

Kapitel 6

Gränsvärde

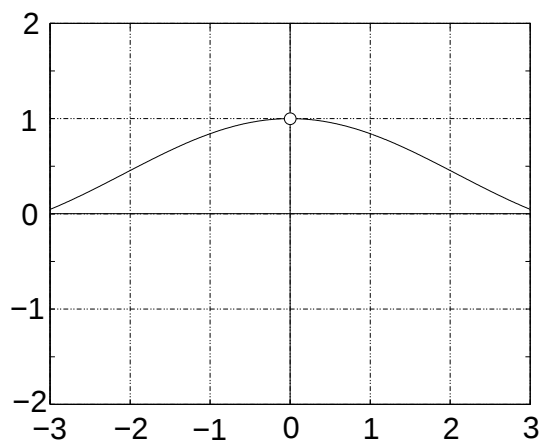
6.1 Definition av gränsvärde

När vi undersöker gränsvärdet¹ av en funktion undersöker vi vad som händer med funktionsvärdet då variabeln, x , går mot ett visst värde. Frågeställningen är alltså hur värdet av $f(x)$ uppför sig för x -värden nära punkten x_0 .

Exempel 6.1 Vi undersöker funktionen $f(x)$ för x -värden nära 0, då

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Direkt insättning skulle ge " $\frac{0}{0}$ ", vilket är odefinierat.



Figur 6.1: Funktionen $\frac{\sin x}{x}$.

¹Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 1

Ur grafen ser vi ändå att ju närmare x ligger värdet 0, desto närmare ligger funktionsvärdet $f(x)$ 1. Detta betecknas med

$$f(x) \rightarrow 1, \text{ då } x \rightarrow 0$$

eller

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Definition 6.2 En funktion sägs ha **gränsvärdet** a , då x går mot x_0 , om funktionsvärdena $f(x)$ hålls hur nära talet a som helst, så snart x väljs tillräckligt nära talet x_0 . Detta betecknas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ eller } f(x) \rightarrow a, \text{ då } x \rightarrow x_0.$$

6.2 Räkneregler för gränsvärden

Vi har följande räkneregler för gränsvärden, som vi inte bevisar, eftersom vår definition av gränsvärde är så vag och svår att arbeta med.²

Räkneregler 6.3 Antag i det följande att gränsvärdena $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existerar. Då gäller:

1.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

När man beräknar gränsvärden går det i många fall med direkt insättning. För alla polynomfunktioner, där x_0 inte är en ändpunkt i intervallet som bestämmer definitionsmängden kan man beräkna gränsvärdet med direkt insättning. Samma gäller de trigonometriska funktionerna, exponentialfunktionen, logaritmfunktionen och potensfunktioner.

²Oinas-Kukkonen Kurs 6 kapitel 2

Exempel 6.4 Gränsvärdet för funktionen $f(x) = x^3 - 4$ då $x \rightarrow 2$ beräknas enligt:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 4 = 2^3 - 4 = 4.$$

Ofta uppstår dock svårigheter när en funktion inte är definierad i den punkt x_0 där vi undersöker gränsvärdet. Vi skall i det följande se på några möjliga sätt att undersöka gränsvärdet trots att metoden med direkt insättning inte är möjlig. Det gemensamma för metoderna är att man försöker skriva om uttrycket i en sådan form att man kan tillämpa direkt insättning.

Antag att vi har ett rationellt uttryck med polynomfunktioner i nämnare och täljare. Om vidå med direkt insättning av $x = x_0$ erhåller det obestämda uttrycket " $\frac{0}{0}$ " vet vi enligt satsens om polynoms faktorisering att $x - x_0$ är en faktor i nämnare och täljare. Detta kan vi utnyttja genom att dividera nämnare och täljare med $x - x_0$, och därigenom få ett uttryck där den skenbara polen är bortförkortad.

