

Kapitel 1

Introduktion

I detta kapitel kommer vi främst att behandla grundbegrepp. Vi undersöker några speciella samlingar av tal (kallas *mängder*), matematiska symboler och ser på vissa räkneregler. Dessa begrepp använder vi senare i beräkningar och vid problemlösning.

1.1 Talområden

För att systematisera och samtidigt beskriva talens utveckling har man delat in tal i olika talområden.¹ Naturligast förstår man innebörden av ett tal när detta beskriver antal. Vid indelningen av tal i olika områden har man utgått från detta. De tal som beskriver antal kallas de *naturliga talen*, och dessa betecknas med:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{naturliga tal}$$

Dock vet vi att i många situationer räcker inte de naturliga talen. För att kunna hantera negativa tal har de *hela talen* definierats:

$$\mathbf{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots\} \quad \text{hela tal}$$

Vi märker att de naturliga talen till sin helhet innehålls i de hela talen. För att beskriva delar av tal har de *rationella talen* definierats. Dessa betecknas med:

$$\mathbf{Q} = \{x | x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\} \quad \text{rationella tal}$$

De rationella talen är alltså sådana tal som kan skrivas som bråk. Vi kommer närmare att se på beteckningssättet ovan när vi behandlar matematiska symboler. Vad vi kan observera är att eftersom alla hela tal går att skriva

¹Talområden behandlas närmast i Kurs 1, kapitel 1 i Oinas-Kukkonen m.fl.

som bråktal innehålls dessa i sin helhet i de rationella talen. Dock kan t.ex. $\sqrt{2}$ ej skrivas som ett bråktal. $\sqrt{2}$ uppträder som bekant i naturen t.ex. som diagonalens längd i en kvadrat med sidlängden ett. Alla de tal som finns på tallinjen tillhör de *reella talen*. Hit hör alla rationella tal, men också de irrationella talen, dvs de som inte kan skrivas i bråkform.

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{Q} \text{ samt alla irrationella tal} \} \quad \text{reella tal}$$

Nu kan vi dock märka att om vi försöker lösa ekvationen

$$x^2 = -1$$

leder det till problem. För att hantera denna situation har man definierat *de komplexa talen*. Dessa kommer att gås igenom i kursen Propedeutisk matematik II.

Ofta används beteckningar som $\mathbf{Z}_+$ eller $\mathbf{R}_-$. Med dessa beteckningar menas de *positiva* hela talen, d.v.s. mängden $\{1, 2, 3 \dots\}$,² respektive de *negativa* reella talen, d.v.s. reella tal mindre än noll.

1.2 Matematiska symboler

Inom matematiken jobbar man med olika objekt. Rent konkret handlar det ofta om tal och speciellt vissa samlingar av tal. För att göra hanteringen av tal och samlingar av dessa enkel samt få ett språk som är klart och kortfattligt har man utvecklat matematiska symboler. I denna sektion kommer vi att se på några av de allra vanligaste matematiska symbolerna.

Ovan sades det att man inom matematiken hanterar olika objekt. Vi har redan använt symbolen $=$ för att beteckna att två objekt (av samma typ) är lika.

En samling av objekt kallas en *mängd*. Vi kallar de enskilda objekten i en mängd för *element*. Mängder betecknas ofta med stor bokstav medan elementen i mängden gärna kan betecknas med liten bokstav.

Exempel 1.1 $\mathbf{N}$ står för de naturliga talen. Denna mängd definieras som

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2 \dots\}.$$

$\mathbf{N}$ är en mängd medan talen $0, 1, 2 \dots$ är element i mängden $\mathbf{N}$.

²Observera att $\mathbf{Z}_+$ skiljer sig från $\mathbf{N}$ endast i fråga om att talet 0 tillhör $\mathbf{N}$.

Det finns två huvudklasser av mängder. En mängd med oändligt antal element kallas en *oändlig mängd*, medan en mängd innehållande ett ändligt antal element kallas en *ändlig mängd*.

Exempel 1.2 $\mathbf{N}$ är en oändlig mängd.

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

är en ändlig mängd.

Om ett element a tillhör en mängd M betecknas detta med

$$a \in M.$$

Om elementet a inte tillhör mängden betecknas detta med

$$a \notin M.$$

Precis ett av de ovanstående alternativen gäller. Antingen tillhör elementet a mängden M eller så tillhör det inte M .

