Laplacetransformationen

Laplacetransformationen kan vara ett bekvämt verktyg, då man löser linjära DE:r med konstanta koefficienter eller system av sådana. Man bör dock inte överskatta transformationens betydelse. Ofta kan nämligen andra metoder ge den sökta lösningen snabbare och ibland kan Laplacetransformationen inte alls användas (se exempel 8.1).

Definition 8.1. *Laplacetransformen* $F(s)$ av en funktion $f(t)$, som är definierad för $t \geq 0$, är den funktion $F(s)$ som ges av integralen

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\,. \tag{1}$$

Om F är Laplacetransformen av f, så uttrycks sambandet mellan dessa två funktioner med symbolerna

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F \quad \text{eller} \quad F \bullet\!\!-\!\!\circ\, f\,.$$

Den funktion $f \mapsto F$, som transformerar $f(t)$ till $F(s)$, kallas *Laplacetransformationen* och betecknas med $\mathcal{L}$. Funktionen F kan alltså betecknas med $\mathcal{L}f$ men också beteckningen $\mathcal{L}\{f(t)\}$ kommer att användas flitigt i fortsättningen. Det är lätt att se att Laplacetransformationen är linjär, dvs. att

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L} f_1 + c_2 \mathcal{L} f_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

för sådana argument s för vilka både $(\mathcal{L}f_1)(s)$ och $(\mathcal{L}f_2)(s)$ är definierade.

Om funktionen f växer tillräckligt snabbt, så har den ingen Laplacetransform:

Exempel 8.1. Om $f(t) = e^{t^2}$, så ser vi att $e^{-st}f(t) = e^{t^2 - st} \to \infty$ då $t \to \infty$. Laplacetransformen av f är alltså inte definierad för något värde på s.

Nedanstående sats och också Sats 8.2 formulerar vi för enkelhetens skull för kontinuerliga funktioner. Det är emellertid lätt att se att bevisen kan genomföras för en större klass av funktioner.

Sats 8.1. *Om funktionen f är kontinuerlig och $(\mathcal{L}f)(s)$ är definierat för ett visst värde på s, så är $(\mathcal{L}f)(s')$ definierat för varje s' med $s' > s$.*

Bevis. Sätt $\delta = s' - s$. Med hjälp av partiell integration fås

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-s't} f(t)\, dt &= \int_0^b e^{-\delta t} e^{-st} f(t)\, dt \\ &= \left[e^{-\delta t} I(t)\right]_0^b + \delta \int_0^b e^{-\delta t} I(t)\, dt\,,\end{aligned}$$

där $I(t) = \int_0^t e^{-su} f(u)\, du$. Eftersom funktionen I enligt antagandet är begränsad, går substitutionstermen mot 0 och den andra termen mot en konvergent integral, då b går mot oändligheten. Alltså är $(\mathcal{L}f)(s')$ definierat. $\diamondsuit$

Av Sats 8.1 framgår att om Laplacetransformen F av f är definierad för något värde på s, så finns det ett σ sådant att integralen (1) är konvergent för $s > \sigma$ och divergent för $s < \sigma$. Transformen $F(s)$ är således definierad i ett intervall av formen $]\sigma, \infty[$, där σ kan vara $-\infty$, eller på ett intervall $[\sigma, \infty[$, där σ är ändligt.

Exempel 8.2. Laplacetransformen av e^t är definierad i intervallet $]1, \infty[$, ty bara för värden på s i detta intervall är integralen

$$\mathcal{L}\{e^t\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^t\, dt = \int_0^\infty e^{(1-s)t}\, dt = \frac{1}{1-s}$$

konvergent. För funktionen $g(t) = e^t/(1+t^2)$ gäller uppskattningen

$$0 \le e^{-st} g(t) = \frac{e^{(1-s)t}}{1+t^2} \le e^{(1-s)t}\,,$$

varför dess Laplacetransform $(\mathcal{L}g)(s)$ är definierad för $s > 1$. Men dessutom existerar $(\mathcal{L}g)(1)$, eftersom $\int_0^\infty dt/(1+t^2) = \pi/2$ är konvergent. För $s < 1$ fås däremot en divergent integral, ty integranden närmar sig då inte noll när t går mot $+\infty$. Laplacetransformen av g är alltså definierad i intervallet $[1, \infty[$.

