

Kapitel 2

Ekvationer och olikheter

I kapitlet bekantar vi oss med första och andra grads linjära ekvationer och olikheter. Vi ser också på ekvationer och olikheter med absolutbelopp och kvadratrötter. När vi löser ekvationer¹ är tillvägagångssättet alltid det att vi försöker hyfsa uttrycket så att man kan se vilken lösningen är.

Våra problemställningar innehåller uttryck med en *obekant variabel*, oftast x . Dessa obekanta kan ofta inte anta vilka värden som helst, utan vi måste begränsa oss till någon viss mängd av parametervärden och/eller värden på den obekanta.

Definitionsmängden D är den mängd för våra parametervärden och värden på obekanta variabler, för vilka vårt problem är meningsfullt, dvs. kan definieras.

De värden i D som uppfyller ekvationen eller olikheten bildar *lösningsmängden* L .

Vi kommer också att använda symbolen $\iff$, som betecknar *ekvivalens*. $P \iff Q$ betyder att påståendet P är sant *om och endast om* påståendet Q är sant.

2.1 Ekvationer av första grad

När man pratar om graden hos en ekvation tar man fasta på den obekanta variabelns högsta potens. En ekvation av första graden² har formen:

$$ax + b = 0$$

Konstanterna $a, b \in \mathbf{R}$ kallas *parametrar*. Förstegradsekvationer kallas också *linjära*. Man ser omedelbart att problemet är välformulerat för varje $x \in \mathbf{R}$ och därför kan man ta $D = \mathbf{R}$.

¹Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 1, kapitel 6

²I Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 2, kapitel 1

Ekvationen löses på följande sätt ($a \neq 0$):

$$ax + b = 0 \iff$$

$$ax = -b \iff$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Om $a = 0$ fås två fall beroende på vilket värde b har.³ Om $b = 0$ har ekvationen utseendet

$$0x = 0.$$

Denna ekvation löses av varje $x \in D$ och lösningsmängden $L = D = \mathbf{R}$. Om $b \neq 0$ fås ekvationen

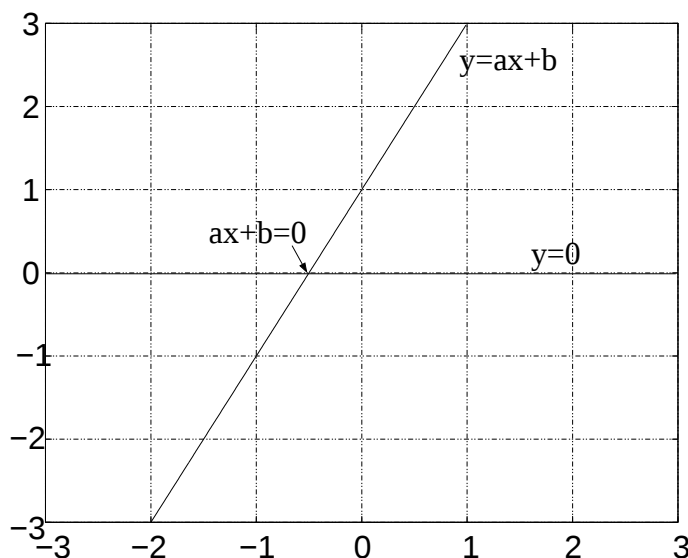
$$0x = -b.$$

Denna löses inte av något x , så lösningsmängden är tom, d.v.s. $L = \emptyset$.

En ekvation av första graden har även en geometrisk tolkning. Lösningen på ekvationen $ax + b = 0$ är den punkt där linjen

$$y = ax + b$$

skär x-axeln, d.v.s. där $y = 0$.



Figur 2.1: Lösningen till ekvationen $ax + b = 0$ fås för $x = -b/a$.

³Ekvationen är egentligen av nollte grad om $a = 0$.

Exempel 2.1 Lös ekvationen $3x + 5 = 7 - x/2$, $x \in D = \mathbf{R}$.

Lösning:

Vi flyttar alla termer som innehåller x till vänstra sidan och alla som inte gör det till högra sidan och får:

$$3x + 5 = 7 - \frac{x}{2} \iff \left(3 + \frac{1}{2}\right)x = 7 - 5 \iff \frac{7}{2}x = 2 \iff x = \frac{2}{7} \cdot 2 = \frac{4}{7}$$

Exempel 2.2 Lös ekvationen:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2x}$$

Lösning:

Definitionsmängden till denna ekvation är $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$ eftersom $\{-1, 0\}$ utgör nollställen i nämnaren. Vi hyfsar uttrycket genom att multiplicera med $2x(x+1)$.⁴

$$\frac{2x(x+1)}{x} - \frac{2x(x+1)}{x+1} = \frac{6x(x+1)}{2x}$$

Vi kan förkorta nämnarna och ekvationen är ekvivalent med:

$$2x + 2 - 2x = 3x + 3 \iff -3x = 1 \iff x = -\frac{1}{3}$$

Lösningssmängden är alltså

$$L = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

eftersom $-\frac{1}{3}$ tillhör definitionsmängden⁵.

Exempel 2.3 Lös ekvationen:

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x+2} = \frac{3x+2}{x^2-4}$$

Lösning:

Definitionsmängden är $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$. Vi förlänger nämnarna i vänsterled:

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x+2}{x^2-4}$$

Eftersom $(x+2)(x-2) = (x^2-4)$ fås

$$\frac{x^2 + 2x - x - 2 - x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \frac{3x + 2}{x^2 - 4}.$$

⁴Eftersom $2x(x+1) \neq 0$, kan vi multiplicera ekvationens båda led med $2x(x+1)$, varvid nämnarna försvinner. Vad händer om man multiplicerar en ekvation med 0?

⁵Det är väsentligt att kontrollera att man har fått en rimlig lösning. Vi måste alltid ha $L \subseteq D$.

En del termer tar ut varandra i täljaren och vi får:

$$\frac{3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{3x + 2}{x^2 - 4}$$

Eftersom högerled (HL) och vänsterled (VL) är liknämninga kan nämnarna multipliceras bort och vi koncentrerar oss på täljarna.

$$3x - 2 = 3x + 2 \iff 0x = 4$$

Denna ekvation saknar lösningar, d.v.s. $L = \emptyset$.

Anmärkning 2.4 Om man vill falla tillbaka på axiomen, så kan man observera att man vid lösning av $ax + b = 0$ börjar med att addera b 's additiva invers till båda leden. Om $a \neq 0$, så har a en multiplikativ invers och då kan man bestämma x genom att multiplicera med den.

2.1.1 Förstgradsekvationer med (fria) parametrar

Finns i Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 2 kapitel 1.

Exempel 2.5 Lös ekvationen:

$$ax - a^2 = 2x - 4$$

m.a.p. x . Konstanten $a \in \mathbf{R}$.⁶

Lösning:

Vi omskriver ekvationen på vanligt sätt:

$$(a - 2)x = a^2 - 4$$

Vi antar först att $a - 2 \neq 0$, d.v.s. $a \neq 2$. Ekvationen har då lösningen:

$$x = \frac{a^2 - 4}{a - 2} = a + 2$$

Om $a = 2$ skall följande ekvation lösas:

$$2x - 4 = 2x - 4 \iff 0x = 0$$

Denna ekvation har $L = \mathbf{R}$. Vi sammanfattar:

$$L = \begin{cases} \{a + 2\} & , a \neq 2 \\ \mathbf{R} & , a = 2 \end{cases}$$

⁶Frågeställningen betyder alltså att vi ska lösa ekvationen för alla $a \in \mathbf{R}$.

2.2 Ekvationssystem

I denna sektion skall vi se på ett linjärt ekvationssystem⁷. Systemet har följande utseende:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Frågeställningen är vilka x, y som satisfierar ekvationssystemet och två metoder för att lösa systemet ges.

1. Additionsmetoden.

Exempel 2.6 *Lös ekvationssystemet:*

$$\begin{cases} 4x + 3y = 8 \\ 6x + 2y = 12 \end{cases}$$

Lösning:

De båda ekvationerna multipliceras med lämpliga faktorer, så att termer tas ut vid addition av ekvationerna:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 8 & | \cdot 2 \\ 6x + 2y = 12 & | \cdot (-3) \end{cases}$$

Adderar nu ekvationerna:

$$\begin{cases} 8x + 6y = 16 \\ + \quad -18x - 6y = -36 \\ \hline -10x = -20 \end{cases}$$

Ur detta ser vi att $x = 2$. insättning av $x = 2$ i t.ex. $4x + 3y = 8$ ger $y = 0$. Lösningen är alltså $(x, y) = (2, 0)$ vilket lätt kan verifieras genom insättning i det ursprungliga systemet.