Exempel 1.3 Med mängden A definierad ovan gäller att

$$7 \in \mathbf{N}$$

men

$$7 \notin A.$$

Antag vidare att vi har två mängder, A och B och varje element som tillhör A även tillhör B . Då är A en *delmängd* av B . Detta betecknas med

$$A \subseteq B.$$

Exempel 1.4 Med mängderna $\mathbf{N}$ och A definierade ovan gäller att

$$A \subseteq \mathbf{N}.$$

Däremot gäller inte att $\mathbf{N}$ är en delmängd av A , vilket vi kan skriva som

$$\mathbf{N} \not\subseteq A.$$

Genom att jämföra elementen i två mängder kommer vi till begreppen *snitt* och *union*. Med snittet av två mängder menas mängden av element som tillhör båda mängderna. Snittet betecknas med $\cap$. Med unionen av två mängder menas mängden av element som tillhör minst en av mängderna. Unionen betecknas med $\cup$. En minnesregel för beteckningen är att unionen börjar på bokstaven 'u', vilken liknar beteckningen $\cup$.

Exempel 1.5 Definera mängderna

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Då gäller det att

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

och

$$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Om vi undersöker snittet av mängderna P och Q som saknar gemensamma element fås en mängd som saknar element. Allmänt kallas en sådan mängd *den tomma mängden*. Den betecknas med $\emptyset$.

Speciellt när vi har att göra med oändliga mängder är det nödvändigt att beskriva mängden enligt en viss egenskap istället för att räkna upp den. Detta kan göras på följande sätt³:

$$\{x | x \text{ har en viss egenskap}\}$$

Detta kan utläsas som "mängden av x som <har en viss egenskap>".

Exempel 1.6

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 6\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{x \in \mathbf{N} | x \geq 3 \text{ och } x \leq 8\}$$

Istället för ordet "och" i ovanstående beskrivning kan vi också använda beteckningen $\wedge$. Vi kan alltså skriva mängden B som $\{x \in \mathbf{N} | x \geq 3 \wedge x \leq 8\}$. Motsvarande symbol för "eller" är $\vee$.

Exempel 1.7 Låt mängderna A och B ges av $A = \{x \in \mathbf{R} | x < 3\}$ resp. $B = \{x \in \mathbf{R} | x > 3\}$. Då gäller att:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Unionen av de båda mängderna är alla reella tal utom 3. Om man vill beskriva en mängd genom en mängd av element som saknas i mängden görs detta med (*mängd-*) *differensen*, som betecknas med $\setminus$.

Exempel 1.8 Unionen av A och B definierade som i senaste exempel är:

$$A \cup B = \mathbf{R} \setminus \{3\}$$

³Jämför med beteckningssättet för rationella tal i sektion 1.1

Vi vill också ofta skriva, att någon viss egenskap gäller för alla element i en mängd eller att det finns (minst) ett element med en viss egenskap i en mängd. Dessa två saker betecknas elegant på följande sätt.

$$\forall x \in \mathbf{R} : x = 0 \vee x \neq 0$$

respektive

$$\exists a \in \mathbf{Q}_+ : a > 73.$$

Oändligheten betecknas i matematiken med ∞ . Oändlighet kan tyckas vara ett svårbegripligt begrepp, men det används mycket. Man bör *alltid* vara försiktig då man har med ∞ att göra.

1.3 Räkneregler för reella tal

I denna sektion tas räkneregler för reella tal upp⁴. Dessa kan verka självklara, men utgör ändå en viktig byggsten för den fortsatta teorin. Då man vill bevisa något för de reella talen, så faller man ofta tillbaka på dessa så kallade axiom. Vi kommer i kursen att försöka hålla oss på en mera praktisk nivå, men det är bra att veta vilka räkneregler vi har att tillgå.

För de reella talen a, b och c gäller följande regler⁵:

Lagen om slutenhet

$$a + b \in \mathbf{R} \quad \text{och} \quad a \cdot b \in \mathbf{R}$$

Kommutativa lagen

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

Associativa lagen

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

Distributiva lagen

$$\begin{aligned} a(b + c) &= ab + ac \\ (a + b)c &= ac + bc \end{aligned}$$

(forts.)

⁴Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 1, kapitel 2

⁵För andra talområden behöver inte nödvändigtvis alla dessa regler gälla. I männen av naturliga tal har t.ex. endast nollan additiv invers (kan du se varför?).

Neutralt element

$$\text{addition} \quad 0 \quad a + 0 = 0 + a = a$$

$$\text{multiplikation} \quad 1 \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Inverst element

$$\text{addition} \quad \text{det motsatta talet} \quad -a \quad a + (-a) = 0$$

$$(-a) + a = 0$$

$$\text{multiplikation} \quad \text{det inverterade talet} \quad \frac{1}{a}, \quad a \neq 0 \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

$$\frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Anmärkning 1.9 Det är säkert nyttigt att ibland försöka tänka efter vilka av dessa regler man använder då man räknar. ∞ är inget reellt tal och därför gäller inte heller dessa räkneregler.

Exempel 1.10 Den algoritm som används för att beräkna produkter baserar sig direkt på axiomen.