Exempel 6.5 Vi ska illustrera standardmetoden för bestämning av rationella gränsvärden genom att beräkna

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x + 1}.$$

Lösning:

Direkt insättning ger det obestämda uttrycket " $\frac{0}{0}$ ". Täljaren har nollställena:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

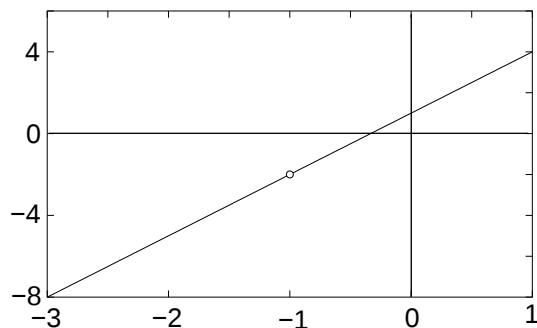
$$\therefore x = -\frac{1}{3} \vee x = -1.$$

Därigenom kan vi omskriva uttrycket ($x \neq -1$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x + \frac{1}{3})(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} 3x + 1 = -3 + 1 = -2 \end{aligned}$$

Anmärkning 6.6 Detta är standardmetoden för att beräkna gränsvärden för rationella funktioner, där direkt insättning ger " $\frac{0}{0}$ ". Ett annat knep man kan använda sig av är att skriva om problemet. Detta genom att:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h).$$



Figur 6.2: Funktionen $f(x) = (3x^2 + 4x + 1)/(x + 1)$. Dess funktionskurva sammanfaller med $y = 3x + 1$, förutom att $f(x)$ inte är definierad för $x = -1$.

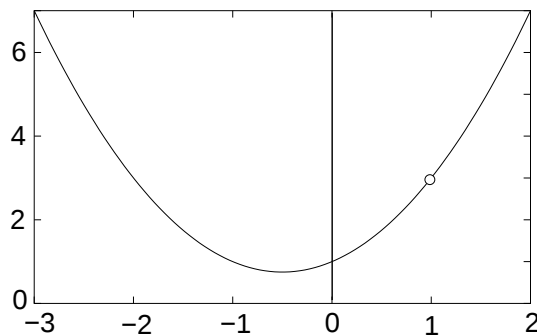
Exempel 6.7 Beräkna:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Lösning:

Insättning ger det odefinierade " $\frac{0}{0}$ ". Vi gör variabelbytet $x = h + 1$ och beräknar:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h + 1)^3 - 1}{(h + 1) - 1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^3 + 3h^2 + 3h + 1) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + 3h + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 3h + 3 = 0^2 - 0 + 3 = 3. \end{aligned}$$



Figur 6.3: En skiss av funktionen i exempel 6.7. Märk att funktionskurvan sammanfaller med en parabel överallt utom i $x = 1$, där den inte är definierad.

Man kan även använda konjugat- och kvadreringsregeln för att omformulera uttrycken. Vi ska nu illustrera standardmetoden för beräkning av gränsvärden som innehåller kvadratroter. I dessa fall lyckas man oftast beräkna gränsvärdet om man förlänger med kvadratroten konjugattal.

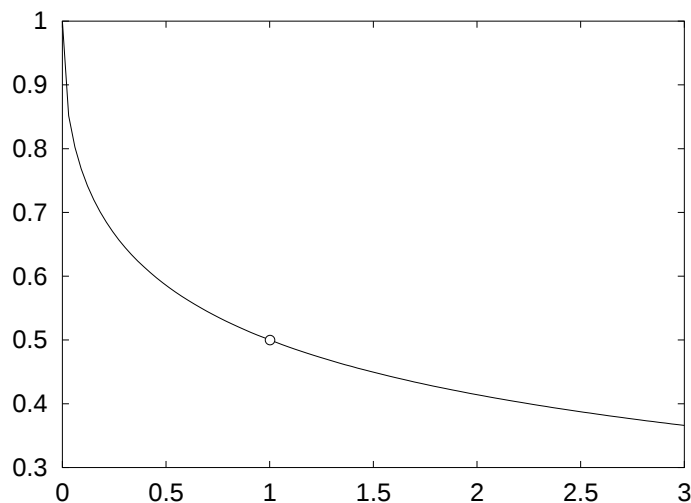
Exempel 6.8 *Beräkna:*

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

Lösning:

Insättning ger det odefinierade "0/0". Vi använder konjugatregeln för att skriva om uttrycket.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Eftersom det gäller att

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

kan man lösa följande problem.

