System av linjära differentialekvationer
med konstanta koefficienter

Vi skall undersöka system av DE:r av formen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)\,,$$

där A är en reell eller komplex $n \times n$-matris och $\mathbf{b}(t)$ är en funktion med reella eller komplexa värden. Även om A och $\mathbf{b}(t)$ är reella, är det ofta ändamålsenligt att betrakta *komplexa lösningar*: En sådan är en funktion $\mathbf{x}(t)$ med komplexa värden, vilken satisfierar DE:n.

Homogena system

Vi ser först på ett specialfall:

Sats 7.1. *Om A har n linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ och om motsvarande egenvärden är $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, så är*

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n$$

den allmänna komplexa lösningen till den homogena ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Om alla egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ är olika så är $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ linjärt oberoende.

Bevis. Matrisen $F(t) = \left[e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 \cdots e^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n\right]$ med kolonnvektorerna $e^{\lambda_i t}\mathbf{x}_i$ är en fundamentalmatris, ty

$$\det F(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t}x_{11} & \cdots & e^{\lambda_n t}x_{n1} \\ - & & - \\ e^{\lambda_1 t}x_{1n} & \cdots & e^{\lambda_n t}x_{nn} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t} \cdot \det\left[\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n\right]$$

är olik noll, eftersom vektorerna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ är linjärt oberoende.

Antag nu att egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alla är olika. Vi skall genom induktion visa att egenvektorerna är linjärt oberoende. Om $n = 1$ så är $\mathbf{x}_1$ linjärt oberoende, eftersom $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$. Antag att vi redan visat att $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ är linjärt oberoende samt betrakta en linjärkombination

$$(1) \qquad c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}\,.$$

Genom att multiplicera från vänster med A fås $c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, från vilket likheten (1), multiplicerad med λ_k, subtraheras. Vi får att $c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}$, och då är $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$ enligt induktionsantagandet och därmed också $c_k = 0$. Induktion ger att $c_1 = \cdots = c_n = 0$. $\diamondsuit$

Exempel 1.1. I det homogena systemet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

har matrisen egenvärdena 1 och 3. Motsvarande egenvektorer är $(1 \quad -1)^T$ och $(1 \quad 1)^T$. Den allmänna lösningen är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Då matrisen A är reell, är man ofta intresserad av de reella lösningarna till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Antag att A är en reell $n \times n$-matris med egenvärdet $\lambda = \gamma + i\omega$ (och $\overline{\lambda} = \gamma - i\omega$) samt att $\mathbf{y} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ (och $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$), där $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är reella vektorer, är en egenvektor svarande mot λ. Mot λ och $\mathbf{y}$ "svarar" då lösningen $e^{\lambda t}\mathbf{y}$, dvs.

$$\begin{aligned} &e^{\gamma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \\ &e^{\gamma t}(\cos\omega t\,\mathbf{u} - \sin\omega t\,\mathbf{v}) + ie^{\gamma t}(\sin\omega t\,\mathbf{u} + \cos\omega t\,\mathbf{v}) . \end{aligned}$$

Eftersom en funktion $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ är en komplex lösning till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ om och endast om $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ är reella lösningar, erhåller vi som en följd av Sats 7.1:

Korollarium 7.1.1. *Om A är en reell $n \times n$-matris med n linjärt oberoende egenvektorer, så svarar mot ett reellt egenvärde λ med motsvarande reella egenvektor $\mathbf{x}$ en reell lösning*

$$e^{\lambda t}\mathbf{x}$$

samt mot ett par av konjugerat komplexa egenvärden $\lambda = \gamma \pm i\omega$ med motsvarande egenvektorer $\mathbf{y} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$ de reella lösningarna

$$\begin{aligned} &e^{\gamma t}\left(\cos\omega t\,\mathbf{u} - \sin\omega t\,\mathbf{v}\right) , \\ &e^{\gamma t}\left(\sin\omega t\,\mathbf{u} + \cos\omega t\,\mathbf{v}\right) . \end{aligned}$$

Varje reell lösning är en linjärkombination av sådana lösningar.

Det återstår att visa att de i korollariet nämnda lösningarna är "reellt" linjärt oberoende, dvs. att en linjärkombination av dem med reella koefficienter är noll om och endast om alla koefficienter är noll. Vi överlämnar detaljerna åt läsaren.