Vid beräkning av produkter av typen $123 \cdot 4$ utnyttjar man (indirekt) axiomen genom att beräkna

$$\begin{aligned} 123 \cdot 4 &= (3 + 20 + 100) \cdot 4 \stackrel{(distr.)}{=} 3 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 100 \cdot 4 \\ &= 3 \cdot 4 + (10 \cdot 2) \cdot 4 + 100 \cdot 4 \stackrel{(assoc.)}{=} 3 \cdot 4 + 10 \cdot (2 \cdot 4) + 100 \cdot 4 \\ &= 12 + 80 + 400 = 2 + 90 + 400. \end{aligned}$$

Det sista steget svarar mot hanteringen av den minnessiffra som dyker upp. Jämför

$$\begin{array}{r} 1 2 3 \\ \cdot 4 1 \\ \hline + 4 9 2 \end{array} \quad .$$

Om man kan utföra multiplikationer av typen $123 \cdot 4$, så kan man multiplicera vilka heltal som helst, vilket räkningen nedan visar. Här framgår användningen av axiomen tydligare.

$$\begin{aligned} 123 \cdot 45 &= 123 \cdot (5 + 40) \stackrel{(distr.)}{=} 123 \cdot 5 + 123 \cdot 40 \\ &\stackrel{(assoc.)}{=} 123 \cdot 5 + (123 \cdot 4) \cdot 10 = 615 + 492 \cdot 10 \end{aligned}$$

Jämför

$$\begin{array}{r} 1 2 3 \\ \cdot 4 5 \\ \hline 6 1 5 \\ + 4 9 2 \\ \hline 5 5 3 5 \end{array} \quad .$$

Decimaltal som $123,45$ kan förstås uttryckas som

$$5 \cdot 0.01 + 4 \cdot 0.1 + 3 + 2 \cdot 10 + 100$$

och samma metod kan alltså användas.

1.4 Potenser

Användningen av potenser⁶ var ursprungligen ett beteckningssätt för att beskriva en produkt av n stycken faktorer a . Detta kan åskådliggöras med:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5.$$

Vi använder följande definition.

Definition 1.11 Potensen a^n definieras som

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ st}}$$

där $a \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{Z}_+$. Potensen a^n utläses som ” a upphöjt i n ” eller kortare ” a i n :te”.

Ytterligare definieras $\forall a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbf{Z}_+$:

$$a^0 = 1 \quad \text{och} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exempel 1.12

$$\begin{aligned} 5^2 &= 25 \\ (-5)^2 &= (-5)(-5) = 25 \\ -5^2 &= -(5^2) = -25 \\ -5^0 &= -1 \\ 5^{-2} &= \frac{1}{25} \end{aligned}$$

Vi har följande räkneregler för potenser: (De kan härledas ur definitionen.)

Räkneregler 1.13 Antag att $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ och $m, n \in \mathbf{Z}$. Då gäller följande:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(ab)^m = a^m b^m$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $(a^n)^m = a^{nm}$

⁶I Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 1, kapitel 3

Exempel 1.14

$$3^3 \cdot 3^6 \cdot 3^{-7} = 3^{3+6-7} = 3^2 = 9$$

$$3^6 \cdot 6^{-4} = 3^6 \cdot (2 \cdot 3)^{-4} = 3^2 \cdot 2^{-4} = \frac{9}{16}$$

Exempel 1.15 *Förenkla*

$$\frac{(x-y)^3}{(y-x)^3}.$$

Lösning:

$$\frac{(x-y)^3}{(y-x)^3} = \frac{(x-y)^3}{((-1)(x-y))^3} = \frac{(x-y)^3}{(-1)^3(x-y)^3} = \frac{1}{(-1)^3} = -1$$

*Vilka räkneregler för potenser har vi använt?***Exempel 1.16** *Förenkla*

$$\frac{(x-y)^{2n}}{(y-x)^{2n+1}}.$$

*Lösning:**Bryter ut ett minustecken från nämnaren:*

$$\frac{(x-y)^{2n}}{((-1)(x-y))^{2n+1}}$$

Skriver om uttrycket enligt räkneregler ovan (vilka?):

$$\frac{(x-y)^{2n}}{(-1)^{2n+1}(x-y)^{2n+1}}$$

För varje $n \in \mathbf{Z}$ gäller att $2n+1$ är udda. Detta innebär att uttrycket $(-1)^{2n+1} = -1$ oberoende av n . Uttrycket ovan kan nu skrivas som:

$$\frac{(x-y)^{2n-(2n+1)}}{-1}$$

Detta är lika med:

$$\frac{1}{(-1)(x-y)} = \frac{1}{y-x}.$$

Exempel 1.17 *Bevisa :*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \text{(regel 4)} \quad \frac{a^{-n}}{b^{-n}} \stackrel{\text{(omskriv)}}{=} a^{-n} \cdot \frac{1}{b^{-n}} \\ &= \text{(definition)} \quad \frac{1}{a^n} \cdot b^n \stackrel{\text{(omskriv)}}{=} \frac{b^n}{a^n} \stackrel{\text{regel 4}}{=} \left(\frac{b}{a}\right)^n. \end{aligned}$$

■

Då man gör bevis, är det viktigt att motivera varje steg korrekt. Stränga bevis, så som detta, utgör grunden för all matematisk kunskap.