Laplacetransformationens betydelse för DE:r grundar sig på egenskapen att summor av derivator försedda med konstanta koefficienter av den överförs på polynom. Om vi nämligen låter Laplacetransformationen operera på en derivata, så får vi med hjälp av partiell integration

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \\ &= \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0)\,.\end{aligned}$$

Denna kalkyl är giltig om både f och f' har en Laplacetransform och om $e^{-st}f(t) \to 0$ då $t \to \infty$. Det sistnämnda villkoret behövs inte om härledningen görs på ett annat sätt (det generellare beviset ges nedan).

Sats 8.2. *Om f och f' är kontinuerliga och $(\mathcal{L}f)(s)$ och $(\mathcal{L}f')(s)$ är definierade, så är*

$$(\mathcal{L}f')(s') = s'(\mathcal{L}f)(s') - f(0)$$

för $s' > s$.

Bevis: Sätt $\delta = s' - s$. Samma kalkyl som i beviset för Sats 8.1 men tillämpad på f' ger

$$(\mathcal{L}f')(s') = \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} dt \int_0^t e^{-su} f'(u)\, du$$

och vidare då man integrerar den inre integralen partiellt

$$(\mathcal{L}f')(s') = \delta(\mathcal{L}f)(s') - f(0) + s\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} dt \int_0^t e^{-su} f(u)\, du\,.$$

Låt I beteckna integralen i den sista termen. Genom att byta integrationsordning fås

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-\delta t} dt \int_0^t e^{-su} f(u)\, du = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-su} f(u)\, du \int_u^b e^{-\delta t} dt \\ &= \frac{1}{\delta} \lim_{b\to\infty} \left(\int_0^b e^{-s'u} f(u)\, du - e^{-\delta b} \int_0^b e^{-su} f(u)\, du \right) \\ &= \frac{1}{\delta} (\mathcal{L}f)(s')\,. \end{aligned}$$

Insättning ger $(\mathcal{L}f')(s') = \delta(\mathcal{L}f)(s') - f(0) + s(\mathcal{L}f)(s') = s'(\mathcal{L}f)(s') - f(0)$. $\diamondsuit$

Genom upprepad användning av formeln i Sats 8.2 fås för en funktion f med "tillräckliga" egenskaper:

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) = s^k \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{k-1} f(0) - \cdots - s f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)\,.$$

Exempel 8.3. Då man använder Laplacetransformationen $\mathcal{L}$ på bägge leden i DE:n $x'' + x = 1$, fås

$$s^2 \mathcal{L}x - sx(0) - x'(0) + \mathcal{L}x = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}\,.$$

Således är

$$(\mathcal{L}x)(s) = \frac{1}{1+s^2} \left[\frac{1}{s} + sx(0) + x'(0) \right]\,. \tag{2}$$

Lyckas vi i ovanstående exempel bestämma en funktion $x(t)$ sådan att dess Laplacetransform $(\mathcal{L}x)(s)$ precis är uttrycket i (2), så har vi löst begynnelsevärdesproblemet för DE:n $x'' + x = 1$ med begynnelsevärdena $x(0)$ och $x'(0)$. Orsaken till detta är att bara *en* kontinuerlig funktion $x(t)$ kan ge upphov till transformen $y(s) = (\mathcal{L}x)(s)$.

Den *inversa Laplacetransformen* $\mathcal{L}^{-1}y$ är alltså entydig om den existerar, då man håller sig till mängden av kontinuerliga funktioner. Eftersom $\mathcal{L}$ är linjär, så blir också $\mathcal{L}^{-1}$ automatiskt linjär, så att $\mathcal{L}^{-1}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathcal{L}^{-1} y_1 + c_2 \mathcal{L}^{-1} y_2$. Generellt kan man visa att om för "godtyckliga" funktioner $x_1(t)$ och $x_2(t)$ gäller att $\mathcal{L}x_1 = \mathcal{L}x_2$, så är $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ en *nollfunktion* i den meningen att $\int_0^b z(t)\, dt = 0$ för varje $b > 0$. Detta innebär att funktionen $z(t)$ har värdet noll "nästan överallt".