Exempel 7.2. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

i systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ har egenvärdena $-1 \pm i$ och de motsvarande egenvektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \mp i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Den allmänna reella lösningen till systemet är därför

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin t\right] + C_2 e^{-t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t\right] .$$

Exponentialfunktionen e^{tA}

Alla lösningar till DE:n $x' = ax$ har formen Ce^{at}. I detta avsnitt skall vi visa att lösningarna till systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ på motsvarande sätt har formen $e^{tA}\mathbf{c}$, där $\mathbf{c}$ är en n-vektor och exponentialfunktionen är *definierad* som den matris man får då tA substitueras i Maclaurinutvecklingen av e^x:

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \cdots . \tag{2}$$

En oändlig matrisserie av detta slag sägs vara konvergent om följden av ändliga partialsummor konvergerar elementvis: Om $S_m(t)$ är summan av alla termer med högst graden m, så är matrisfunktionen $S(t)$ seriens summa om $S_m(t)_{i\,k} \to S(t)_{i\,k}$ då $m \to \infty$ för varje par i, k av rad- och kolonnindex.

Sats 7.2. *Matrisserien (2) är konvergent.*

Bevis. Då man beskriver elementvis konvergens är det bekvämt att använda matrisnormen $|B| = \max_{i,k}|b_{ik}|$. Om B och C betecknar godtyckliga $n \times n$-matriser och λ ett tal, så gäller följande enkla räkneregler för denna matrisnorm:

$$\begin{aligned} |B + C| &\le \max(|b_{ik}| + |c_{ik}|) \le |B| + |C| \,, \\ |\lambda B| &= |\lambda| \max |b_{ik}| = |\lambda||B| \,, \\ |BC| &\le \max \sum_j |b_{ij}||c_{jk}| \le n|B||C| \,. \end{aligned}$$

Den tredje av dessa räkneregler ger att $|A^k| \le n^{k-1}|A|^k$ för varje $k \ge 1$. För varje $p \ge 0$ är nu

$$|S_{m+p}(t) - S_m(t)| = \left| \frac{(tA)^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots + \frac{(tA)^{m+p}}{(m+p)!} \right| \le \Sigma_m \,,$$

där

$$\Sigma_m = \frac{1}{n}\left(\frac{(|t|n|A|)^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots \frac{(|t|n|A|)^{m+p}}{(m+p)!} + \cdots \right) \to 0$$

då $m \to \infty$, ty Σ_m är ju "svansen" i den konvergenta Maclaurinutvecklingen av $(1/n)e^{|t|n|A|}$. För varje par i, k av index bildar således matriselementen $S_m(t)_{i\,k}$ en Cauchyföljd som därmed är konvergent. Serien (2) är alltså konvergent. $\diamondsuit$

Anmärkning 1. På samma sätt som i beviset av Sats 7.2 kan man allmänt visa att om $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ är en hel funktion (dvs. en sådan funktion att serieutvecklingen konvergerar för varje komplext z), så konvergerar serien

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots .$$

För seriens summa används den naturliga beteckningen $f(A)$.

Tre viktiga räkneregler gäller för exponentialfunktionen:

Sats 7.3. *För $n \times n$-matriser A och B gäller:*

(*a*) *Om* $AB = BA$ *så är* $e^{A+B} = e^A e^B$*;*
(*b*) $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$*;*
(*c*) $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = e^{tA}A = Ae^{tA}$ *och därmed är* e^{tA} *en fundamentalmatris för systemet* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Bevis. Vi nöjer oss med att skissera beviset (detaljerade motiveringar kan man finna i någon bok i linjär algebra). Notera att den vanliga binomialformeln gäller för uttrycket $(A+B)^p$ om $AB = BA$. Påståendet (a) motiverar vi med

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!}\right) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{A^p B^q}{p!q!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{p+q=r} \frac{r!}{p!q!} A^p B^q = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p} A^{r-p} B^p \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(A+B)^r = e^{A+B} . \end{aligned}$$

Eftersom $A(-A) = (-A)A$, är enligt (a) $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^{A-A} = I$. Således gäller påståendet (b). Påståendet (c) fås genom termvis derivering av serieutvecklingen för e^{tA}:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{tA}) &= \frac{d}{dt}\left(I + tA + \cdots + \frac{t^k A^k}{k!} + \cdots\right) \\ &= A + tA^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} + \cdots \\ &= A\left(I + tA + \cdots + \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots\right) = Ae^{tA} . \diamondsuit \end{aligned}$$