1.5 Polynom

Ett polynom⁷ är en summa av termer av formen

$$a_n x^n$$

där a_n är en konstant koefficient (n :et i a_n anger, att vi har olika a för olika n), x är en variabel och $n \in \mathbf{N}$. Allmänt kan ett polynom i variabeln x skrivas på formen:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

där $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ är konstanter och $a_n \neq 0$. Exempel på polynom är:

$$3x^5 + 3x^2 + 7x - 12$$

och

$$x^5 - 2x.$$

För en term i ett polynom är *termens gradtal* summan av exponenterna hos termens variabler. Med ett *polynoms gradtal* menas det högsta gradtalet hos polynomets termer.

Exempel 1.18 *Polynomet $3x^2 + 2x - 4$ har gradtalet 2. Termen $2x$ har gradtalet 1.*

Polynom kan ha flere variabler. I följande exempel stiftas bekantskap med sådana polynom.

⁷Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 1, kapitel 4

Exempel 1.19 *Polynomet*

$$8x^2 - 36x^2y^4 + 54xy^2 - 27y^3$$

har gradtalet 6 (summan av exponenterna i termen $-36x^2y^4$ är 6). Termen $54xy^2$ har gradtalet 3.

Ett specialfall av polynom är polynom med två termer. Dessa kallas *binom* och för dem gäller följande viktiga räkneregler:

Räkneregler 1.20 *Kvadreringsregeln*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Räkneregler 1.21 *Konjugatregeln*

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exempel 1.22 *Utveckla*

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Lösning:

Vi använder kvadreringsregeln.

$$t^2 + 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = t^2 + t + \frac{1}{4}.$$

Vi är intresserade av att utveckla kvadreringsregeln. Hur skall vi gå till väga om vi vill utveckla polynomet $(a+b)^n$? Vi tar hjälp av *Pascals triangel*. Denna har följande utseende:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Talen i Pascals triangel kallas *binomialkoefficienter* och bildas som summan av de två binomialkoefficienter som finns snett ovanför.

För att utveckla polynomet $(a + b)^n$ gör vi följande steg:

1. Hur stort är n ? Utveckla Pascals triangel med $n + 1$ rader.
2. På den sista raden finns koefficienterna för polynomet
3. Polynomet skrivs i fallande potenser av a , börjandes från a^n . Gradtalet för varje term bör vara n vilket leder till att exponenten för b stiger när a faller.

Exempel 1.23 *Skriv i polynomform:*

$$(a + b)^5$$

Lösning:

$$1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$

Detta är lika med:

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Exempel 1.24 *Skriv i polynomform:*

$$(2a - b)^3$$

Lösning:

$(2a - b)^3$ kan skrivas som $(2a + (-b))^3$ vilket gör att vi direkt kan tillämpa Pascals triangel:

$$1 \cdot (2a)^3(-b)^0 + 3 \cdot (2a)^2(-b)^1 + 3 \cdot (2a)^1(-b)^2 + 1 \cdot (2a)^0(-b)^3$$

Detta är lika med:

$$8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3.$$

Exempel 1.25 *Polynomet $p(x)$ ges av:*

$$p(x) = 2x^3 + 4x - 1.$$

Bestäm $p(a - 1)$.

Lösning:

Insättning ger direkt:

$$p(a - 1) = 2(a - 1)^3 + 4(a - 1) - 1$$

Utveckling och omskrivning ger:

$$2(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + 4a - 5 = 2a^3 - 6a^2 + 10a - 7.$$

1.5.1 Faktorisering

I de ovanstående exemplen utvecklade vi uttryck så att vi fick dem på polynomform. Att göra det motsatta genom att utgå från polynomform och skriva om det som en produkt av olika faktorer kallas att *faktorisera*.