Då man vill bestämma funktionen $x(t)$ då dess transform $(\mathcal{L}x)(s)$ är känd, är det bra att framför sig ha en lista över transformerna av de elementära funktionerna:

Laplacetransformer av elementära funktioner

Vi såg redan i exempel 8.3 att $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$. För ett godtyckligt $n \geq 0$ fås Laplacetransformen för $f(t) = t^n$ med hjälp av partiell integration

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n\}(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \int_0^\infty t^n d\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right) \\ &= \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s)\,.\end{aligned}$$

Upprepad användning av denna formel ger:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\,.$$

För $x > 0$ är gammafunktionen Γ definierad av $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Vi får därför den allmänna formeln:

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty e^{-st}t^\alpha\,dt = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-st}(st)^\alpha\,d(st) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad (\alpha > -1)\,.$$

För exponentialfunktionen e^{at} blir transformen

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt = \frac{1}{s-a}$$

för $s > \mathrm{Re}(a)$. Eulers likhet, $\sin\omega t = (1/2i)(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$, ger för $s > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin\omega t\} &= \int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{-(s-i\omega)t} - e^{-(s+i\omega)t}\right)dt \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\,.\end{aligned}$$

På samma sätt fås med hjälp av Eulers likhet $\cos\omega t = (1/2)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ att

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

Exempel 8.4. Ovanstående transformer ger lösningen till DE:n $x'' + x = 1$ i exempel 8.3: I

$$\mathcal{L}\{x\}(s) = \frac{1}{s(1+s^2)} + x(0)\frac{s}{1+s^2} + x'(0)\frac{1}{1+s^2} \tag{2}$$

uppdelas den första termen i partialbråk

$$\frac{1}{s(1+s^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{1+s^2}\,,$$

vilket ger

$$(\mathcal{L}x)(s) = \frac{1}{s} + [x(0) - 1]\frac{s}{1+s^2} + x'(0)\frac{1}{1+s^2}\,.$$

Således är

$$x(t) = 1 + [x(0) - 1]\cos t + x'(0)\sin t\,,$$

där konstanten 1 är en partikulärlösning till den givna ekvationen medan de två övriga termerna utgör en lösning till motsvarande homogena ekvation.

Med hjälp av formlerna $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$ och $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ härleder man lätt transformerna för $\sinh at$ och $\cosh at$. Vi kan nu sammanställa en kort lista av Laplacetransformer:

Funktion		**Laplacetransform**
t^n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
t^α	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ $(\alpha > -1)$
e^{at}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$
$\sin\omega t$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh at$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Exempel 8.5. För att bestämma den funktion $f(t)$, som har transformen $F(s) = (3s+5)/(s^2+7)$, skriver vi bråket som en summa av två termer

$$F(s) = \frac{3s}{s^2+7} + \frac{5}{s^2+7}$$

och ser då att $f(t) = 3\cos\sqrt{7}t + (5/\sqrt{7})\sin\sqrt{7}t$.

Exempel 8.6. För att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$x'' - 3x' + 2x = e^{3t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

opererar vi med Laplacetransformationen på DE:ns höger- och vänsterled

$$s^2\mathcal{L}x - sx(0) - x'(0) - 3(s\mathcal{L}x - x(0)) + 2\mathcal{L}x = \frac{1}{s-3}$$

sätter in begynnelsevärdena och löser ut $(\mathcal{L}x)(s)$:

$$(\mathcal{L}x)(s) = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)} + \frac{1}{(s-3)(s-2)(s-1)}\,.$$

Partialbråksuppdelning av dessa bråk ger

$$\begin{aligned}\mathcal{L}x &= \left[\frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2}\right] + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3}\right]\\ &= \frac{5}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3}\,.\end{aligned}$$

Alltså är

$$x(t) = \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}\,.$$

Speciella regler

Vi skall härleda två nyttiga regler rörande Laplacetransformationen. Först noterar vi att följande s.k. *dämpningsregel* omedelbart följer ur transformationens definition:

Sats 8.3. *Om $f(t)$ och $e^{at}f(t)$ har Laplacetransformer, så är*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = (\mathcal{L}f)(s-a)\,.$$

Vi kan därför förlänga listan av Laplacetransformer med t.ex.

$t^n e^{at}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sinh\omega t$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$
$e^{at}\cosh\omega t$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$

Definition 8.2. Funktionen $(f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$ $(t \geq 0)$ kallas *faltningen* eller *konvolutionen* av f och g.