Exponentialfunktionen e^{tA} ger oss ett nytt sätt att få fram lösningarna till ett homogent system av DE:r med konstanta koefficienter:

Sats 7.4. *Låt* A *beteckna en kvadratisk matris. Funktionen* $\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0$ *är den entydiga lösningen till begynnelsevärdesproblemet*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\,.$$

Bevis. Eftersom e^{tA} är en fundamentalmatris enligt Sats 7.3 c), har den allmänna lösningen till systemet formen $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$. Genom att kräva att $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, fås för den konstanta vektorn $\mathbf{c}$ värdet $\mathbf{c} = e^{-t_0 A}\mathbf{x}_0$, vilket ger satsens påstående. $\diamondsuit$

En $n \times n$-matris A sägs vara *diagonaliserbar* om det existerar en icke-singulär matris P sådan att

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ - & - & \cdots & - \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Talen λ_i i D:s diagonal är A:s egenvärden, eftersom

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det P^{-1}\cdot\det(D-\lambda I)\cdot\det P = \\ &= \det(D-\lambda I) = (\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)\,.\end{aligned}$$

I den linjära algebran visas, att om $n\times n$-matrisen A har n linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ (se föregående avsnitt), så är A diagonaliserbar. (I själva verket kan man som P välja den matris $(\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_n)$ som har egenvektorerna som kolonner.) Det finns matriser som inte är diagonaliserbara, t.ex. matrisen

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

I den linjära algebran visas emellertid att för varje matris A finns ett icke-singulärt P, som försätter A i *Jordans normalform*

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_2 & \cdots & 0\\ - & - & \cdots & -\\ 0 & 0 & \cdots & J_p\end{pmatrix},$$

i vilken varje J_k betecknar ett $n_k\times n_k$-*Jordanblock* av formen

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0\\ - & - & - & \cdots & -\\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_k\end{pmatrix} \qquad (k=1,\ldots,p)\,.$$

Talet λ_k i diagonalen i varje block J_k är ett egenvärde till A. Samma egenvärde kan förekomma som diagonalelement i olika Jordanblock. Antalet Jordanblock som innehåller ett visst egenvärde är likamed det maximala antalet linjärt oberoende egenvektorer svarande mot egenvärdet.

Exempel 7.3. Om matrisen A har det tredubbla egenvärdet 2 och antalet motsvarande linjärt oberoende egenvektorer är två, så existerar det ett icke-singulärt P sådant att

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cdot & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & 0 & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

(oväsentliga nollor har bortlämnats). Det finns ett annat icke-singulärt P som överför A på en snarlik normalform, i vilken de två ovan utskrivna Jordanblocken är permuterade. Jordanblockens storlek och antal är nämligen entydigt bestämda av matrisen A men deras ordningsföljd på diagonalen beror av transformationen P.

Sats 7.5. *Låt A, B och P vara $n \times n$-matriser. Antag att P är inverterbar samt att* $P^{-1}AP = B$ (A och B är således similära). *Om $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ är en hel funktion, så är*

$$P^{-1} f(A) P = f(B) .$$

Bevis. Eftersom matrismultiplikation är en kontinuerlig operation, är

$$\begin{aligned} P^{-1} f(A) P &= P^{-1} \left(\lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} a_k A^k \right) P = \lim_{m \to \infty} P^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k A^k \right) P \\ &= \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} a_k P^{-1} A^k P = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} a_k (P^{-1}AP)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k = f(B) . \diamondsuit \end{aligned}$$

Om $P^{-1}AP = J$ är i Jordans normalform så är $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$ enligt satsen. Eftersom potenser av J fås genom att man bildar motsvarande potenser av Jordanblocken $J_1, \ldots, J_p$ i J, är

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & e^{tJ_p} \end{pmatrix} P^{-1} .$$

Om A är diagonaliserbar, är

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1} .$$

Definition 7.1. En matris A sägs vara *nilpotent* om $A^m = 0$ för något positivt heltal m.