I huvudsak har vi tre hjälpmedel för att faktorisera polynom. Dessa är:

1. *Konjugatregeln*

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Exempel:

$$9y^2 - 4 = (3y)^2 - 2^2 = (3y - 2)(3y + 2)$$

2. *Kvadreringsregeln*

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Exempel:

$$\frac{a^2}{4} - 3ab + 9b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot 3b + (3b)^2 = \left(\frac{1}{2}a - 3b\right)^2$$

3. *Gruppering*

I den är den att man grupperar termer så att en gemensam faktor kan brytas ut. Exempel:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 &= x^2(2x - 3) - 4(2x - 3) = (x^2 - 4)(2x - 3) \\ &= (x - 2)(x + 2)(2x - 3) \end{aligned}$$

Anmärkning 1.26 *Man kan observera, att det finns ett vackert samband mellan polynomens nollställen och deras faktoriseringar. Om tiden medger, kommer vi kanske att ta upp detta senare.*

1.6 Rationella uttryck

Ett rationellt uttryck⁸ $r(x)$ har följande form:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom. Med *täljaren* $p(x) = 3x^2 + 4x - 3$ och *nämnaren* $q(x) = x^2 - 1$ fås exempelvis det *rationella uttrycket*

$$r(x) = \frac{3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1}.$$

För vilka värden på x är $r(x)$ definierat? Insättning av $x = 1$ ger ”4/0” vilket är odefinierat. Vi kan sluta oss till att *definitionsområdet*, dvs. den mängd av värden på variabeln x för vilka uttrycket är definierat, är alla reella tal utom nämnarens nollställen. Definitionsområdet betecknas vanligen med D och allmänt gäller

$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid q(x) \neq 0\}.$$

Man bör alltid undersöka definitionsområdet för ett uttryck innan man påbörjar beräkningarna, för att försäkra sig om att man inte gör någonting otillåtet.

Exempel 1.27 För vilka värden på x är summan

$$\frac{2x}{x-4} + \frac{2}{(x^2-1)}$$

definierad?

Lösning:

Summan är definierad för reella tal, så båda termerna måste vara reella. En kvot är reell om täljaren och nämnaren båda är reella och nämnaren dessutom är olik noll. Slutsatsen blir att summan är definierad för alla reella tal utom $\{4, -1, 1\}$, eftersom precis de värden gör att endera nämnaren antar värdet noll.

⁸I Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 1, kapitel 5

Ofta kan rationella uttryck se ganska risiga ut. Då kan det vara skäl att göra dem mer lättlästa genom hyfsning. Detta kan göras på olika sätt:

1. **Förlängning av bråket.** Tanken är att man förlänger så att man får uttrycken liknämninga. Exempel:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}$$

Definitionsmängden är $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = -\frac{4x}{x^2-1}.$$

2. **Faktorisera och förkorta**

Exempel:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 8x + 12}{x^2 + 4x + 4}$$

Här är nämnaren $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, så definitionsmängden är $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x + 12}{x^2 + 4x + 4} &= \frac{x^2(2x-3) - 4(2x-3)}{(x+2)^2} = \frac{(x^2-4)(2x-3)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)(2x-3)}{(x+2)^2} = \frac{(x-2)(2x-3)}{x+2} \end{aligned}$$

3. **Polynomdivision.**

Exempel:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 - 1}, \quad D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$$

	x	-2		
$x^2 - 1$	x^3	$-2x^2$	$+0x$	$+2$
	$-x^3$		$+x$	
		$-2x^2$	$+x$	$+2$
		$+2x^2$		-2
			x	

x är av lägre gradtal än $x^2 - 1$. Vi får alltså en rest som är

$$\frac{x}{x^2 - 1}.$$

Ursprungsuttrycket kan alltså skrivas:

$$x - 2 + \frac{x}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

1.7 Intervall och olikhetstecken

Vi skall kort repetera beteckningssättet för intervall och motsvarande olikhetstecken⁹. I det följande antas att a, b är reella tal och att $a < b$, dvs. att a är (strängt) mindre än b .

Öppet intervall. Att talet x ligger strängt mellan a och b , dvs. $a < x < b$, betecknas på intervallform

$$x \in]a, b[.$$

Skrivsättet $a < x < b$ är en förkortning och ska tolkas som $a < x \wedge x < b$.

Slutet intervall. Att talet x är större än eller lika med a och mindre än eller lika med b , dvs. $a \leq x \leq b$, betecknas $x \in [a, b]$.

Halvöppet intervall. Att talet x är större än eller lika med a och mindre än b , dvs. $a \leq x < b$, betecknas $x \in [a, b[$. På motsvarande sätt betecknas att x är större än a och mindre än eller lika med b som $x \in]a, b]$.

Man bör observera att ∞ inte är ett tal, utan bara en beteckning. Beteckningen används ofta i intervallframställningar:

$$\begin{array}{lll} x > a & \text{kan skrivas som} & x \in]a, \infty[\\ x \geq a & \text{kan skrivas som} & x \in [a, \infty[\\ x < a & \text{kan skrivas som} & x \in]-\infty, a[\\ x \leq a & \text{kan skrivas som} & x \in]-\infty, a] \end{array}$$

De reella talen $\mathbf{R}$ kan skrivas som $] - \infty, \infty[$.

1.8 Linjer och parabler

I detta avsnitt skall vi kort se på hur man ritar upp linjer och parabler i ett koordinatsystem¹⁰.