Exempel 6.9 Beräkna:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

Lösning:

insättning av $x = 2$ ger det odefinierade ” $\frac{0}{0}$ ”. Omskrivning av täljaren enligt:

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

och nämnaren enligt

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

ger dock:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} &= \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3. \end{aligned}$$

Observera att i beräkningarna bör man ha med beteckningen $\lim_{x \rightarrow x_0}$ ända tills man använder direkt insättning. Det gäller alltså **inte** att:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}.$$

6.2.1 Gränsvärden för trigonometriska funktioner

När vi löser gränsvärden för trigonometriska funktioner³ använder vi ofta följande sats:

Sats 6.10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1 \quad \text{om} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Speciellt gäller att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

³Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 7

Exempel 6.11 *Bestäm*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

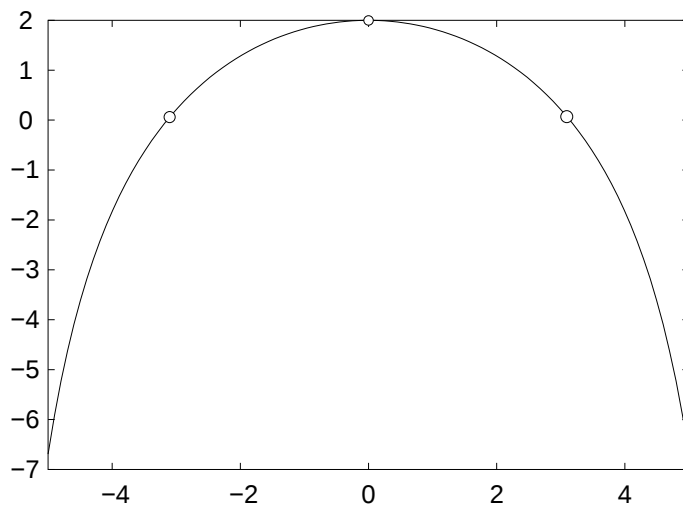
Lösning:

Insättning ger det obestämda ” $\frac{0}{0}$ ”. Vi skall försöka skriva om uttrycket. Eftersom

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

förlänger vi uttrycket, så att vi får ($x \approx 0$, så att $1 + \cos x \neq 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \sin x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x \cdot (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \cos x)}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \\ &= 1 \cdot (1 + \cos 0) = 1 \cdot (1 + 1) = 2 \end{aligned}$$



6.3 Ensidiga gränsvärden

Då vi undersöker gränsvärden undersöker vi vilket värde funktionsvärdet $f(x)$ närmar sig då x går mot en punkt x_0 . Det ska alltså sakna betydelse från vilket håll vi närmar oss. x kan ju närma sig x_0 både från höger och vänster. I många fall är det skillnad på om x går mot x_0 från höger eller vänster⁴.

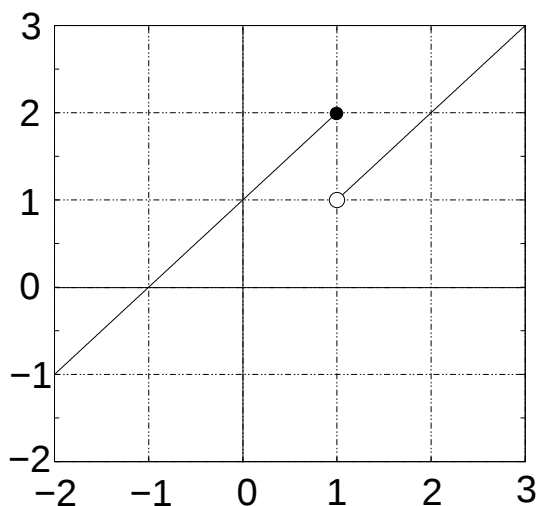
Exempel 6.12 *Funktionen*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \text{ då } x \leq 1 \\ x & , \text{ då } x > 1 \end{cases}$$

har gränsvärdet 2 då $x \rightarrow 1$ från vänster medan gränsvärdet är 1 då $x \rightarrow 1$ från höger. För att särskilja dessa fall har man infört följande beteckningar:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1.$$

Vi har att $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ inte existerar, eftersom vi får olika gränsvärden från höger och vänster.