⁷Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 1 kapitel 7

2. Insättningsmetoden

Exempel 2.7 Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -12 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$$

Lösning:

Eftersom $3x - y = -5$ gäller det även att $y = 3x + 5$. Insättning av detta i den övre ekvationen ger:

$$2x - 5(3x + 5) = -12$$

Denna kan nu lätt lösas och $x = -1$. Insättning av $x = -1$ i $y = 3x + 5$ ger $y = 2$. Lösningen är alltså $(x, y) = (-1, 2)$ vilket även här lätt kan verifieras.

Man är ofta intresserad av system med flera ekvationer och obekanta. Då använder man kanske hellre metoder som baserar sig på det första förslaget (jmf. kursen i matriser). I denna kurs spelar det dock ingen större roll.

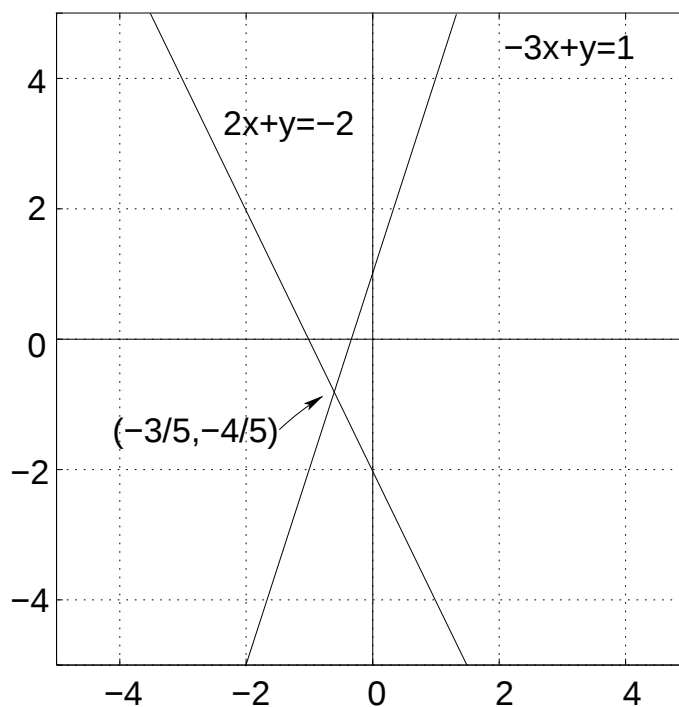
För ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

representerar lösningen $(x, y) = (x_0, y_0)$ den punkt där linjerna $a_1x + b_1y = c_1$ och $a_2x + b_2y = c_2$ skär varandra. Det är möjligt att två linjer är parallella och därför aldrig skär varandra. Då har systemet heller ingen lösning. Se figur 2.2, där systemet

$$\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

finns illustrerat. Skärningspunkten $(-3/5, -4/5)$ utgör systemets lösning.



Figur 2.2: Lösningen till ett ekvationssystem beskriver skärningspunkten för de båda linjer som definieras av systemet.

2.3 Olikheter av första grad

När vi löser olikheter av första grad⁸ behandlas uttryck av formen:

$$ax + b > 0$$

$$ax + b < 0$$

Till vår hjälp har vi följande regler.

⁸Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 2, kapitel 2

Ordningsegenskaper för reella tal. Antag att konstanterna $a, b, c \in \mathbf{R}$. Då gäller:

1. $a < b \wedge b < c \implies a < c$
Utläses: ”Om $a < b$ och $b < c$, så gäller $a < c$.”
2. Exakt ett av följande påståenden gäller
 - $a < b$
 - $a > b$
 - $a = b$
3. $a < b \implies a + c < b + c$
4. $a < b, c > 0 \implies ac < bc$
5. $a < b, c < 0 \implies ac > bc$

Exempel 2.8 Hyfsa $\sqrt{2x^2 + 4x + 2}$.

Lösning:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2 + 4x + 2} &= \sqrt{2(x^2 + 2x + 1)} = \sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2} \\ &= \sqrt{2}|x+1| = \begin{cases} \sqrt{2}(x+1) & , x \geq -1 \\ -\sqrt{2}(x+1) & , x < -1 \end{cases}\end{aligned}$$

(Ty $|x+1| = (x+1)$ om $x+1 \geq 0$, annars är $|x+1| = -(x+1)$.)

Exempel 2.9 Lös följande olikhet:

$$x - \sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{2}x$$

Lösning:

$$x - \sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{2}x \iff (1 - \sqrt{2})x \leq 1 + \sqrt{2}$$

Eftersom $1 - \sqrt{2} < 0$ fås (regel 5)

$$x \geq \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{-1} = -3 - 2\sqrt{2}.$$

2.3.1 Linjära olikheter med parametrar

Principen för olikheter av första graden med parametrar⁹ är den samma som med ekvationslösning med parametrar. I ekvationen

$$ax + b < 0$$

måste man dock fästa extra uppmärksamhet på tecknet för a , eftersom olikheten ändrar riktning beroende på om a är positiv eller negativ. Speciellt bör också fallet $a = 0$ undersökas. Olikheten har en geometrisk tolkning. Om vi ser på figuren i sektionen innan ser vi att lösningen till $ax + b < 0$ är $x < -b/a$ då $a > 0$.

Exempel 2.10 *Lös olikheten*

$$ax - a^2 < 2x - 4$$

Lösning:

$$ax - a^2 < 2x - 4 \iff (a - 2)x < a^2 - 4$$

Nu bör vi dela upp lösningen i tre fall beroende på om $a - 2$ är mindre än, lika med eller större än noll.

$a < 2$

I detta fall är $a - 2 < 0$ och

$$x > \frac{a^2 - 4}{a - 2} = a + 2$$

$a > 2$

I detta fall är $a - 2 > 0$ och

$$x < \frac{a^2 - 4}{a - 2} = a + 2$$

$a = 2$

I detta fall är $a - 2 = 0$ och olikheten vi började med har utseendet:

$$2x - 4 < 2x - 4 \iff 0x < 0$$

Denna olikhet saknar lösningar. Vi sammanfattar:

$$L = \begin{cases} \{x \in \mathbf{R} | x > a + 2\} & , a < 2 \\ \{x \in \mathbf{R} | x < a + 2\} & , a > 2 \\ \emptyset & , a = 2 \end{cases}$$

⁹Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 2, kapitel 2

2.4 Ekvationer av andra graden

En ekvation som kan skrivas i formen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

($a \neq 0$) är en ekvation av andra graden.

Genom att lösa ekvationen hittar vi de punkter där parabeln som definieras av vänsterledet skär x-axeln, d.v.s. de punkter där $y = 0$. Vi vet sedan tidigare att parabeln öppnar sig uppåt om $a > 0$ och nedåt om $a < 0$.

Inledningsvis skall vi gå igenom två exempel som så småningom skall föra oss in på en allmän lösningsformel för andragradsekvationer. I exempel 2.11 har vi hjälp av den s.k. *nollregeln*.

Nollregeln. Om det gäller att

$$ab = 0,$$

så måste antingen $a = 0$ eller $b = 0$.

Exempel 2.11 Lös ekvationen:

$$ax^2 + bx = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

Lösning:

Ekvationen är ekvivalent med

$$x(ax + b) = 0$$

Enligt nollregeln gäller nu att $x = 0 \vee ax + b = 0 \iff \underline{x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}}$.

Exempel 2.12 Lös ekvationen:

$$ax^2 + c = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

Lösning:

Skriv om uttrycket:

$$ax^2 = -c \iff x^2 = -\frac{c}{a}$$

Lösningsmängden till denna ekvation är

$$L = \begin{cases} \{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\} & , \frac{c}{a} < 0 \\ \{0\} & , \frac{c}{a} = 0 \\ \emptyset & , \frac{c}{a} > 0 \end{cases} ,$$

ty $x^2 \geq 0$ för alla x .