1.8.1 Linjer

Ekvationen för en linje är

$$y = kx + l$$

Där anger l den punkt där linjen skär y -axeln. y -värdet i den punkt där linjen skär x -axeln är 0. Skärningspunkten mellan linjen och x -axeln fås därför genom att lösa ekvationen

$$0 = kx + l \quad \text{dvs.} \quad x = -\frac{l}{k}$$

⁹Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 1 kapitel 8

¹⁰Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 1, kapitel 9

Koefficienten k kallas *riktningskoefficient*. Den bestämmer lutningen på linjen. Om k är positiv är linjen stigande. Om k är negativ är den fallande. För $k = 0$ erhålls en vågrät linje. (Lodräta linjer kan inte representeras på detta sätt.)

Exempel 1.28 Vi kommer att definiera begreppet funktion noggrannare litet senare. För tillfället räcker det att vi betraktar en funktion som ett uttryck, som tar ett argument x och ger ett funktionsvärde för varje giltigt argument.

Funktionen $f(x)$ definieras som:

$$f(x) = 3x + 2.$$

Rita grafen av $y = f(x)$.

Lösning:

Eftersom skärningspunkten med y -axeln är 2 och skärningspunkten med x -axeln är $-\frac{2}{3}$ kan man dra en linje genom dessa två punkter.¹¹

En alternativ skisseringsmetod är att börja från punkten $(x_0, y_0) = (0, 2)$ (den punkt där linjen skär y -axeln). Eftersom riktningskoefficienten är

$$3 = \frac{3 \uparrow}{1 \rightarrow}$$

kan vi räkna tre enheter upp och en enhet till höger startande från $(0, 2)$. Detta är en annan punkt på linjen. Rita upp linjen genom dessa två punkter.

Exempel 1.29 Skissera räta linjen

$$y = -\frac{5}{2}x.$$

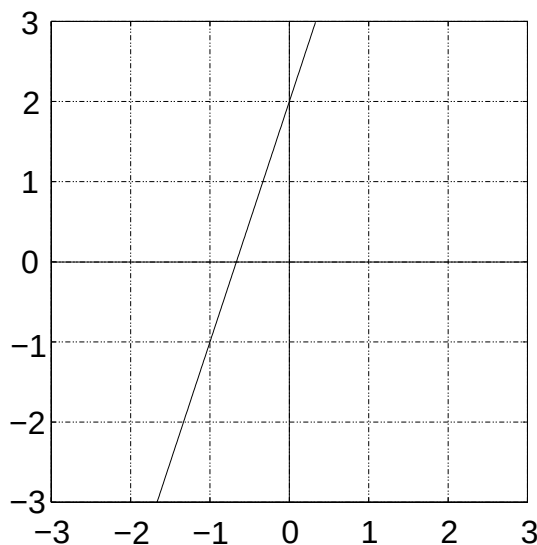
Lösning:

Vi har

$$y = \frac{-5}{2}x,$$

så skärningspunkten med y -axeln är noll. För att hitta en annan punkt på kurvan, går vi två steg åt höger och fem steg neråt. (Se ovan.) Vi drar alltså en rät linje genom de två punkterna $(0, 0)$ och $(2, -5)$. Punkten $(0, 0)$, som utgör mitten av koordinatsystemet, kallas origo.

¹¹Detta är smart. Om vi vet två punkter på en rät linje, så vet vi allt om linjen.

Figur 1.1: Grafen $y = 3x + 2$.

1.8.2 Parabler

En *parabel* är funktionskurvan för ett andragradspolynom och har därför den allmänna formen

$$y = ax^2 + bx + c$$

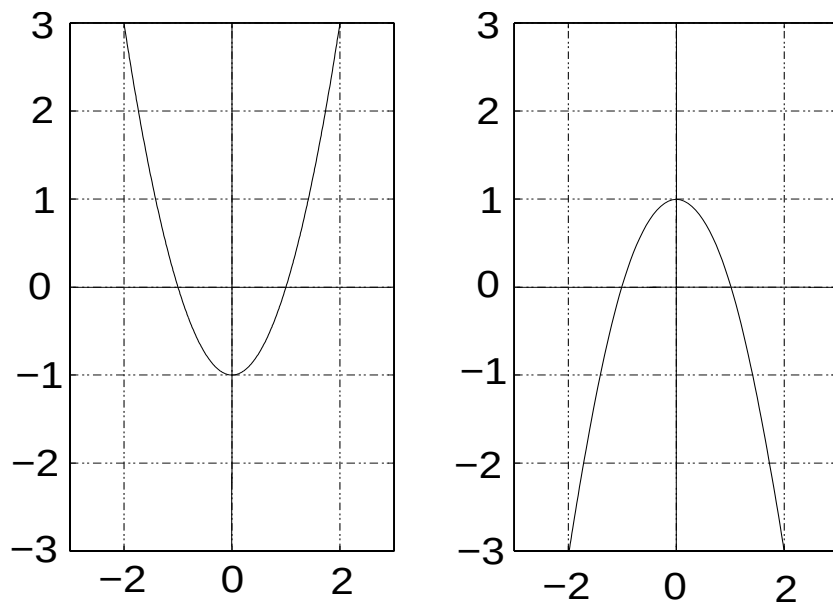
där ($a \neq 0$). Tecknet på a anger om grafen öppnar sig uppåt eller nedåt. Om $a > 0$ öppnar sig parabeln uppåt, om $a < 0$ öppnar den sig nedåt. Parabler är mycket viktiga och förekommer ofta i naturen.¹²

