

# Kapitel 3

## Analytisk geometri

Målet med detta kapitel är att göra läsaren bekant med ekvationerna för linjen, cirkeln samt ellipsen.

### 3.1 Linjens ekvation med riktningskoefficient

Vi utgår från ekvationen<sup>1</sup>

$$y = kx + l$$

där  $k$  och  $l$  är konstanter och  $x$  är variabel. Vi skall i den här sektionen se på innebörden av de olika konstanterna samt presentera några formler för att bestämma dessa.

På följande sida finns en bild av linjen  $y = 3x + 2$ . Där är alltså  $k = 3$  och  $l = 2$ .

Konstanten  $k$  kallas *riktningskoefficient*. Den bestämmer lutningen på linjen. Om  $k < 0$  är linjen fallande. Om  $k > 0$  är linjen stigande. Ju större värde  $k$  har desto brantare stiger eller faller linjen. För  $k = 0$  har vi en vågrät linje. För en linje som är lodrät är  $k$  odefinierat. Intuitivt kan man tänka sig att en sådan linje stiger eller faller oändligt brant, vilket gör att  $k$  skulle anta  $\pm\infty$  vilket inte är reellt.

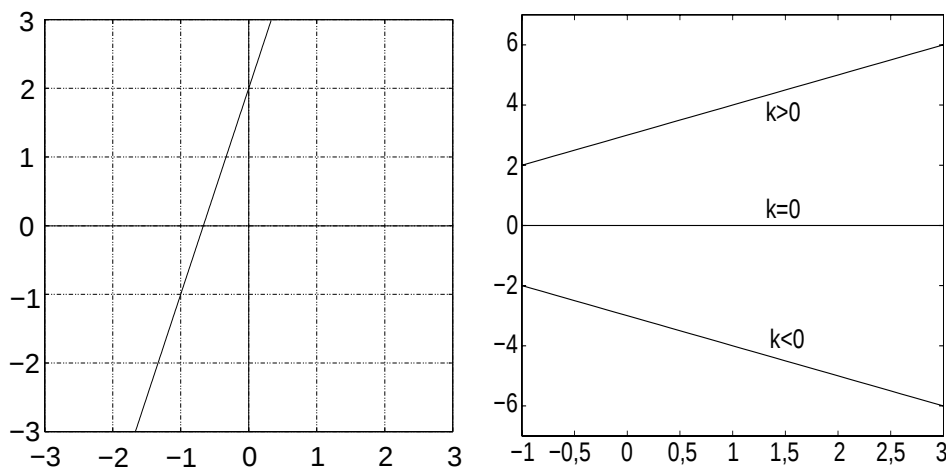
Konstanten  $l$  anger i vilken punkt linjen skär  $y$ -axeln. Detta betyder att konstanterna  $k$  och  $l$  entydigt bestämmer linjens placering i koordinatsystemet. Vi kan nu sammanfatta detta:

**Definition 3.1** *Ekvationen för en linje i standardform, som har riktningskoefficienten  $k$  och skär  $y$ -axeln i punkten  $(0, l)$  är*

$$y = kx + l.$$

---

<sup>1</sup>Oinas-Kukkonen, Kurs 4 kapitel 2-3



Figur 3.1: Till vänster linjen  $y = 3x + 2$  och till höger linjens lutning för olika värden på riktningskoefficienten.

Om vi känner till en punkt som linjen går genom samt riktningskoefficienten, så räcker detta till för att bestämma linjen entydigt.

**Definition 3.2** *Ekvationen för en linje i **enpunktsform**, som har riktningskoefficienten  $k$  och går genom punkten  $(x_0, y_0)$  är*

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Vi skall nu även se på specialfallen med en vågrät linje och en lodrät linje. Den lodräta linjen som skär  $x$ -axeln i punkten  $x_0$  har ekvationen (fås ej ur standardformen):

$$x = x_0$$

Den vågräta linjen som skär  $y$ -axeln i punkten  $y_0$  har ekvationen (ta  $k = 0$  i standardformen):

$$y = y_0$$

**Exempel 3.3** *Vilken ekvation har den räta linje som går genom punkten  $(3, -4)$  och vars riktningskoefficient är*

$$a) -\frac{1}{4} \quad b) 0$$

*Lösning:*

*Vi använder enpunktsformen. I a-fallet blir ekvationen*

$$y - (-4) = -\frac{1}{4}(x - 3) \iff y = -\frac{x}{4} - \frac{13}{4}.$$

I b-fallet är  $k = 0$ . Detta ger:

$$y = -4.$$

Detta kan vi också sluta oss till ur formeln för en vågrät linje.