Figur 6.4: Funktionen $f(x)$ "har olika gränsvärde" i $x_0 = 1$, beroende på om man kommer från höger eller vänster. Därför har den *inget* gränsvärde i x_0 .

⁴Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 6 kapitel 3

Definition 6.13 En funktion sägs ha **vänstergränsvärdet** a , då x går mot x_0 , om funktionsvärdena $f(x)$ hålls hur nära talet a som helst, så snart x ($x < x_0$) väljs tillräckligt nära talet x_0 . Att f 's vänstergränsvärde i x_0 är a betecknas med

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a.$$

Högergränsvärdet definieras på motsvarande sätt, dock så att $x > x_0$, och detta betecknas

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a.$$

Exempel 6.14 Funktionen

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

saknar gränsvärde då $x \rightarrow 0$ eftersom funktionen är definierad endast för $x \geq 0, x \neq 1$. Däremot gäller det att:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1.$$

Sats 6.15 Vi har att

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a.$$

Detta innebär att ett gränsvärde existerar om och endast om höger- och vänstergränsvärdena existerar och är lika.

Exempel 6.16 Existerar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ då

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - |x|}}{x} ?$$

Lösning:

För att gränsvärdet skall existera bör det gälla att:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Definitionsmängden för uttrycket är $-1 \leq x \leq 1, x \neq 0$. Detta eftersom det krävs att $1 - |x| \geq 0$. Direkt insättning av $x = 0$ ger det obestämda " $\frac{0}{0}$ ". Skriver om uttrycket genom att förlänga med konjugatet:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - |x|}}{x} = \frac{(1 - \sqrt{1 - |x|})(1 + \sqrt{1 - |x|})}{x(1 + \sqrt{1 - |x|})}$$

$$= \frac{(1 - (1 - |x|))}{x(1 + \sqrt{1 - |x|})} = \frac{|x|}{x(1 + \sqrt{1 - |x|})}$$

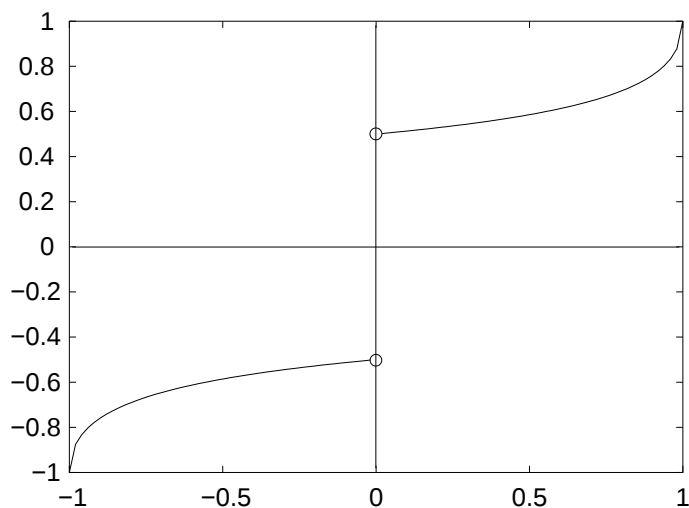
Vi kan alltså undersöka ($x > 0 \implies |x| = x$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x(1 + \sqrt{1 - |x|})} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 0}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

För $x < 0$ gäller det att $|x| = -x$ och

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{1 - (-x)})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + x}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{1}{2}$$

Höger- och vänstergränsvärdena är alltså olika och gränsvärde i punkten $x = 0$ existerar inte.