Storleken på koefficienten a anger hur snabbt parabeln öppnar sig. Ju mindre värde på $a > 0$, desto snabbare öppnar sig grafen. Storleken på koefficienten b anger vilken sida parabeln befinner sig om y-axeln. Toppen finns i $x = -b/2a$.¹³ Se figurerna 1.2—1.4.

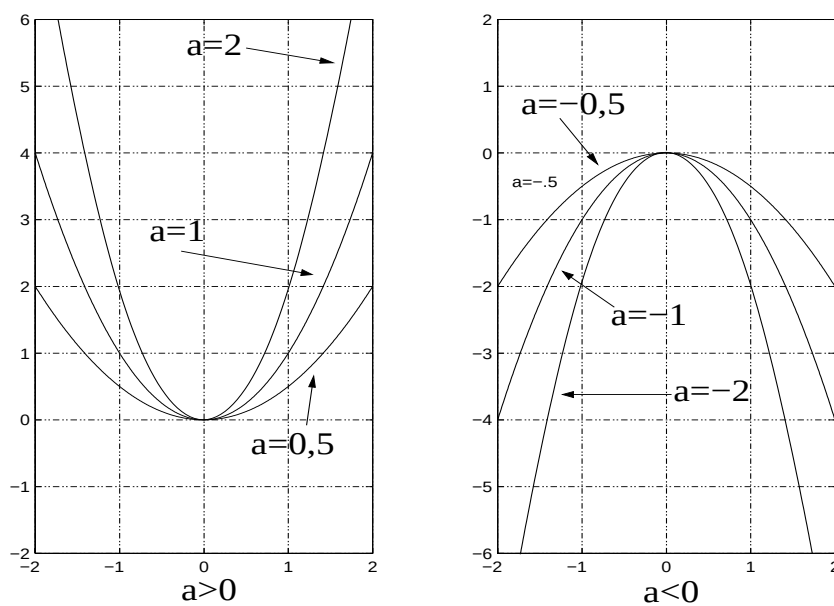
Anmärkning 1.30 Viktigt! Om $b = 0$ anger konstanten c i uttrycket för parabeln ovan skärningspunkten med y-axeln. Men om $b \neq 0$, så finns det inget direkt samband mellan parabelns topp och c . Det är också värt att notera, att parabelns topp ligger på y-axeln om och endast om $b = 0$.

¹²Kasta en sten snett upp i luften. Dess bana kommer att beskrivas av en parabel om man bortser från motvind och sånt. (Kan visas med hjälp av Newtons lagar i fysiken.)

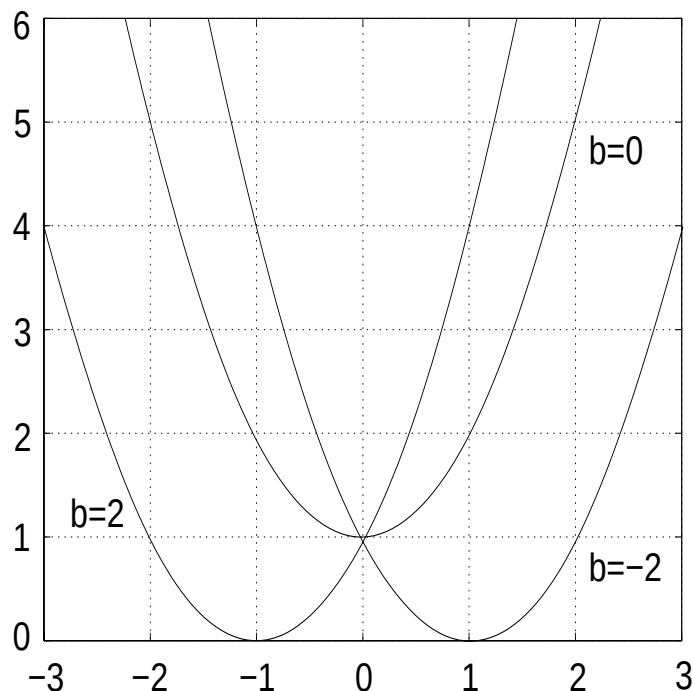
¹³Kan visas med hjälp av kvadratkomplettering, se senare.