Anmärkning 2.13 $\emptyset$ är ju som bekant den mängd som inte innehåller något element alls och $\{0\}$ är den mängd som innehåller bara elementet 0. Blanda inte ihop dessa.

2.4.1 Kvadratkomplettering

För att lösa andragradsekvationer kan vi alltid *kvadratkomplettera* och för att härleda lösningsformeln för andragradsekvationer behöver vi denna metod. Metoden presenteras m.h.j.a. ett exempel.

Exempel 2.14 *Lös ekvationen*

$$2x^2 - 8x + 1 = 0.$$

Lösning:

Med metoden med kvadratkomplettering har man som mål att skriva om ekvationen i formen

$$(x - k_1)^2 = k_2$$

där k_1 och k_2 är konstanter. När ekvationen är omskriven kan vi dra kvadratroten ur båda sidorna (givet att $k_2 \geq 0$). Vi får då två lösningar för x .

1. Flytta alla konstanter till högra ledet och dividera med koefficienten framför x^2 .

$$x^2 - 4x = -\frac{1}{2}.$$

2. Addera båda leden med kvadraten på hälften av koefficienten för x . Koefficienten för x är -4 . Kvadraten av hälften av denna är $(-2)^2 = 4$.

$$x^2 - 4x + 4 = -\frac{1}{2} + 4$$

3. VL är $(x + \text{hälften av koefficienten för } x)^2$. Kontrollera detta med kvadreringsregeln.

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-2) + (-2)^2 = (x - 2)^2$$

Vi har alltså nu ekvationen

$$(x - 2)^2 = \frac{7}{2}.$$

För att lösa denna drar vi kvadratroten ur VL och HL. Detta kan vi göra eftersom båda sidorna är större än eller lika med noll. Om HL är negativ i detta skede saknar ekvationen lösning. Den geometriska tolkningen är att parabeln inte skär x -axeln i någon punkt.

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= \frac{7}{2} & | \sqrt{} \\ x-2 &= \sqrt{\frac{7}{2}} \vee x-2 = -\sqrt{\frac{7}{2}} \\ x &= 2 + \sqrt{\frac{7}{2}} \vee x = 2 - \sqrt{\frac{7}{2}}\end{aligned}$$

Vi får alltså ekvationens lösning till $x = 2 \pm \sqrt{7/2}$.

2.4.2 Andragradsekvationens allmänna lösningsformel

Lös ekvationen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , a \neq 0.$$

Vi använder kvadratkomplettering. Börja med att dividera med a och skriv $p = b/a$ och $q = c/a$. Vi får den nya (ekvivalenta) ekvationen

$$\underline{x^2 + px + q = 0} \iff x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Under antagandet att $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ dras roten ur HL och VL och x löses ut.

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \iff \underline{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Vi får alltså ovanstående lösning om $(p/2)^2 - q \geq 0$.¹⁰

Om vi vill ha lösningen uttryckt i a, b och c kan vi göra insättning av $p = b/a$ och $q = c/a$. Vi får

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Vi bryter ut nämnaren $|2a|$ ur kvadratroten och får följande resultat. (Varför spelar det ingen roll om nämnaren blir plus eller minus $2a$?)

Sats 2.15 Konstanterna $a, b, c \in \mathbf{R}$. Lösningen till ekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , a \neq 0$$

ges av

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{om} \quad b^2 - 4ac \geq 0.$$

Annars har ekvationen ingen reell lösning.

¹⁰Annars får vi ingen lösning i $\mathbf{R}$.

Exempel 2.16 Lös ekvationen a) $2x^2 - 8x + 1 = 0$ och b) $2x^2 - 8x + 9 = 0$.

Lösning:

a) Insättning i lösningsformeln ger

$$\begin{aligned} x &= -\frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{56}}{4} = 2 \pm \frac{\sqrt{56}}{|4|} = 2 \pm \sqrt{\frac{56}{4^2}} = 2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

Detta stämmer överens med resultatet från det tidigare exemplet.

b) Insättning ger

$$x = 2 \pm \frac{\sqrt{8^2 - 8 \cdot 9}}{4} = 2 \pm \frac{\sqrt{-8}}{4}$$

Vi har att uttrycket för x innehåller kvadratroten ur ett negativt tal, vilket är odefinierat. Inga reella x löser alltså ekvationen och $L = \emptyset$.

Exempel 2.17 Lös ekvationen

$$x - \frac{3x}{x+1} = \frac{3}{x+1}$$

Lösning:

Definitionsmängden för ekvationen är $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ eftersom -1 är nollställe i nämnaren. Multiplicerar med $x+1 \neq 0$.

$$x(x+1) - 3x = 3 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$$

insättning i lösningsformeln ger

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3 \wedge x_2 = -1$$

$x = -1 \notin D$ vilket innebär att

$$L = \{3\}.$$

Ibland kan följande resultat vara användbart.

Sats 2.18 Rötternas¹¹ egenskaper. *Antag att x_1 och x_2 är lösningar till ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$. Då gäller att:*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

och

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Bevis:

En enkel direkt räkning ger följande. Då x_1 och x_2 är lösningarna till andradsekvationen ger sats 2.15 på sidan 36 att x_1 och x_2 kan skrivas på formen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{och} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vi får att

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

och (med hjälp av konjugatregeln)

$$x_1 x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

■

¹¹Nollställena till polynom kallas också rötter. Ett nollställe är alltså ett värde x_0 på variabeln x , som gör att polynomet antar värdet noll. Grafiska tolkningen är, att den graf som beskrivs av polynomet skär x -axeln vid $x = x_0$.

2.4.3 Diskriminant

I lösningsformeln

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

finns uttrycket

$$b^2 - 4ac.$$

Denna kallas ekvationens *diskriminant*¹². Utgående från diskriminanten kan vi sluta oss till hur många lösningar ekvationen har.

Räkneregler 2.19 *Diskriminanten $b^2 - 4ac$ betecknas med D . Nu gäller det att om*

1. $D > 0$ *Ekvationen har två olika reella lösningar*
2. $D = 0$ *Ekvationen har en dubbelrot*
3. $D < 0$ *Ekvationen saknar reella lösningar*

Exempel 2.20 *För vilka värden på k har*

$$2x + k = 3 - x^2$$

två olika reella lösningar?

Lösning:

Ekvationen har två lösningar om diskriminanten är större än 0.

$$2x + k = 3 - x^2 \iff x^2 + 2x + (k - 3) = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (k - 3) = 16 - 4k$$

$D > 0$ om

$$-4k > -16 \iff k < 4.$$

Alternativ lösning: *Vi löser uppgiften direkt, utan att medvetet använda diskriminanten.*

$$2x + k = 3 - x^2 \iff x^2 + 2x + (k - 3) = 0 \iff$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k - 3)}}{2 \cdot 1} = x = \frac{-1 \pm \sqrt{16 - 4k}}{2}$$

Om talet innanför kvadraten är negativt fås inga lösningar. Om det är noll, fås en dubbelrot i $x = (-1 \pm 0)/2 = -1/2$ och om talet är positivt, fås två olika rötter. Detta är fallet om $16 - 4k > 0$, dvs. $k < 4$.

¹²Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 2 kapitel 5

2.4.4 Polynoms delbarhet - faktorisering

Tidigare har vi sett på hur vi kan faktorisera ett polynom med kvadreringsregeln, konjugatregeln och gruppering. Dessa metoder är dock användbara på en mycket begränsad typ av problem. Vi skall i denna sektion se på en metod som tillåter oss att faktorisera ett n :te grads polynom om vi känner till n reella rötter.

Sats 2.21 *Utgå från det allmänna polynomet*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Antag att det till detta polynom existerar n stycken reella rötter $x_1, x_2, \dots, x_n$. Då gäller det att:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

För ett andragradspolynom gäller speciellt att om x_1 och x_2 är reella nollställen till ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ kan polynomet faktoriseras enligt:

$$a(x - x_1)(x - x_2).$$

Exempel 2.22 *Faktorisera polynomet*

$$p(x) = 3x^2 - x - 2.$$

Lösning:

Lösningen till $p(x) = 0$ fås med den allmänna lösningsformeln:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$$

$$\therefore \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad p(x) = 3(x - 1) \left(x + \frac{2}{3} \right) = (x - 1)(3x + 2).$$

Anmärkning 2.23 *Vår sats säger ju att om x_0 är ett nollställe till polynomet $p(x)$, så är $x - x_0$ en faktor i $p(x)$, dvs. vi kan skriva $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$, där $q(x)$ också är ett polynom. Det omvända påståendet gäller också, dvs. om x_0 inte är ett nollställe till $p(x)$, så kan vi inte dividera bort $x - x_0$ från $p(x)$ (och få en rest som är noll).*

Exempel 2.24 $x_0 = 3$ är inte nollställe till polynomet $p(x) = x^2 - 3x + 2$, eftersom $p(3) = 2$. Om vi försöker dividera får vi

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} = x + \frac{2}{x - 3},$$

dvs. vi fick en rest 2.