Vi diskuterade att vi utgående från ett känt värde på riktningskoefficienten samt en punkt kan bestämma linjens ekvation. Rent intuitivt borde man utgående från två punkter på linjen kunna bestämma linjens ekvation. Känner man till två punkter och drar en linje genom dessa är linjen entydigt bestämd. Vi kan bestämma riktningskoefficienten ur de punkter som linjen går genom. För linjen som går genom punkterna  $(x_1, y_1)$  och  $(x_2, y_2)$  där  $x_1 \neq x_2$  fås riktningskoefficienten<sup>2</sup>:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Utgående från denna och enpunktsformeln kan vi bestämma linjens ekvation.

**Exempel 3.4** Linjen som går genom punkterna  $(-3, -4)$  och  $(-5, -2)$  har ekvationen:

$$y - (-4) = \frac{-2 - (-4)}{-5 - (-3)}(x - (-3)) \iff y = -x - 7$$

Ofta skriver man inte linjens ekvation i standardform, utan i *allmän form*.

**Definition 3.5** Ekvationen för linjen skrivs i **allmän form**

$$ax + by + c = 0$$

där  $a, b, c \in \mathbf{R}$  och  $a$  och  $b$  inte båda är lika med noll.

**Anmärkning 3.6** Här fås alltså lodräta linjer som det specialfall, då  $b = 0$ . För  $b \neq 0$  fås standardformen genom att dividera ekvationen med  $b$  och flytta över allt utom  $y$  till högra sidan.

Om en linje i normalform inte är lodrät har den alltså riktningskoefficienten

$$-\frac{a}{b}.$$

---

<sup>2</sup>Vi använder enpunktsformeln och det faktum att den räta linjen ska gå genom  $(x_2, y_2)$ . Sedan löser vi ut  $k$ .

### 3.1.1 Parallella och ortogonala linjer

Att två linjer är parallella innebär att de har samma riktning. För att detta villkor skall vara uppfyllt måste deras riktningskoefficienter  $k_1$  och  $k_2$  vara desamma:

$$k_1 = k_2.$$

Två lodräta linjer (som inte har något riktningskoefficient) är naturligtvis också parallella.

Två parallella linjer har gemensamma punkter om och endast om de sammanfaller. Två parallella linjer, som inte sammanfaller korsar varandra således aldrig.

**Exempel 3.7** Bestäm ekvationen för den linje, som går genom punkten  $(-2, 3)$  och är parallell med linjen  $2x + 3y + 6 = 0$ .

*Lösning:*

Eftersom linjen  $2x + 3y + 6 = 0$  kan skrivas på formen

$$y = -\frac{2}{3}x - 2$$

fås att  $k = -\frac{2}{3}$ . Nu kan ekvationen genom punkten  $(-2, 3)$  bestämmas utgående från enpunktsformeln:

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x - (-2)) \iff 2x + 3y - 5 = 0$$

Alternativ lösning:

Man inser att alla linjer på formen  $2x + 3y + c = 0$  är parallella med den givna linjen, ty förhållandet  $k$  mellan  $a$  och  $b$  är detsamma. Om linjen ska gå genom punkten  $(-2, 3)$ , så fås direkt genom insättning att

$$2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + c = 0 \iff c = -5.$$

Att två linjer är *ortogonala* innebär att de står *rätvinkligt* mot varandra. Vinkeln mellan dem är  $90^\circ$ . Detta villkor är uppfyllt om och endast om det gäller för linjernas riktningskoefficienter  $k_1$  och  $k_2$  att

$$k_1 k_2 = -1.$$

(En vågrät och en lodrät linje är också ortogonala, eftersom de står i  $90^\circ$  vinkel till varandra. I det fallet har den ena riktn. koeff. 0 och den andra saknar riktn. koeff.)

**Exempel 3.8** Avgör om de två räta linjerna  $L_1$  och  $L_2$  är ortogonala, då  $L_1$  ges av  $x_1 + 2y_1 - 3 = 0$  och  $L_2$  ges av  $3x_2 + 6y_2 - 3 = 0$ .

*Lösning:*

Ingen av dem är lodrät, eftersom  $b_1 = 2$  och  $b_2 = 6$ . Vi räknar ut riktningskoefficienterna  $k_1 = -a_1/b_1 = -1/2$  och  $k_2 = -3/6 = -1/2$ .

Vi ser att  $k_1 k_2 = (-1/2)^2 = 1/4 \neq -1$ , så linjerna är inte ortogonala. Däremot har de samma riktningskoefficient, så de är parallella.