Figur 1.2: Till vänster parabeln $x^2 - 1$ ($a > 0$) och till höger parabeln $-x^2 + 1$ ($a < 0$). Tecknet framför x^2 anger vart parabeln öppnar sig.



Figur 1.3: Till vänster parabler som öppnar sig uppåt ($a > 0$) och till höger parabler som öppnar sig nedåt ($a < 0$). Märk hur olika värden på a ger olika smal topp.



Figur 1.4: Parabeln $y = x^2 + bx + 1$ för $b \in \{-2, 0, 2\}$. Observera hur parabeln placeras till vänster eller till höger om y -axeln beroende på om b är positivt eller negativt.

1.9 Kvadratrot

Hittas i Oinas-Kukkonen m.fl. Kurs 1, kapitel 12-14.

Definition 1.31 Antag att $a \geq 0$. **Kvadratrot**en ur talet a är det icke-negativa¹⁴ reella tal som uppfyller villkoret

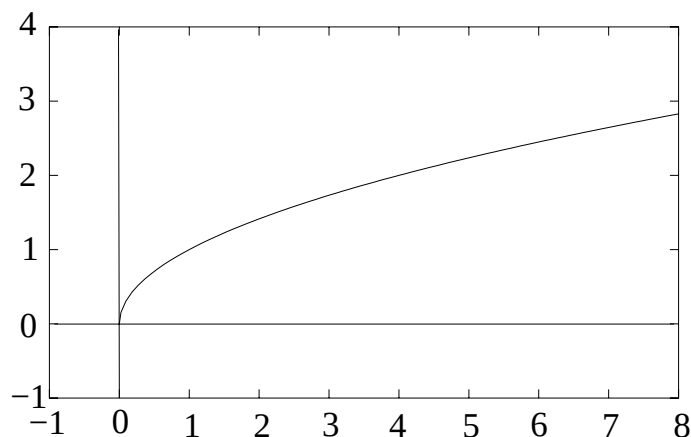
$$x^2 = a.$$

Kvadratroten ur a betecknas med $\sqrt{a}$ (där a kallas radikand). För $a \geq 0$ gäller alltså att

$$\sqrt{a} \geq 0 \text{ och } (\sqrt{a})^2 = a.$$

Funktionens graf finns skisserad i figur 1.5.

¹⁴Talet x är icke-negativt om $x \geq 0$.

Figur 1.5: Grafen $y = \sqrt{x}$.

Räkneregler 1.32 Antag att $a, b \geq 0$ (om ej annat påpekats).

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b > 0, (a \geq 0)$
3. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & , a \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \\ -a & , a \in \mathbf{R}_- \end{cases}$

Det är viktigt att notera absolutbeloppen i punkt tre. Om man lämnar bort dem, så fås ju fel svar för $a < 0$.

Exempel 1.33 Antag att $b < 0 \leq a$ och hyfsa

$$\sqrt{\frac{121a^3}{81b^2}}.$$

Lösning:

Vi gör följande omskrivning:

$$\sqrt{\frac{121a^3}{81b^2}} = \sqrt{\frac{11^2 a^2 \cdot a}{9^2 b^2}} = \frac{|11||a|}{|9||b|} \sqrt{a} = -\frac{11a\sqrt{a}}{9b}$$

Exempel 1.34 *Hyfsa*

$$\sqrt{1-x}\sqrt{1-x^2}.$$

Lösning:

För att uttrycket skall vara definierat bör $1-x^2 \geq 0$, dvs. $-1 \leq x \leq 1$.

Använder räkneregler 1:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x}\sqrt{1-x^2} &= \sqrt{(1-x)(1-x^2)} = \sqrt{(1-x)(1-x)(1+x)} = \\ &= |1-x|\sqrt{1+x}\end{aligned}$$

Eftersom $1-x \geq 0$ för $x \in D$ fås:

$$(1-x)\sqrt{1+x}$$

Exempel 1.35 *Hyfsa*

$$(1-x)\sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

Lösning:

Uttrycket är definierat för $x-1 > 0 \iff x > 1$. (Läsaren bör kontrollera detta.) För dessa x -värden är $1-x < 0$. Dock kan vi skriva om uttrycket:

$$-(x-1)\sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

Nu gäller att $x-1 > 0$, d.v.s. $x-1 = |x-1|$. Följande uttryck erhålls:

$$-|x-1|\sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

Detta är, enligt räknereglerna tre och ett, lika med:

$$-\sqrt{(x-1)^2}\sqrt{\frac{1}{x-1}} = -\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x-1}} = -\sqrt{x-1}.$$