2.5 Olikheter av andra graden

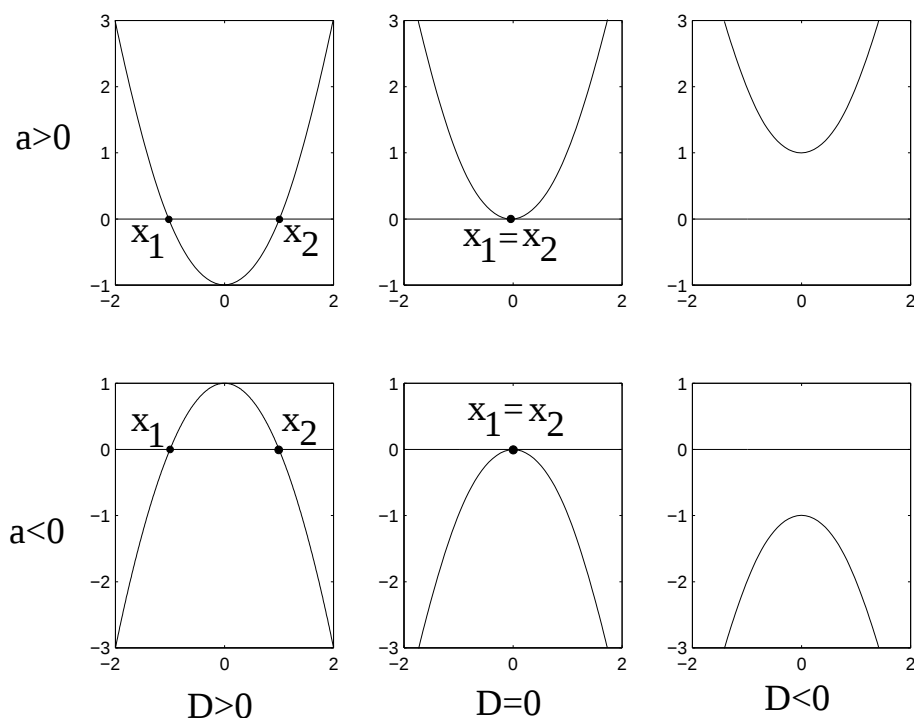
I denna sektion skall vi lösa olikheter av formen¹³:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

Two olika lösningsmetoder presenteras. Först en som använder diskriminanten och sedan en som använder *teckenscheman* (teckenväxlingsdiagram).

2.5.1 Lösning med hjälp av diskriminanten

Vi kommer att ha tre huvudgrupper av lösningar, beroende på om diskriminanten är negativ, positiv eller noll. Dessutom inverkar även tecknet på parametern a .



Figur 2.3: Inverkan på grafen av ett andragradspolynom med olika värden på a och D .

¹³Oinas-kukkonen m.fl. kurs 2 kapitel 9

Exempel 2.25 Låt

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

När gäller det att $f(x) \leq 0$? $f(x)$:s graf är uppritad i figur 2.3.

Lösning:

Vi går igenom de tre fallen, från vänster till höger och antar att $a > 0$. Om $D > 0$ är lösningsmängden $L = [x_1, x_2]$. I detta intervall ligger kurvan under eller på x -axeln.

Om $D = 0$ ligger kurvan inte under x -axeln i någon punkt, men tangerar denna i punkten x_1 . Lösningsmängden $L = \{x_1\}$.

Om $D < 0$ saknas lösningar, eftersom kurvan inte ligger under eller på x -axeln i någon punkt.

I tabellerna nedan har olika möjliga kombinationer av frågeställningar, tecken på diskriminanten D och parametern a sammanfattats:

	$D > 0$		
$a > 0$	$f(x) < 0$	$\implies$	$L =]x_1, x_2[$
	$f(x) \leq 0$	$\implies$	$L = [x_1, x_2]$
	$f(x) > 0$	$\implies$	$L =]-\infty, x_1[\cup]x_2, \infty[$
	$f(x) \geq 0$	$\implies$	$L =]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$
$a < 0$	$f(x) < 0$	$\implies$	$L =]-\infty, x_1[\cup]x_2, \infty[$
	$f(x) \leq 0$	$\implies$	$L =]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$
	$f(x) > 0$	$\implies$	$L =]x_1, x_2[$
	$f(x) \geq 0$	$\implies$	$L = [x_1, x_2]$

	$D = 0$		
$a > 0$	$f(x) < 0$	$\implies$	$L = \emptyset$
	$f(x) \leq 0$	$\implies$	$L = \{x_1\}$
	$f(x) > 0$	$\implies$	$L = \mathbf{R} \setminus \{x_1\}$
	$f(x) \geq 0$	$\implies$	$L = \mathbf{R}$
$a < 0$	$f(x) < 0$	$\implies$	$L = \mathbf{R} \setminus \{x_1\}$
	$f(x) \leq 0$	$\implies$	$L = \mathbf{R}$
	$f(x) > 0$	$\implies$	$L = \emptyset$
	$f(x) \geq 0$	$\implies$	$L = \{x_1\}$

(forts.)

	$D < 0$		
$a > 0$	$f(x) < 0$	$\implies$	$L = \emptyset$
	$f(x) \leq 0$	$\implies$	$L = \emptyset$
	$f(x) > 0$	$\implies$	$L = \mathbf{R}$
	$f(x) \geq 0$	$\implies$	$L = \mathbf{R}$
$a < 0$	$f(x) < 0$	$\implies$	$L = \mathbf{R}$
	$f(x) \leq 0$	$\implies$	$L = \mathbf{R}$
	$f(x) > 0$	$\implies$	$L = \emptyset$
	$f(x) \geq 0$	$\implies$	$L = \emptyset$

Exempel 2.26 Den intervallvist definierade funktionen f ges av

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{för } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4, & \text{för } x > 1 \end{cases}.$$

Lös olikheten $f(x) \leq 0$.

Lösning:

Undersöker ekvationen skilt i de båda intervallen:

$x \leq 1$. Lösningen till ekvationen $2 - x^2 = 0$ är $\pm\sqrt{2}$. Av lösningarna tillhör endast $-\sqrt{2}$ definitionsmängden då $\sqrt{2} > 1$. Parabeln öppnar sig nedåt, och i detta intervall gäller det att $f(x) \leq 0$ för $x \in]-\infty, -\sqrt{2}]$.

$x > 1$. Ekvationen $x^2 - 4x + 4 = 0$ kan omskrivas:

$$(x - 2)^2 = 0.$$

Ur detta ser vi att ekvationen har en dubbelrot och denna är 2. Denna tillhör definitionsmängden. Parabeln öppnar sig uppåt vilket innebär att $f(x) \leq 0$ endast i punkten $x = 2$ där $f(x)$ antar värdet 0.

medskip

Vi sammanfattar lösningarna:

$$L =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup \{2\}.$$

2.5.2 Lösning med hjälp av teckenschema

Då vi sysslar med uttryck av typen

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad , \quad a \neq 0$$

torde det vara rätt uppenbart, att vänsterledet (VL) $ax^2 + bx + c$ inte kan byta tecken utan att ta värdet noll emellan. Detta hänger ihop med att VL är *kontinuerlig*. Mera om kontinuitet senare. Vi får följande lösningsmetod, som inte är speciell för andragradsekvationer, utan den kan användas allmänt för kontinuerliga funktioner.

1. Lös ekvationen $VL = 0$.
2. Rita ett schema med en tallinje för x och rita i VL:s nollställen.
3. Beroende på parametrarna a , b och c fås noll, ett eller två nollställen.
4. Pröva genom insättning, för ett x i varje område, vilket tecken VL har.
5. Svaret kan avläsas direkt ur schemat.