Sats 8.4. (faltningssatsen) *Om $\int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty$ och $\int_0^\infty |g(t)|\,dt < \infty$, så har faltningen $f*g$ en Laplacetransform och denna är produkten av faktorernas Laplacetransformer:*

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g\,.$$

Bevisskiss. Utan att motivera giltigheten hos operationerna fås genom att byta integrationsordning och genom att därefter sätta $v = t-u$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f*g)(s) &= \int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^t f(u)g(t-u)\,du = \int_0^\infty f(u)\,du \int_u^\infty e^{-st}g(t-u)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du \int_0^\infty e^{-sv}g(v)\,dv = (\mathcal{L}f)(s)\,(\mathcal{L}g)(s)\,.\ \diamondsuit\end{aligned}$$

Exempel 8.7. Laplacetransformera DE:n $x''+2x'+5x = 1$ med begynnelsevärdena $x(0) = 1$ och $x'(0) = 0$ samt sätt $F(s) = (\mathcal{L}x)(s)$:

$$(s^2F(s)-s) + 2(sF(s)-1) + 5F(s) = \frac{1}{s}\,.$$

Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{s+2}{s^2+2s+5} + \frac{1}{s}\frac{1}{s^2+2s+5} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2s}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\,.\end{aligned}$$

Enligt dämpningsregeln och faltningssatsen fås lösningen

$$x(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-u}\sin 2u\,du\,,$$

där integralen är faltningen av 1 och $e^{-t}\sin 2t$.

Faltningssatsens främsta betydelse ligger i att om den transformerade funktionen kan spjälkas upp i en produkt $F(s)G(s)$, där $F(s)$ och $G(s)$ är transformer av $f(t)$ respektive $g(t)$, så kan ursprungsfunktionen till $F(s)G(s)$ konstrueras som faltningen av f och g. Ursprungsfunktionen till exempelvis $1/(s-a)(s-b)$ är faltningen av e^{at} och e^{bt},

$$\int_0^t e^{au}e^{b(t-u)}du = e^{bt}\int_0^t e^{(a-b)u}du = \frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$$

(kan också fås genom partialbråksuppdelning). Genom att låta b närma sig a, ser vi att funktionen $1/(s-a)^2$ bör ha ursprungsfunktionen $\frac{d}{da}(e^{at}) = te^{at}$, vilket vi ju redan har härlett med hjälp av dämpningsregeln.

På samma sätt är ursprungsfunktionen till produkten

$$\frac{\omega_1}{s^2+\omega_1^2}\frac{\omega_2}{s^2+\omega_2^2}$$

faltningen av $\sin\omega_1 t$ och $\sin\omega_2 t$, vilket färdigt uträknat (övningsuppgift 9) blir

$$\begin{aligned}&\frac{\omega_1\sin\omega_2 t-\omega_2\sin\omega_1 t}{\omega_1^2-\omega_2^2}\\ &=\frac{1}{\omega_1+\omega_2}\left[\sin\omega_2 t-\omega_2\frac{\sin\omega_2 t-\sin\omega_1 t}{\omega_2-\omega_1}\right].\end{aligned}$$

Då vi här låter ω_2 gå mot $\omega_1=\omega$, så går uttrycket mot $\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t-\omega\frac{d}{d\omega}\sin\omega t) = \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$. Detta ger den första av Laplacetransformerna

$$\begin{array}{lll}\sin\omega t-\omega t\cos\omega t & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}\\ \omega t\cosh\omega t-\sinh\omega t & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{2\omega^3}{(s^2-\omega^2)^2}\\ t\sin\omega t & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\\ t\sinh\omega t & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{2\omega s}{(s^2-\omega^2)^2}\end{array}$$

De övriga fås på liknande sätt (se övningsuppgift 10).

På grund av faltningssatsen kan Laplacetransformationen med fördel användas också på **Volterras integralekvation**

$$x(t) = g(t) + \int_0^t x(s)h(t-s)\,ds\,,$$

som innehåller en faltning av en obekant funktion x med en bekant funktion h. Om F, G respektive H är Laplacetransformerna av x, g och h, så är $F = G + FH$ och således

$F = G/(1-H)$, varur x kan bestämmas. Ekvationen kan uppenbarligen tillåtas innehålla både derivator och faltningar som i t.ex **integrodifferentialekvationen**

$$x'(t) + ax(t) = g(t) + \int_0^t x(s)h(t-s)\,ds\,,$$

med begynnelsevillkoret $x(0) = x_0$. Laplacetransformerad antar den (med samma beteckningar som ovan) formen

$$sF(s) - x_0 + aF(s) = G(s) + F(s)H(s)\,,$$

ur vilket $F(s)$ kan lösas ut.

System av ekvationer

I ett system av linjära DE:r med konstanta koefficienter kan varje ekvation Laplacetransformeras. Systemet blir därigenom algebraiskt och kan lösas genom eliminering.