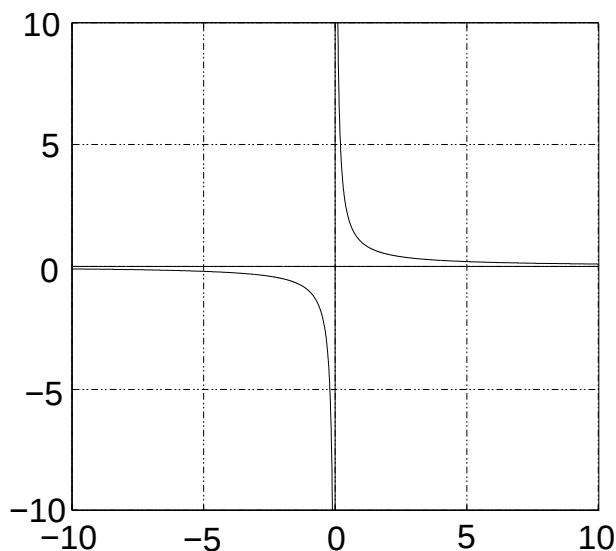
Figur 6.5: Funktionen $f(x)$ i exempel 6.16.

6.4 Oegentliga gränsvärden

Vi ska nu se på två speciella ”gränsvärden”.⁵

Exempel 6.17 Se på kurvan för funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$



Funktionen $f(x)$ är odefinierad i punkten $x = 0$. När $x \rightarrow 0^+$ närmar sig kurvan asymptotiskt positiva y -axeln, dvs. för små positiva värden på x närmar sig funktionskurvan y -axeln, så $f(x) \rightarrow +\infty$. Funktionsvärdena går mot $+\infty$. Då $x \rightarrow 0^-$ går funktionsvärdena mot $-\infty$. Vi säger att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Definition 6.18 En funktion f sägs ha det oegentliga gränsvärdet ∞ ($-\infty$), då $x \rightarrow x_0$ om funktionsvärdena $f(x)$ kan fås att hållas godtyckligt positivt (negativt) stora så snart x väljs tillräckligt nära talet x_0 . Detta betecknas med:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (-\infty) \quad \text{eller} \quad f(x) \rightarrow \infty \quad (-\infty) \quad \text{då } x \rightarrow x_0.$$

⁵Oinas Kukkonen m.fl Kurs 6 kapitel 4

Anmärkning 6.19 De oegentliga gränsvärdena är inga riktiga gränsvärden (därav namnet), utan bara ett bekvämt sätt att säga att en funktion "växer över alla gränser". Om man säger att en funktion har ett gränsvärde, så avses ett riktigt sådant, dvs. inte $\pm\infty$.

Vissa avser med $f(x) \rightarrow \infty$ att $f(x) \rightarrow \pm\infty$ och gör inte någon större skillnad mellan dessa två. Jag tycker själv också bättre om detta beteckningssätt, men vi kan här följa gymnasieversionen, dvs. den version som finns i definitionen.

Exempel 6.20 Man bör vara försiktig med hur man tolkar räkneregler för gränsvärden då man har med oegentliga gränsvärden att göra. Några exempel:

$$1. \infty \pm a = \infty \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

$$2. k \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & k > 0 \vee k = \infty \\ -\infty, & k < 0 \vee k = -\infty \end{cases} \quad \text{och} \quad k/0^\pm = \begin{cases} \pm\infty, & k > 0 \\ \mp\infty, & k < 0 \end{cases}$$

3. alla följande är odefinierade:

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0 \cdot \infty \quad \infty - \infty$$

Exempel 6.21 För $n \in \mathbf{Z}_+$ gäller det att:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty \text{ om } n \text{ är jämnt}$$

Om n är udda gäller det att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty.$$

Bevis:

(Delvist.) Vi bör visa t.ex. att funktionsvärdet kan fås godtyckligt stort då $x \rightarrow 0^+$. Ta godtyckligt $M \in \mathbf{R}_+$. Då gäller att

$$x \in \left] 0, \frac{1}{\sqrt[n]{M}} \right[\implies 0 < x^n < \frac{1}{M} \implies \frac{1}{x^n} > M$$

$\therefore f$ växer över alla gränser.

■

Exempel 6.22 Bestäm $a \in \mathbf{R}$ så att

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - ax + 1}{x - 1}$$

existerar (och är ändligt). Vilket är gränsvärdet?

Lösning:

För att gränsvärdet skall existera bör $x - 1$ vara en faktor i täljaren. (Varför?)