Alternativt 4-5: Beroende på om a är positiv eller negativ, är parabeln rättvänd eller uppochnervänd. Detta kan användas för att bestämma tecknena i schemat.

Exempel 2.27 Lös olikheten $x^2 - 4x - 7 > 1$.

Lösning:

Vi börjar med att skriva om och får

$$x^2 - 4x - 7 > 1 \iff x^2 - 4x - 8 > 0.$$

Nu söker vi efter vänsterledets nollställen genom att lösa ekvationen.

$$x^2 - 4x - 8 = 0 \iff x = 2 \pm 2\sqrt{3}. \quad \text{KONTROLLERA!}$$

Vi ritat upp teckenschemat:

x	$2 - 2\sqrt{3}$	$2 + 2\sqrt{3}$
VL	0	0

För att bestämma teckenväxlingen ska vi nu pröva sätta in ett värde som är mindre än det mindre nollstället, ett som ligger mellan nollställena och ett som är större än det större nollstället. Vi försöker välja sådana värden på x som är lätta att räkna med. Insättning ger alltså:

$$x = -10 \quad \text{ger} \quad VL = (-10)^2 - 4 \cdot (-10) - 8 = 100 + 40 - 8 > 0$$

$$x = 0 \quad \text{ger} \quad VL = 0^2 - 4 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$$

$$x = 10 \quad \text{ger} \quad VL = 10^2 - 4 \cdot 10 - 8 = 100 - 40 - 8 > 0$$

Vi fyller i tecknen i vårt schema och får alltså

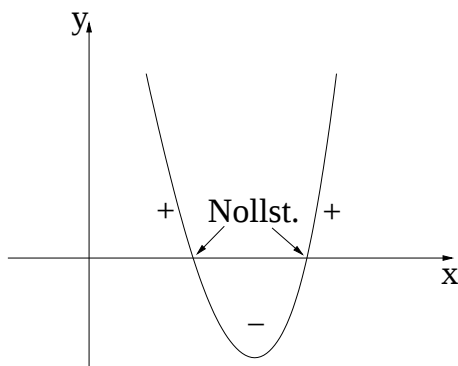
$$\begin{array}{c|ccccc} x & & 2 - 2\sqrt{3} & & 2 + 2\sqrt{3} & \\ \hline VL & + & 0 & - & 0 & + \end{array}.$$

Vi kan direkt utläsa att vänsterledet är positivt då $x < 2 - 2\sqrt{3}$ $\vee$ $x > 2 + 2\sqrt{3}$.

Vi tar inte med gränserna, eftersom vi inte tillåter att $VL=0$.

$$\text{Svar: } L =] - \infty, 2 - 2\sqrt{3}[\cup] 2 + 2\sqrt{3}, \infty [$$

Anmärkning 2.28 Märk, att teckenväxlingen direkt hänger ihop med att vår parabel är rättvänd och korsar x -axeln i två skilda punkter. Se figur 2.4.



Figur 2.4: Den grafiska tolkningen av olikheten. Man frågar sig var parabeln ligger (strängt) ovanför x -axeln.

Exempel 2.29 Funktionen f definieras genom

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{för } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4, & \text{för } x > 1 \end{cases}$$

Lös olikheten $f(x) \leq 0$.

Lösning:

Vi delar upp problemet i två fall, beroende på vilka x -värden vi har.

$x \leq 1$: Här är $f(x) = 2 - x^2$ och vi söker dess teckenväxling.

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

$f(x)$ är här en uppochnervänd parabel, så vi får följande teckenväxling. (Vi har antagit att $x \leq 1$, så vi ritar inte upp teckenväxlingen bortom $x = 1$.)

x	$-\sqrt{2}$	1
VL	-	+

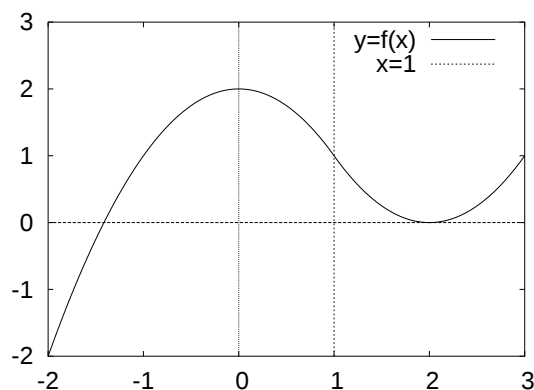
Vi drar slutsatsen att $L_1 =]-\infty, -\sqrt{2}]$ är bidraget till L härifrån.

$x > 1$: Här är $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Upprepar lösningsproceduren.

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{0},$$

dvs. 2 är det enda nollstället. Då f beskriver en rättvänd parabel, har vi att $x \neq 2 \implies f(x) > 0$. Den enda lösningen i intervallet $]1, \infty[$ är alltså 2. Vi får att $L_2 = \{2\}$ är det enda bidraget till L här.

$$\text{Svar: } L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup \{2\}$$



2.5.3 Andragradsolikheter med parametrar

Exempel 2.30 För vilka värden på a saknar ekvationen

$$ax^2 - 3ax - 1 = 0$$

reella lösningar?

Lösning:

För att en ekvation skall sakna reella lösningar bör $D < 0$. Detta ger kravet

$$(-3a)^2 - 4 \cdot a \cdot (-1) < 0$$

$$9a^2 + 4a < 0$$

Olikheten löses m.a.p. a . Lösningarna till ekvationen $9a^2 + 4a = 0$ ges av $a = 0 \vee a = -\frac{4}{9}$. Eftersom parabeln öppnar sig uppåt saknar ekvationen lösningar för

$$a \in] -\frac{4}{9}, 0[.$$

Sätts $a = 0$ i ursprungsekvationen erhålls en ekvationen $-1 = 0$. Denna saknar lösningar. Lösningssmängden är

$$L =] -\frac{4}{9}, 0].$$

2.6 Rationella olikheter

I denna sektion¹⁴ löser vi olikheter av formen

$$r(x) < 0$$

där $r(x)$ är ett rationellt uttryck

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

med $p(x)$ och $q(x)$ är polynom. Vid lösningen undersöker man $p(x)$ och $q(x)$ skilt.

För vilka x gäller det att $p(x) < 0$ och var är $p(x) > 0$? Samma sak görs för $q(x)$. För x -värden där p och q har olika tecken är det rationella uttrycket negativt, och för x -värden där p och q har samma tecken är $r = p/q$ positivt.

I lösningen bör man även klargöra nollställan (där $p(x) = 0$) och punkter där uttrycket är odefinierat (där $q(x) = 0$). Metoden åskådliggörs med ett exempel.

Exempel 2.31 Lös olikheten

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} < \frac{1}{2}.$$

Lösning:

Bestämmer definitionsmängden genom att lösa ekvationen

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Denna har lösningarna:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \therefore x = 3 \vee x = 4$$

$$\therefore D = \mathbf{R} \setminus \{3, 4\}$$

Multiplicerar olikheten med 2, flyttar över termerna i HL till VL och gör liknämngt:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} < \frac{1}{2} &\iff \frac{2x^2 - 10x + 12}{x^2 - 7x + 12} < 1 \\ &\iff \frac{2x^2 - 10x + 12}{x^2 - 7x + 12} - 1 < 0 \end{aligned}$$

¹⁴Oinas-Kukkonen, Kurs 2 kapitel 14

$$\begin{aligned} \iff \frac{2x^2 - 10x + 12}{x^2 - 7x + 12} - \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 7x + 12} &< 0 \\ \iff \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 7x + 12} &< 0 \end{aligned}$$

Vi skriver $p(x) = x^2 - 3x$. Grafen av denna är en parabel som öppnar sig uppåt med nollställena $\{0, 3\}$. Parabolen till polynomet $q(x) = x^2 - 7x + 12$ öppnar sig också uppåt, med nollställena $\{3, 4\}$.

Det finns (minst) två sätt att fortsätta på.

