Ordinära differentialekvationer

Slutförhör onsdag 7.12.2005

1) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y' - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x-y}$$

som uppfyller villkoret $y(0) = \ln(\mathrm{e} - 1)$.

2) Differentialekvationen

$$2x(1 + y^3 + x^2 y) + (2y + x^4 + x^2 y^2)\, y' = 0$$

kan omskrivas till en exakt ekvation med hjälp av en integrerande faktor av formen $\mu(x, y) = \mathrm{e}^{x^a y}$, där a är ett heltal. Bestäm a och lös differentialekvationen.

3) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y^{(3)} - y'' + y' - y = x\,\mathrm{e}^x + \sin x\,.$$

4) Ange en fundamentalmatris $\mathbf{F}(t)$ till det homogena system som svarar mot systemet

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_2 + 3t \\ x_2' = 2x_1 - 4x_2 + \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

5) Lös för $t > 0$ begynnelsevärdesproblemet

$$t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad y(1) = \frac{1}{2},\ y'(1) = 1\,.$$