Då måste det gälla att $x = 1$ löser ekvationen:

$$2x^2 - ax + 1 = 0$$

Insättning av $x = 1$ ger:

$$2 - a + 1 = 0 \iff a = 3.$$

Vi skriver om uttrycket:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}.$$

Eftersom ekvationen $2x^2 - 3x + 1 = 0$ har lösningarna

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \quad \therefore \quad x = 1 \vee x = \frac{1}{2}.$$

kan vi skriva

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - ax + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Alternativ lösning:

För att gränsvärdet skall existera bör $x - 1$ vara en faktor i täljaren. Eftersom det för rötterna x_1, x_2 i ekvationen

$$c_1x^2 + c_2x + c_3 = 0$$

gäller att

$$x_1 + x_2 = -\frac{c_2}{c_1} \quad \text{och} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c_3}{c_1}$$

bör det för x_2 gälla att (givet att $x_1 = 1$) gälla att:

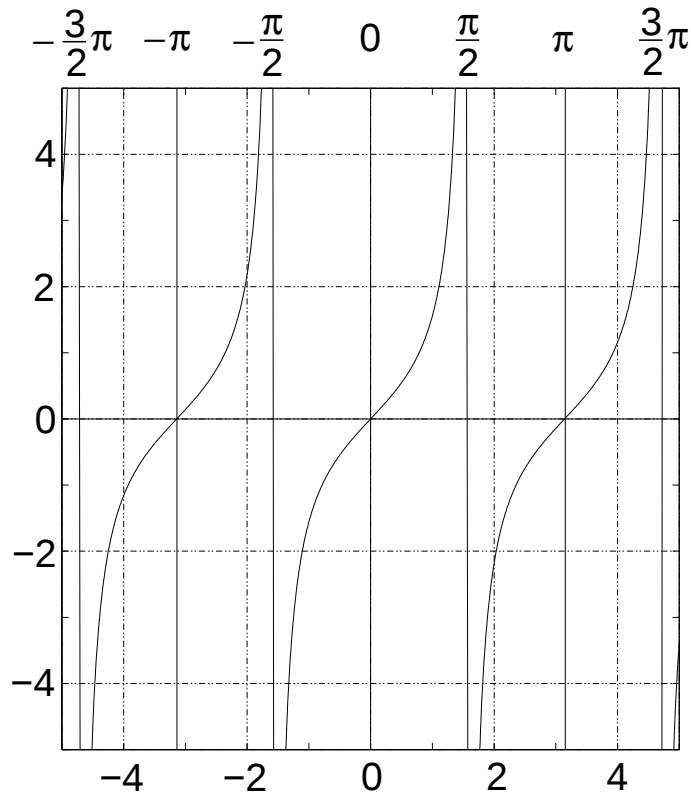
$$x_2 = -\frac{-a}{2} - 1 \quad \text{och} \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Vi kan nu lösa ut a genom att sätta de båda uttrycken lika:

$$\frac{a}{2} - 1 = \frac{1}{2} \iff a = 3.$$

Därefter fortsätter vi som ovan.

Exempel 6.23 Se på grafen av funktionen $f(x) = \tan x$.



Figur 6.6: Funktionen $f(x) = \tan x$.

Det gäller $\forall n \in \mathbf{Z}$ att

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2 + n\pi^-} \tan x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2 + n\pi^+} \tan x = -\infty.$$

Exempel 6.24 Se på grafen av funktionen $f(x) = \ln x$.