1. Vi ställer upp en teckentabell utgående från de nollställena vi har identifierat:

	0	3	4
$x^2 - 3x$	+	0	+
$x^2 - 7x + 12$	+	+	0
$f(x)$	+	0	+

Detta ger att

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 7x + 12} < 0$$

då

$$0 < x < 4 \wedge x \neq 3.$$

$$\therefore L =]0, 4[\setminus \{3\}$$

2. Vi observerar att vi kan faktorisera olikheten för $x \neq 3$:

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 7x + 12} = \frac{x(x - 3)}{(x - 3)(x - 4)} = \frac{x}{x - 4} < 0$$

Kan sätta upp följande teckentabell:

	0	3	4
x	+	0	+
$x - 4$	+	+	0
$f(x)$	+	0	+

Vi fick samma resultat som i 1. (Obs. att $3 \notin D$.)

2.7 Högregradsekvationer

I denna sektion kommer vi att lösa högregradsekvationer¹⁵. Dessa har gradtal större än 2. Vi ser på tre exempel för att belysa metodiken som används.

Exempel 2.32 *Lös ekvationen*

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$$

Lösning:

För att angripa denna ekvation gör vi ett variabelbyte. Sätter $t = x^2$. Ekvationen har nu följande utseende:

$$t^2 - 3t - 4 = 0.$$

Detta är en vanlig andragradsekvation som kan lösas med den kända Lösningssformeln. Lösningen är:

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\therefore t_1 = 4, t_2 = -1.$$

För att finna x löser vi ekvationerna

$$x^2 = 4 \quad \text{och} \quad x^2 = -1.$$

Detta ger lösningsmängden:

$$L = \{\pm 2\}$$

eftersom $x^2 = -1$ saknar reella lösningar.

Exempel 2.33 *Lös ekvationen:*

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Lösning:

Denna ekvation löses genom att vi faktorerar uttrycket. Därefter löses ekvationen m.hj.a. nollregeln. Ekvationen kan omskrivas:

$$x^2(x - 2) - 2(x - 2) = 0 \iff (x^2 - 2)(x - 2) = 0$$

Vi kan lösa denna ekvation m.hj.a. nollregeln. Nu gäller det att

$$x^2 - 2 = 0 \vee x - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2} \vee x = 2.$$

Lösningsmängden är alltså:

$$L = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}.$$

¹⁵Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 2, kapitel 13

Exempel 2.34 *Lös ekvationen:*

$$x^3 + 2x - 3 = 0$$

Lösning:

Metoden vi kommer att använda här är prövning. Genom att pröva med olika x -värden i en n :tegradsekvation kan det hända att vi hittar en lösning, x_1 . Enligt satsen om polynoms delbarhet vet vi då att $x - x_1$ är en faktor i polynomet. Vi dividerar med $x - x_1$ och får en ekvation av graden $n - 1$ att lösa.

$x = 1$ är en rot, eftersom $1^3 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$. Vi dividerar $x^3 + 2x - 3$ med $x - 1$ och får

$$\frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1} = x^2 + x + 3.$$

Vi har alltså att vår ursprungliga ekvation kan skrivas på formen

$$(x^2 + x + 3)(x - 1) = 0.$$

Nollregeln ger, att antingen är $x - 1 = 0$, dvs. $x = 1$, eller så måste det gälla att $x^2 + x + 3 = 0$. Vi löser vår andragradsekvation genom insättning i den allmänna lösningsformeln:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3},$$

dvs. den vänstra faktorn är aldrig noll. Vi har visat att $x = 1$ är den enda roten.

Exempel 2.35 Lös ekvationen

$$2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 13x + 3 = 0.$$

Lösning:

$x = 1$ är ett nollställe till ekvationen. Vi dividerar med $x - 1$:

	$2x^3$	$-9x^2$	$+10x$	-3						
$x - 1$		$2x^4$	$-$	$11x^3$	$+$	$19x^2$	$-$	$13x$	$+$	3
	$-$	$2x^4$	$+$	$2x^3$						
			$-$	$9x^3$	$+$	$19x^2$	$-$	$13x$	$+$	3
			$+$	$9x^3$	$-$	$9x^2$				
						$10x^2$	$-$	$13x$	$+$	3
						$-$	$10x^2$	$+$	$10x$	
							$-$	$3x$	$+$	3
							$+$	$3x$	$-$	3
										0

Ekvationen kan skrivas:

$$(x - 1)(2x^3 - 9x^2 + 10x - 3) = 0$$

En lösning till ekvationen $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$ är $x = 1$. Vi dividerar:

	$2x^2$	$-7x$	$+3$						
$x - 1$		$2x^3$	$-$	$9x^2$	$+$	$10x$	$-$	3	
	$-$	$2x^3$	$+$	$2x^2$					
		$-$	$-$	$7x^2$	$+$	$10x$	$-$	3	
			$+$	$7x^2$	$-$	$7x$			
				$-$		$3x$	$-$	3	
					$-$	$3x$	$+$	3	
									0

Ekvationen omskrives

$$(x - 1)^2(2x^2 - 7x + 3) = 0.$$

Denna kan nu lösas med nollregeln. Eftersom lösningen till $2x^2 - 7x + 3 = 0$ är

$$\frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$\therefore x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{2}$$

erhålls lösningsmängden

$$L = \left\{ \frac{1}{2}, 1, 3 \right\}.$$

2.8 Ekvationer och olikheter med kvadrat-rötter och absolutbelopp

I denna sektion¹⁶ kommer vi att ha nytta av följande regel:

Sats 2.36 *Antag att de rella talen $a, b \geq 0$. Då gäller att:*

$$a = b \iff a^2 = b^2$$

och att

$$a > b \iff a^2 > b^2$$

samt att

$$a \geq b \iff a^2 \geq b^2.$$

Bevis:

1.

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 &\iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a + b)(a - b) = 0 \\ &\iff a + b = 0 \vee a - b = 0 \end{aligned}$$

$a, b \geq 0$ ger att $a + b = 0$ omm $a = b = 0$ och $a - b = 0$ omm $a = b$. Det sista ledet ovan är alltså ekvivalent med att $a = b$. Antingen är deras gemensamma värde 0 (vänstra alternativet) eller så är det något annat (det högra).

2. ($\iff$):

$$\begin{aligned} a^2 > b^2 &\iff (a + b)(a - b) > 0 \\ &\implies (a + b > 0 \wedge a - b > 0) \vee (a + b < 0 \wedge a - b < 0) \end{aligned}$$

Det är klart att $a + b$ inte kan vara negativt här, så vi har att den högra parentesen är falsk och således är den vänstra sann. Vi får direkt att $a - b > 0$, dvs. $a > b$.

($\implies$): $a > b \geq 0$ ger att $a - b > 0$ och $a > b \geq 0$ ger att $a + b > 0$.

$$a > b \geq 0 \implies (a + b)(a - b) > 0 \implies a^2 - b^2 > 0 \implies a^2 > b^2$$

3.

$$a \geq b \iff a = b \vee a > b \iff a^2 = b^2 \vee a^2 > b^2 \iff a^2 \geq b^2$$

■

¹⁶Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 2, kapitel 15-17

2.8.1 Ekvationer med kvadratrötter

Då vi löser ekvationer med kvadratrötter använder vi sats 2.36 flitigt.

Exempel 2.37 Lös ekvationen:

$$\sqrt{x^2 + 2} = \frac{1}{x} - x.$$

Lösning:

Vi börjar med att undersöka definitionsmängden för uttrycket. Vi kräver att $x^2 + 2 \geq 0$, men detta gäller $\forall x \in \mathbf{R}$. Vi har alltså $D = \mathbf{R}$.