Exempel 8.8. Då man Laplacetransformerar systemet

$$\begin{cases} x' + y = 1 \\ y' + x = t \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ och låter F och G beteckna transformerna av x respektive y, fås det algebraiska systemet

$$\begin{cases} sF + G = \frac{1}{s} + x_0 \\ \\ sG + F = \frac{1}{s^2} + y_0\,. \end{cases}$$

Eliminering ger

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{s^2} + \frac{x_0}{s} + \frac{x_0}{s(s^2-1)} - \frac{y_0}{s^2-1} \\ G &= -\frac{x_0}{s^2-1} + \frac{y_0 s}{s^2-1}\,. \end{aligned}$$

Lösningen blir alltså

$$\begin{aligned} x(t) &= t + x_0 + x_0 \int_0^t \sinh u\,du - y_0 \sinh t = t + x_0 \cosh t - y_0 \sinh t \\ y(t) &= -x_0 \sinh t + y_0 \cosh t\,. \end{aligned}$$

Laplacetransformationen kan också användas på en ekvation som skrivits med vektor- och matrisbeteckningar:

Betrakta systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ och låt $\mathbf{F}(s)$ och $\mathbf{B}(s)$ vara transformerna av $\mathbf{x}(t)$ respektive $\mathbf{b}(t)$. Eftersom Laplacetransformer bildas komponentvis, fås den transformerade likheten

$$s\mathbf{F}(s) - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{F}(s) + \mathbf{B}(s)\,.$$

Om s inte är ett egenvärde till matrisen A, existerar resolventen $(sI - A)^{-1}$ och $\mathbf{F}(s)$ kan lösas ut:

$$\mathbf{F}(s) = (sI - A)^{-1}(\mathbf{B}(s) + \mathbf{x}(0))\,.$$

Historisk notis. Laplacetransformationen infördes i det grundläggande verket om sannolikhetslära *Théorie analytique des probabilités* av Pierre Simon de Laplace (1749–1827), vilket publicerades första gången år 1812.

Övningsuppgifter

1. Beräkna Laplacetransformerna av $\sinh at$ och $\cosh at$.
2. Beräkna Laplacetransformen av funktionerna
   (a) $\cos^2 \omega t$,
   (b) $\sin^2 \omega t$,
   (c) $t^2 \sin t$.
3. Beräkna Laplacetransformen av funktionerna
   (a) $\sin \omega_1 t \cos \omega_2 t$,
   (b) $\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$,
   (c) $\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$.
4. Visa att funktionen $e^{\sqrt{t}}$ har en Laplacetransform.
5. Beräkna Laplacetransformen av funktionen $(D^3 + D + 1)(e^{-t}/t)$, där D betecknar derivering med avseende på t.
6. Beräkna $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$ genom att utnyttja att $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}/2$.
7. Bestäm ursprungsfunktionen till de Laplacetransformerade funktionerna
   (a) $F(s) = \frac{1}{s^2}\frac{s-a}{s+a}$,
   (b) $F(s) = \frac{1}{s^2-2s+9}$,
   (c) $F(s) = \frac{1}{(s-3)^5}$,
   (d) $F(s) = \frac{1}{s^3-4s^2+3s}$.
8. Lös med hjälp av Laplacetransformen begynnelsevärdesproblemen:
   (a) $x'' - 5x' + 4x = e^{2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1$,
   (b) $2x'' + x' - x = e^{3t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$,
   (c) $x'' - 6x' + 9x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$,
   (d) $x'' + 4x' = \cos 2t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1$.
9. Beräkna faltningen av $\sin \omega_1 t$ och $\sin \omega_2 t$.
10. Visa att
   (a) $\omega t \cosh \omega t - \sinh \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2\omega^3}{(s^2-\omega^2)^2}$,
   (b) $t \sin \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$,
   (c) $t \sinh \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2\omega s}{(s^2-\omega^2)^2}$.
11. En funktion f sägs vara av *exponentiell ordning* i intervallet $[T, \infty[$ om det finns tal M och k, sådana att $|f(t)| \leq Me^{kt}$ för $t > T$. Bevisa följande påståenden:
   (a) Varje kontinuerlig funktion på $[0, \infty[$ av exponentiell ordning har en Laplacetransform;
   (b) Om f och g är funktioner av exponentiell ordning i $[T, \infty[$, så är också fg av exponentiell ordning i samma intervall;

(c) Om f är en kontinuerlig funktion av exponentiell ordning och F är dess Laplacetransform, så är $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

12. Lös med hjälp av Laplacetransformationen begynnelsevärdesproblemen

(a)

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0\,. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + t, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x' = 3x + 3y + t \\ y' = -x - y + 1, \quad x(0) = y(0) = 0\,. \end{cases}$$