För logaritmfunktionen $\log_a x$, $a > 1$ gäller det att

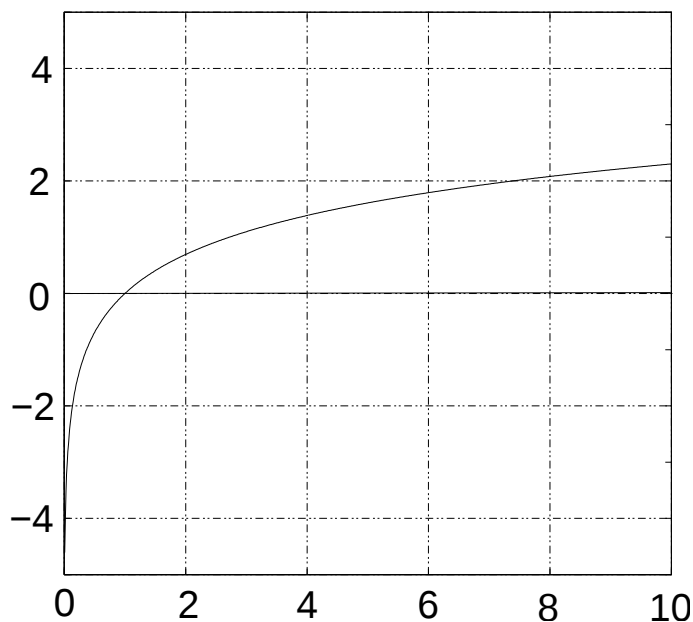
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty.$$

Om $a \in]0, 1[$ så är $1/a > 1$ och $\ln(1/a) = -\ln a$, så

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = -\frac{\ln x}{\ln(1/a)} = -\log_{1/a} x.$$

Då fås alltså

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty.$$

Figur 6.7: Funktionen $f(x) = \ln x$.

6.5 Gränsvärden då x går mot $\pm\infty$.

Nedanstående hittas i Oinas-Kukkonen Kurs 6 kapitel 9.

Exempel 6.25 *Se på funktionens*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

graf nedan. I denna sektion undersöks vad som händer med funktionsvärdena då x blir stort, dvs. $x \rightarrow \pm\infty$.

Funktionsvärdena för $f(x)$ närmar sig talet 0 då x -värdena går mot $+\infty$. Motsvarande resultat fås då x går mot $-\infty$. Detta skriver vi som:

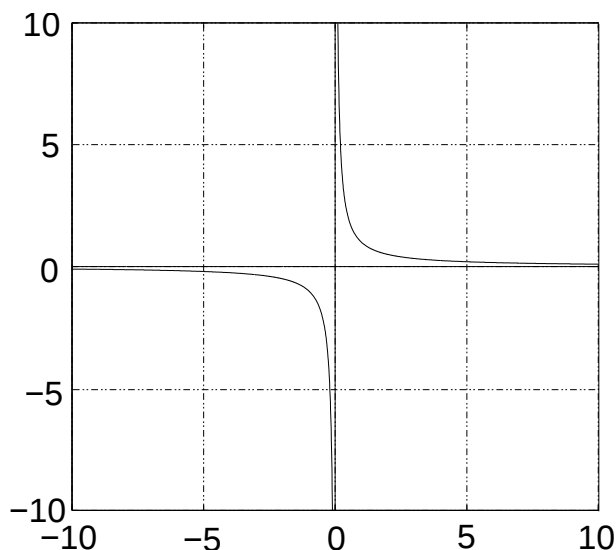
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Anmärkning 6.26 Dessa gränsvärden är egentliga, så länge de är $\neq \pm\infty$.

Då vi beräknar gränsvärden då $x \rightarrow \pm\infty$ för rationella uttryck, förkortar man uttrycket med en faktor av samma gradtal som nämnaren. Minns att

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^n} = 0,$$

där c är en konstant och $n > 0$.



Figur 6.8: Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ antar mindre värden ju längre x är från origo.

Exempel 6.27 Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x + 1}$$

Lösning:

Vi bryter ut ett x ur både nämnare och täljare.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{1}{x})} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = \underline{2} \end{aligned}$$

I ett uttryck av formen

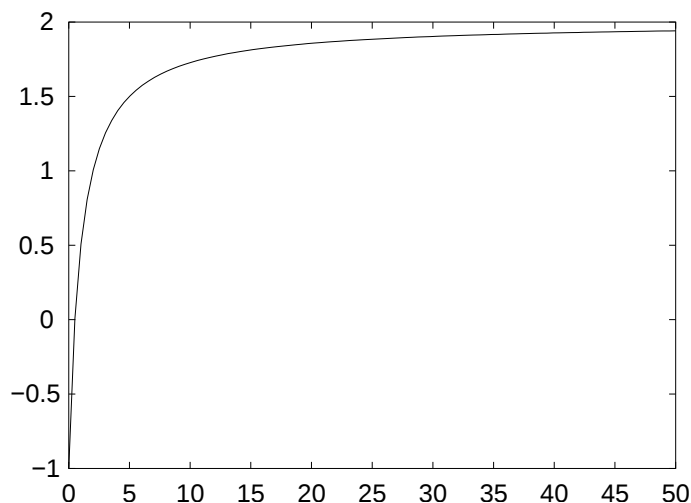
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x)$$