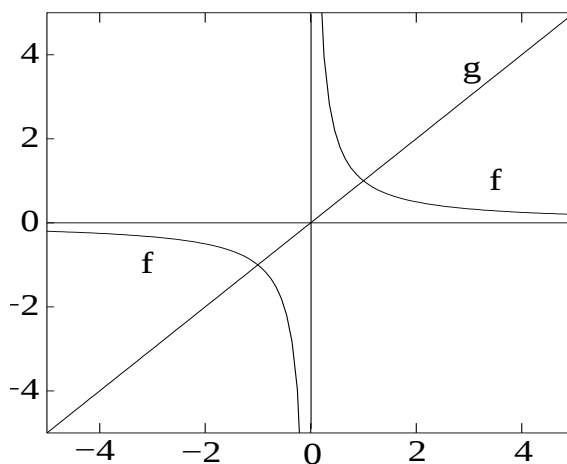
Eftersom $\sqrt{x^2 + 2} \geq 0$ måste det även gälla att högerledet är ickenegativt.

$$\frac{1}{x} - x \geq 0 \iff \frac{1}{x} \geq x$$

Detta gäller för $x \in]-\infty, -1] \cup]0, 1]$. Kalla denna mängd för I . (Använd metoden för rationella olikheter för att finna I här. Se också figuren nedan.) I detta intervall gäller att HL och VL är icke-negativa och vi kan enligt satsen ovan kvadrera båda sidorna utan att införa skenlösningar:

$$x^2 + 2 = \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 \iff x^2 + 2 = \frac{1}{x^2} - 2 + x^2 \iff \frac{1}{x^2} = 4 \iff x = \pm \frac{1}{2}.$$

Av dessa båda lösningar är det bara $x = \frac{1}{2}$ som tillhör $D \cap I$. Insättning av $x = -1/2$ i ursprungsekvationen visar att $x = -1/2$ är en skenlösning.



Figur 2.5: Funktionerna $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = x$.

2.8.2 Olikheter med kvadratrötter

När vi löser olikheter med kvadratrötter måste vi vara noggranna i undersökningen av definitionsmängder.

Exempel 2.38 Lös olikheten

$$\sqrt{x+2} - x < 0$$

Lösning:

Vi börjar med att sätta kvadratroten ensam på ena sidan. (Annars försvinner den ej nödvändigtvis vid kvadrering.)

$$\sqrt{x+2} < x$$

Kvadratroten är definierad för $x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$. Därför är definitionsmängden $D = [-2, \infty[$.

Eftersom $\sqrt{x+2} \geq 0$ och $x > \sqrt{x+2} \geq 0$ bör det gälla att $x > 0$. Dvs. $I = \mathbf{R}_+$.

För $x \geq 0$ är HL och VL icke-negativa och vi kan kvadrera dessa.

$$x+2 < x^2 \iff x^2 - x - 2 > 0$$

Ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$ har lösningarna $x_1 = 2, x_2 = -1$. Eftersom parabeln öppnar sig uppåt är uttrycket större än noll för $x \in]-\infty, -1[\cup]2, \infty[$. (Rita gärna teckenschema.) Då vi kräver att $x > 0$ för att undvika skenlösningar, erhålls lösningsmängden

$$L =]2, \infty[.$$

Exempel 2.39 Lös olikheten:

$$\sqrt{3-x} \geq x-1$$

Lösning:

Definitionsmängden är $x \leq 3$. Här ger inte HL något extra krav på x , eftersom HL vid första anblicken kan anta vilka värden som helst. Vi undersöker olikheten i skilt i fallen när HL är negativt och när HL är icke-negativt.

När högerledet är negativt, d.v.s. när $x < 1$ är olikheten sann eftersom VL alltid är större än eller lika med noll.

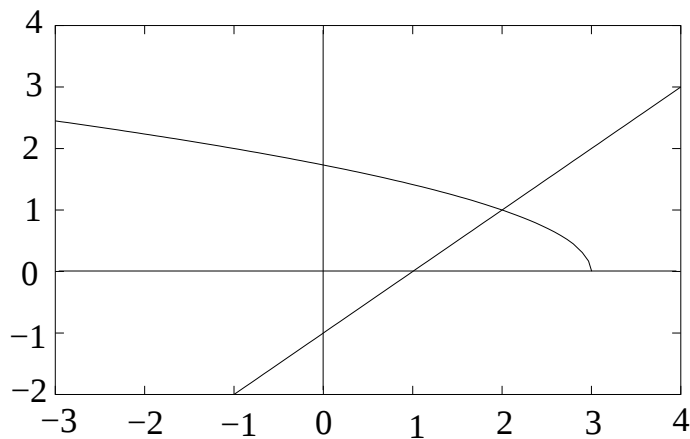
När HL är icke-negativt, d.v.s. när $x \geq 1$ kan vi använda kvadreringsregeln. Då fås:

$$3-x \geq (x-1)^2 \iff 3-x \geq x^2-2x+1 \iff x^2-x-2 \leq 0$$

Ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$ har lösningarna $x_1 = -1, x_2 = 2$. Eftersom parabeln öppnar sig uppåt är $x^2 - x - 2 \leq 0$ för $x \in [-1, 2]$. Vi kan nu sammanfatta resultaten och

$$L =]-\infty, 2].$$

Man kan rita upp grafen av HL och VL först, så att man får en uppfattning om var olikheten gäller. Då upptäcker man också fel lättare. Se figuren nedan.



Figur 2.6: Funktionerna $f(x) = \sqrt{3-x}$ och $g(x) = x-1$.

2.8.3 Absolutbelopp

*Absolutbeloppet*¹⁷ av ett tal kan man förstå som längden av sträckan mellan talet och noll. Längden mellan två punkter är alltid positiv, vilket också absolutbeloppet är. Vi har redan definierat absolutbeloppet som:

Definition 2.40 För alla $x \in \mathbf{R}$ definieras **absolutbeloppet** av x

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Om vi tänker oss att absolutbeloppet har innebörden av avståndet till ett tal från origo ser vi att definitionen stämmer in på detta.

Exempel 2.41 *Absolutbeloppet av 2 är 2 eftersom $2 > 0$. Absolutbeloppet av -2 är $-(-2) = 2$ eftersom $-2 < 0$.*

¹⁷Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 1, kapitel 11

Räkneregler 2.42 För $a, b \in \mathbf{R}$ gäller följande:

1.

$$|ab| = |a| |b|$$

2.

$$\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$$

3.

$$|a|^2 = a^2$$

Anmärkning 2.43 Beviset av räknereglererna är enkelt. Om a eller b inte är reell, behöver inte reglerna gälla. Detta är dock inget problem i detta skede, eftersom alla de tal vi sysslar med är reella.

Utvidgar vi begreppet och undersöker absolutbeloppet av ett uttryck som innehåller en variabel x definieras absolutbeloppet på ett liknande sätt.

Anmärkning 2.44 Antag att $f(x)$ är ett uttryck som innehåller variabeln x . Då gäller för **absolutbeloppet** att

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{om } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{om } f(x) < 0 \end{cases}.$$

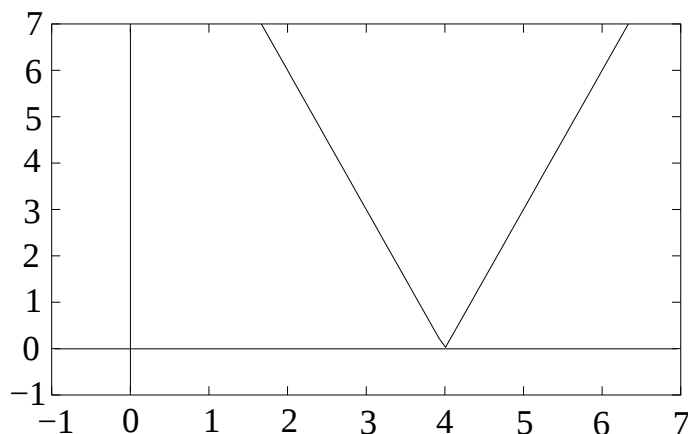
Exempel 2.45 Bestäm, samt rita grafen av $|f(x)|$ då $f(x) = 3x - 12$.

Lösning:

$$|3x - 12| = \begin{cases} 3x - 12, & \text{då } 3x - 12 \geq 0 \\ -(3x - 12), & \text{då } 3x - 12 < 0 \end{cases} \quad \text{dvs.}$$

$$|3x - 12| = \begin{cases} 3x - 12, & \text{då } 3x \geq 12 \\ 12 - 3x, & \text{då } 3x < 12 \end{cases} \quad \text{ger}$$

$$|3x - 12| = \begin{cases} 3x - 12, & \text{då } x \geq 4 \\ 12 - 3x, & \text{då } x < 4 \end{cases}$$



Figur 2.7: Grafen av $|3x - 12|$. Observera att funktionen aldrig antar negativa värden. Detta följer ur absolutbeloppets icke negativa egenskap.

Exempel 2.46 Bestäm, samt rita grafen av $||x| - 1|$.

Lösning:

Börja med att undersöka $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Lös uppgiften i två steg, ta först $x < 0$ och sedan $x \geq 0$.

