Poissonprocesser, period 4, vt. 2013

Hemuppgifter till tisdagen den 9 april
Exercises for 9 April

Obs! Uppgifterna 5 och 6 är obligatoriska inlämningsuppgifter.

N. B. The exercises 5 and 6 are compulsory. Please submit written reports.

1. Låt T vara en icke-negativ stokastisk variabel vars hazardfunktion är

$$r(t) = \frac{1}{100} + \frac{t}{100000}.$$

Bestäm $\mathbf{E}(T)$ (numeriskt).

Let T be a non-negative random variable whose hazard function is

$$r(t) = \frac{1}{100} + \frac{t}{100000}.$$

Find $\mathbf{E}(T)$ (numerically).

2. Låt S vara summan av n oberoende lika fördelade stokastiska variabler: $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Antag att den gemensamma fördelningen för X'n är Poissonfördelningen med parametern ν.

Hur ser den momentgenererande funktionen $g(s)$ för den normerade variabeln

$$Z := \frac{S - \mathbf{E}(S)}{\sqrt{Var(S)}}$$

ut? Visa att den för stora n ligger nära $e^{\frac{s^2}{2}}$. Slutsats?

Let S be the sum of n independent identically distributed random variables : $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Suppose the common distribution of the X's is the Poisson distribution with parameter ν.

Find the moment generating function $g(s)$ of the normed variable

$$Z := \frac{S - \mathbf{E}(S)}{\sqrt{Var(S)}}.$$

Show that, for large n, is close to $e^{\frac{s^2}{2}}$. What conclusion can you draw from this?

3. Exercise 8, pp. 346-347

4. Exercise 10, p. 347

5. (Obligatorisk) Simulera följande process: Låt $X_1, X_2, \ldots, X_N$ vara oberoende lika fördelade stokastiska variabler. (N är stort.) Välj den likformiga fördelningen på [0,1] som gemensam fördelning. Välj en nivå $0,9 < a < 1$ och bestäm tidpunkterna $T_0, T_1, T_2, \ldots$ på följande sätt: $T_0 = 0$,

$$T_1 = \min\{n | X_n > a\}, T_2 = \min\{n > T_1 | X_n > a\}, \ldots, T_{k+1} = \min\{n > T_k | X_n > a\}$$

där processen avbryts då mängden $\{n > T_k | X_n > a\}$ är tom.

Sök den empiriska fördelningen för väntetiderna $T_{k+1} - T_k, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ och jämför denna med en geometrisk fördelning.

(Compulsory exercise) Simulate the following process: Let $X_1, X_2, \ldots, X_N$ be independent identically distributed random variables. (N is large.) The common distribution is the uniform distribution on [0,1]. Choose a level $0.9 < a < 1$ and let the times $T_0, T_1, T_2, \ldots$ be defined as follows: $T_0 = 0$,

$$T_1 = \min\{n > 0 | X_n > a\}, T_2 = \min\{n > T_1 | X_n > a\}, \ldots, T_{k+1} = \min\{n > T_k | X_n > a\}$$

up to the time when $\{n > T_k | X_n > a\}$ is empty.

Find the empirical distribution of the interarrival times $T_{k+1} - T_k, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ and compare it with a geometric distribution.

6. (Obligatorisk - Compulsory)

Exercise 15, p. 347.

Simulera processen ovan många gånger och bestäm medelvärdet och variansen för T experimentellt.

Simulate the above process many times. Determine the mean and variance of T experimentally.