0. Vår metod för lösning av olikheter baserar sig på detta resultat.



Figur 7.5: En kontinuerlig funktion kan inte byta tecken utan att passera funktionsvärdet 0.

**Exempel 7.16** Bevisa att ekvationen  $\sin x + x - 1 = 0$  har åtminstone en reell lösning.

*Lösning:*

Funktionen  $f(x) = \sin x + x - 1$  är kontinuerlig. Vi har t.ex.

$$f(0) = \sin 0 + 0 - 1 = -1 < 0$$

och

$$f(\pi) = \sin \pi + \pi - 1 = \pi - 1 > 0.$$

Eftersom funktionen är kontinuerlig på  $[0, \pi]$ , så antas varje värde mellan  $-1$  och  $\pi - 1$ , speciellt värdet noll. Således existerar ett nollställe i intervallet  $]0, \pi[$ .

■

**Exempel 7.17** Funktionen  $f$  är kontinuerlig och satisfierar överallt i intervallet  $0 \leq x \leq 1$  olikheten  $0 < f(x) < 1$ . Visa att det existerar ett tal  $0 < a < 1$ , så att  $f(a) = a$ .

*Lösning:*

Bilda funktionen  $g(x)$  enligt

$$g(x) = f(x) - x.$$

Det gäller att  $g(x)$  är kontinuerlig på  $0 \leq x \leq 1$ . För  $g(0)$  gäller att

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$$

eftersom  $f(x) > 0$  i intervallet. För  $g(1)$  gäller det att:

$$g(1) = f(1) - 1 < 0$$

eftersom  $f(x) < 1$ . Eftersom  $g$  är kontinuerlig och byter tecken i intervallet  $[0, 1]$  måste det existera en punkt där  $g$  antar funktionsvärdet 0. Kalla denna punkt  $a$ . Då gäller att:

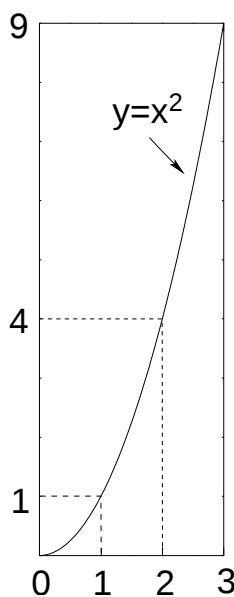
$$0 = g(a) = f(a) - a \iff f(a) - a = 0 \iff f(a) = a.$$



### 7.3 Kontinuerlig funktion i ett slutet intervall

Vi skall inledningsvis se på ett exempel som gör oss bekanta med begreppen *största* och *minsta värden*<sup>2</sup>.

**Exempel 7.18** Vilka värden antar funktionen  $f(x) = x^2$  i intervallet a)  $[1, 2]$ , b)  $[1, 2[$ , c)  $]1, 2]$  och d)  $]1, 2[$ ?



Figur 7.6:  $f(x) = x^2$ .

- a) Funktionen antar ett största värde  $f(2) = 4$  och ett minsta värde  $f(1) = 1$ .
- b) Funktionen antar ett minsta värde  $f(1) = 1$  men inget största värde.
- c) Funktionen antar ett största värde  $f(2) = 4$  men inget minsta värde.
- d) Funktionen antar varken största eller minsta värde.

**Sats 7.19** En kontinuerlig funktion på ett slutet intervall antar ett största värde och ett minsta värde i detta intervall.

**Anmärkning 7.20** Detta kan tyckas självklart, men det räcker med att inte ha ett slutet intervall för att påståendet inte ska gälla. Ta t.ex.  $f(x) = 1/x$ , som är kontinuerlig på  $]0, 1]$ . Funktionen antar inget största värde här, eftersom  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$ .

---

<sup>2</sup>Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 8

**Exempel 7.21** Vilka värden antar funktionen  $f(x) = \log_2(x+1)$  i intervallet  $[0, 3]$ ?

*Lösning:*

Funktionen är kontinuerlig på det slutna intervallet  $[0, 3]$ . Detta innebär att största och minsta värde existerar. Eftersom funktionen är strängt växande antar den sitt största värde i

$$f(3) = \log_2 4 = 2$$

och sitt minsta värde i

$$f(0) = \log_2 1 = 0.$$

**Anmärkning 7.22** Här kan man tycka att det var lätt att se att största och minsta värdet existerar, men vi har att resultatet gäller också för godtyckligt komplicerade kontinuerliga funktioner, också de som inte är monotona. Där kan största och minsta värdena antas också i någon inre punkt. (En inre punkt av ett intervall är en icke-ändpunkt i intervallet.)