1. $x \geq 0 \implies |x| = x$.

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{då } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), & \text{då } x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{dvs.} \quad |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{då } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

2. $x < 0 \implies |x| = -x$.

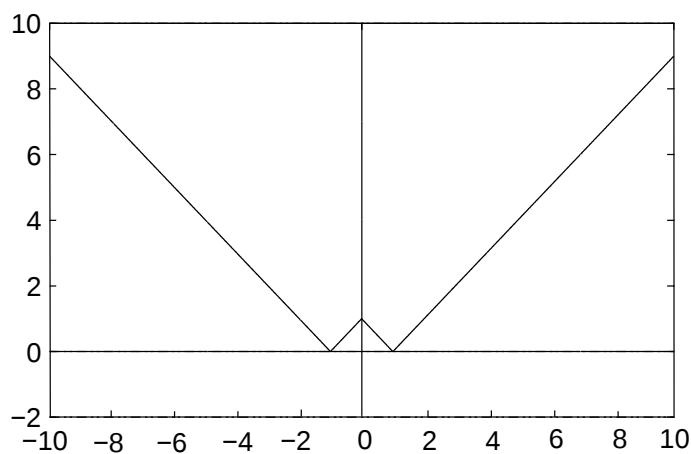
$$|-x - 1| = \begin{cases} -x - 1, & \text{då } -x - 1 \geq 0 \\ -(-x - 1), & \text{då } -x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{dvs.} \quad |-x - 1| = \begin{cases} -(x + 1), & \text{då } x \leq -1 \\ x + 1, & \text{då } x > -1 \end{cases}$$

Vi sammanfattar:

$$||x| - 1| = \begin{cases} -(x+1) & \text{då } x \leq -1. \\ x+1 & \text{då } -1 < x < 0. \\ -x+1 & \text{då } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{då } x \geq 1 \end{cases}$$

Se grafen nedan.



Figur 2.8: Grafen av $||x| - 1|$.

Exempel 2.47 Hyfsa $\sqrt{2x^2 + 4x + 2}$.

Lösning:

$$\sqrt{2x^2 + 4x + 2} = \sqrt{2(x^2 + 2x + 1)} = \sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2}$$

$$= \sqrt{2}|x+1| = \begin{cases} \sqrt{2}(x+1) & , x \geq -1 \\ -\sqrt{2}(x+1) & , x < -1 \end{cases}$$

(Ty $|x+1| = (x+1)$ om $x+1 \geq 0$, annars är $|x+1| = -(x+1)$.)

2.8.4 Ekvationer med absolutbelopp

Man kan alltid lösa denna typ av ekvationer med hjälp av metoden att bortskaffa absolutbeloppet genom att dela in x i olika intervall. Vi åskådliggör med ett exempel:

Exempel 2.48 *Lös ekvationen*

$$|x + 2| = |1 - x|. \quad (2.1)$$

Lösning:

Vi har

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & , x \geq -2 \\ -(x + 2) & , x < -2 \end{cases} \quad \text{och}$$

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x & , x \leq 1 \\ -(1 - x) & , x > 1 \end{cases}.$$

Vi ska alltså dela in vår lösning i tre olika intervall, $] -\infty, -2[$, $[-2, 1]$ och $]1, \infty[$.

$x < -2$:

$$VL = -x - 2 \quad \text{och} \quad HL = 1 - x$$

Då är ekvationen (2.1) ekvivalent med att

$$-x - 2 = 1 - x \iff -2 = 1 \iff \underline{\text{falskt}}.$$

Vi får alltså ingen lösning i $] -\infty, -2[$.

$-2 \leq x \leq 1$:

$$VL = x + 2 \quad \text{och} \quad HL = 1 - x \quad \text{ger}$$

$$(2.1) \iff x + 2 = 1 - x \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$$

$-1/2$ ligger i $[2, 1]$, så vi godtar lösningen.¹⁸

$x > 1$:

$$VL = x + 2 \quad \text{och} \quad HL = x - 1 \quad \text{ger}$$

$$(2.1) \iff x + 2 = x - 1 \iff 2 = -1 \iff \underline{\text{falskt}}$$

Vi får alltså ingen lösning i $]1, \infty[$.

Sammanfattning: *Den enda lösningen ligger i det mittersta intervallet, så*

$$L = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

¹⁸Om kandidaten till lösning *inte* hade legat i det undersökta intervallet, så skulle den ha utgjort en *skenlösning*. Dessa skenlösningar *godkänns inte*.

En annan möjlighet är att utnyttja satsen i avsnittets inledning.

Exempel 2.49 Lös ekvationen:

$$|x + 2| = |1 - x|.$$

Lösning:

Eftersom HL och VL är icke-negativa kan vi kvadrera båda sidorna.

$$|x + 2|^2 = |1 - x|^2.$$

För absolutbeloppet gäller att $|a|^2 = a^2$.

$$(x + 2)^2 = (1 - x)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow 6x + 3 = 0$$

Denna har lösningen:

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Anmärkning 2.50 Ett problem med kvadreringsmetoden är, att den ofta höjer gradtalet på höger- och vänsterleden. Ett problem med den första metoden är räkningarna kan bli långa och råddiga, vilket ses i ett tredje exempel.

Exempel 2.51 Lös ekvationen:

$$||x + 1| - |x|| = |1 - x|.$$

Lösning:

Det gäller att:

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{då } x \geq -1. \\ -(x + 1), & \text{då } x < -1. \end{cases}$$

och

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{då } x \geq 0. \\ -x, & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

samt att

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{då } x \leq 1. \\ x - 1, & \text{då } x > 1. \end{cases}$$

De två första absolutbeloppen ger vidare att:

$x < -1$:

$$|-(x+1) - (-x)| = |-1| = 1$$

$-1 \leq x < 0$:

$$|(x+1) - (-x)| = |2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{då } x \geq -\frac{1}{2}. \\ -(2x+1), & \text{då } x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$x \geq 0$:

$$|(x+1) - (x)| = |1| = 1$$

För olika intervall löses följande ekvationer:

$x < -1$:

$$1 = 1 - x \Leftrightarrow x = 0$$

$x = 0 \notin]-\infty, -1[$ varför lösningen förkastas.

$-1 \leq x < -1/2$:

$$-(2x+1) = 1 - x \Leftrightarrow x = -2$$

$x = -2 \notin [-1, -\frac{1}{2}[$ varför lösningen förkastas.

$-1/2 \leq x < 0$:

$$(2x+1) = 1 - x \Leftrightarrow x = 0$$

$x = 0 \notin [-\frac{1}{2}, 0[$ varför lösningen förkastas.

$0 \leq x \leq 1$:

$$1 = 1 - x \Leftrightarrow x = 0$$

Lösningen godtas.

$x > 1$

$$1 = x - 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Lösningen godtas.

Sammanfattningsvis fås

$$L = \{0, 2\}.$$

2.8.5 Olikheter med absolutbelopp

Olikheter med absolutbelopp löses med liknande metoder som ovan.

Exempel 2.52 *Lös olikheten*

$$\frac{1}{|x-2|} < \frac{1}{|x+3|}.$$

Lösning:

Definitionsmängden är $\mathbf{R} \setminus \{-3, 2\}$. Multiplicera olikheten med det positiva¹⁹ uttrycket $|x-2||x+3|$:

$$|x+3| < |x-2|$$

Kvadrerar VL och HL samt bortskaffar absolutbelopp²⁰:

$$(x+3)^2 < (x-2)^2 \iff x^2 + 6x + 9 < x^2 - 4x + 4 \iff 10x < -5$$

$$\therefore x < -\frac{1}{2}$$

Lösningssmängden är

$$L =]-\infty, -3[\cup]-\frac{1}{2}, \infty[,$$

eftersom $-3 \notin D$.

¹⁹Det är okej att multiplicera en olikhet med ett uttryck som alltid är positivt. Om vi multiplicerar med någonting som alltid är negativt, så måste vi vända olikhetstecknet. Vill vi multiplicera med något som antar både positiva och negativa värden, så måste vi dela upp i flera fall. Varför är $|x-2||x+3| > 0$ för alla $x \neq -3, 2$?

²⁰Påstående 2 i sats 2.36 på sidan 53. Det är klart att VL och HL, som utgörs av absolutbelopp är icke-negativa.