kan man beräkna gränsvärdet om $g(x) \rightarrow a \neq 0$ och $f(x) \rightarrow \infty$. Gränsvärdet för $f \cdot g$ är då $\pm\infty$. Antag att $n \in \mathbf{Z}_+$ är jämnt. Då gäller det att:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \infty$$

Om n är udda gäller det att:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty \text{ och } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty.$$

Figur 6.9: $f(x) = (2x - 1)/(x + 1)$ **Exempel 6.28** *Beräkna*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^4 - 5x^3 + x + 3).$$

*Lösning:**Bryter ut x upphöjt i gradtalet.*

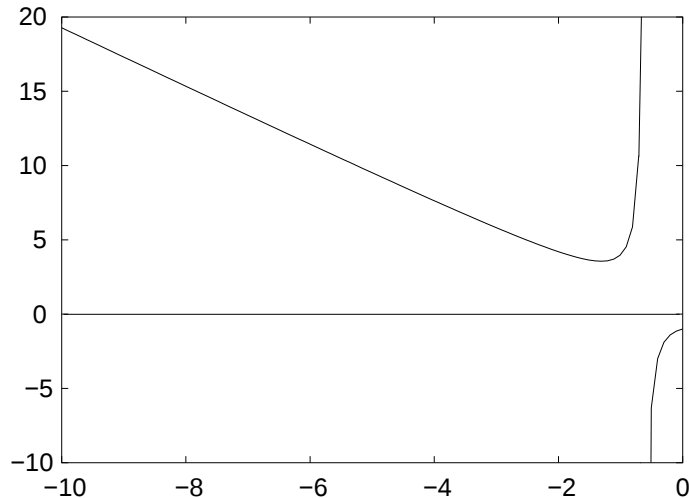
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^4 - 5x^3 + x + 3) \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(-1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right) = -\infty \end{aligned}$$

Exempel 6.29 *Beräkna*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{1 + x - x^2}.$$

*Lösning:**Bryter ut x^2 eftersom gradtalet för nämnaren är två.*

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(2x - 1 - \frac{1}{x^2})}{x^2(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1)} \\ & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} \\ & = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} - 1} = \infty \end{aligned}$$



Vi kan sammanfatta resultaten i en sats:

Sats 6.30 *En rationell funktion*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom av graden p resp. q . har då $x \rightarrow \infty$ eller $x \rightarrow -\infty$

1. Gränsvärdet 0 om $p < q$.
2. Gränsvärdet $\frac{a}{b}$ (där a och b är koefficienterna framför termerna med gradtalet p i täljaren resp. nämnaren) om $p = q$.
3. Det oegentliga gränsvärdet ∞ eller $-\infty$ om $p > q$.

För $\log_a x$ och a^x gäller det att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ om $a > 1$. Om däremot $0 < a < 1$ gäller det att $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$. Funktionerna $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ och $\cot x$ saknar gränsvärde då $x \rightarrow \infty$. (Därför saknar till exempel $\sin(1/x)$ gränsvärde då $x \rightarrow 0$.)

Exempel 6.31 *Beräkna:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 4^x}{4^x + 2^x}.$$

Lösning:

Vi bryter ut den term som dominerar för stora x i nämnaren.

$$\frac{3^x + 4^x}{4^x + 2^x} = \frac{4^x \left(\frac{3^x}{4^x} + 1 \right)}{4^x \left(1 + \frac{2^x}{4^x} \right)} = \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^x + 1}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^x} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^x + 1}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^x} = \frac{0 + 1}{1 + 0} = 1.$$