## 3.2 Cirkels ekvation

**Definition 3.9** En cirkel är mängden av de punkter i planet vilkas avstånd till en given punkt  $A$  är konstant  $= r$ . Punkten  $A$  är cirkels **medelpunkt** och avståndet  $r$  är cirkels **radie**.

**Sats 3.10** En cirkel med radien  $r$  och medelpunkten  $(x_0, y_0)$  har ekvationen:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Ett specialfall är cirkeln med mittpunkten i origo, vars ekvation är:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

**Exempel 3.11** Ekvationen för cirkeln med medelpunkt i origo och radien 7 har ekvationen  $x^2 + y^2 = 49$ .

**Definition 3.12** Cirkels ekvation är i **allmän form**

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

där  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

**Anmärkning 3.13** Alla  $a$ ,  $b$  och  $c$  i definitionen ovan ger inte en cirkel. Vi måste få någonting positivt i högerledet  $r^2$ , eftersom radien för en cirkel i kvadrat aldrig kan bli negativ.

**Exempel 3.14** Rita grafen för ekvationen

$$x^2 + y^2 - 6x + y + 7 = 0.$$

*Lösning:*

Vi försöker få ekvationen på formen som presenteras i satsen genom att flytta termer och kvadratkomplettera.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + y + 7 = 0 &\iff x^2 - 6x + y^2 + y = -7 \\ &\iff x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad = -7 + 3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\iff (x - 3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\ &\iff (x - 3)^2 + \left(y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Cirkeln har medelpunkten  $(3, -1/2)$  och radien  $3/2$ .

### 3.3 Ellipsens ekvation

En ellips kan man beskriva som en "oval cirkel".

**Definition 3.15** En kurva, vars ekvation kan skrivas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

där  $a, b > 0$  kallas en **ellips**.

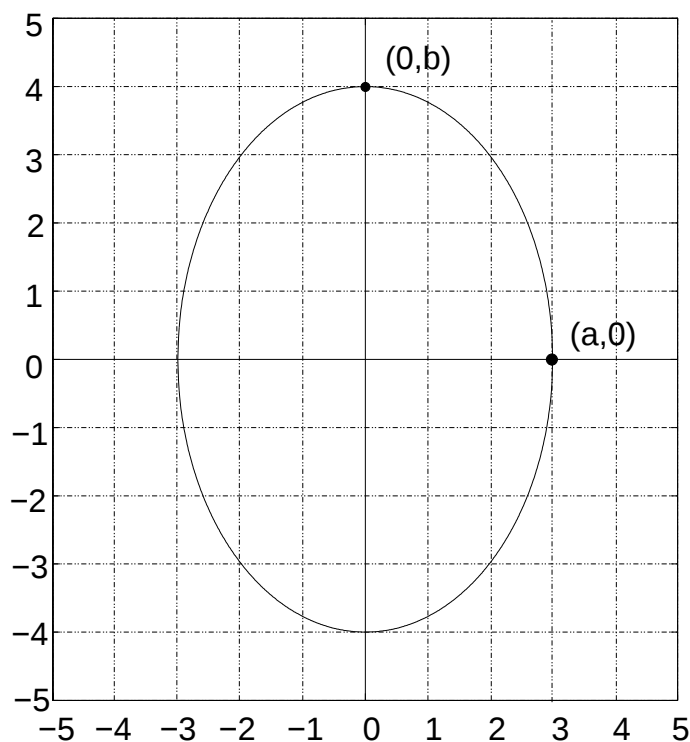
Ellipsen har medelpunkt i origo. Den skär  $x$ -axeln i punkterna  $(\pm a, 0)$  och skär  $y$ -axeln i  $(0, \pm b)$ .

**Exempel 3.16** Kurvan

$$4x^2 + 3y^2 = 12$$

är en ellips, eftersom

$$4x^2 + 3y^2 = 12 \iff \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \iff \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$



Figur 3.2: Ellipsen  $x^2/3^2 + y^2/4^2 = 1^2$ .

Som man ser på formeln för en ellips, är den egentligen en cirkel, med omskalade koordinataxlar. Vi "töjer ut" (eller "klämmer ihop") en enhetscirkel längs med koordinataxlarna, så att den går genom punkterna  $(\pm a, 0)$  och  $(0, \pm b)$ , istället för  $(\pm 1, 0)$  och  $(0, \pm 1)$ .

Vi kan lätt flytta ellipsens mitt till punkten  $(x_0, y_0)$  genom att skriva den på följande form.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Om vi däremot vill ha en icke-axelparallell ellips krävs större förändringar. (Vi töjer längs två vinkelräta axlar, andra än koordinataxlarna.