Ett Jordanblock är alltid av formen $J_k = \lambda_k I + E$, där E är en matris i vilken alla matriselement är nollor utom de omedelbart ovanför huvuddiagonalen, vilka är ettor. Nu är E^2 en liknande matris men med ettorna två steg ovanför huvuddiagonalen osv.. Om E är en $r \times r$-matris är $E^r = 0$. Då E därmed är nilpotent, har vi en **ändlig** serieutvecklingen för e^{tJ_k}:

$$\begin{aligned} e^{tJ_k} &= e^{t\lambda_k I} e^{tE} = e^{\lambda_k t} \left(I + tE + \cdots + \frac{(tE)^{r-1}}{(r-1)!} \right) \\ &= e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdot & \cdot & t^{r-1}/(r-1)! \\ & 1 & t & & & t^{r-2}/(r-2)! \\ & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Exempel 7.4. Matrisen A nedan är i Jordans normalform (notera att mot egenvärdet 2, som är dubbelt, svarar precis en linjärt oberoende egenvektor, medan mot det tredubbla egenvärdet 0 svarar precis två) och motsvarande exponentialfunktion e^{tA} blir (oväsentliga nollor bortlämnas):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & & & \\ & e^{2t} & & & \\ & & 1 & t & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkning av e^{tA}

Vi skall utveckla en praktiskt metod att härleda explicita slutna formler för exponentialfunktionen e^{tA}. För detta ändamål behöver vi lite teori. Vi börjar med Cayley-Hamiltons sats:

Sats 7.6. *Om $p(\lambda) = 0$ är sekularekvationen för matrisen A, så är $p(A) = 0$.*

Bevis. Det existerar ett inverterbart P sådant att $P^{-1}AP = J$, där J är A:s framställning i Jordans normalform. Enligt Sats 7.5 är

$$p(A) = Pp(J)P^{-1} = P \begin{pmatrix} p(J_1) & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & p(J_q) \end{pmatrix} P^{-1},$$

där $J_1, \ldots, J_q$ betecknar Jordanblocken i J. Om $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_q)^{n_q}$, är

$$p(J_k) = (J_k - \lambda_1 I)^{n_1} \cdots (J_k - \lambda_k I)^{n_k} \cdots (J_k - \lambda_q I)^{n_q} = 0$$

eftersom faktorn $(J_k - \lambda_k I)^{n_k} = 0$ $(k = 1, \ldots, q)$. Alltså är $p(A) = 0$. $\diamondsuit$

Antag nu att A är en $n \times n$-matris och att $p(\lambda)$ är ett polynom sådant att $p(A) = 0$. Enligt Cayley-Hamiltons sats kan vi som polynom p välja det karakteristiska polynomet

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n$$

men om man finner ett polynom med lägre gradtal med samma egenskap, så tar vi naturligtvis detta i stället. I våra fortsatta kalkyler tänker vi oss emellertid att p är det karakteristiska polynomet.

För e^{tA} gör vi ansatsen

$$e^{tA} = \phi_0(t)I + \phi_1(t)A + \cdots + \phi_{n-1}(t)A^{n-1}.$$

Vi kommer att se att existens- och entydighetssatsen garanterar existensen och entydigheten hos koefficientfunktionerna $\phi_k(t)$. Den metod att bestämma funktionerna $\phi_k(t)$ som vi nu skall beskriva är närbesläktad med en metod som i litteraturen tillskrivs Putzer. Tills vidare *antar* vi att varje $\phi(t)$ kan deriveras hur många gånger som helst. I efterskott kommer vi att se att antagandet är berättigat. Eftersom $A^n = -a_0 I - \cdots - a_{n-1}A^{n-1}$, är

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i' A^i = \frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = \sum_{i=1}^{n} \phi_{i-1} A^i = -a_0\phi_{n-1} I + \sum_{i=1}^{n-1} (\phi_{i-1} - a_i \phi_{n-1}) A^i \,.$$

Vi föresätter oss därför att finna funktioner ϕ_i, $i = 0, \ldots, n-1$, som satisfierar systemet

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \phi_0' &= \qquad\;\; - a_0\, \phi_{n-1} \\ \phi_1' &= \phi_0 \quad - a_1\, \phi_{n-1} \\ \; - & - \quad - \quad - \\ \phi_{n-1}' &= \phi_{n-2} - a_{n-1}\phi_{n-1} \end{cases}$$

och för vilka $\phi_0(0) = 1$ och $\phi_k(0) = 0$ för $k = 1, \ldots, n-1$. Antag nu att funktionerna ϕ_i uppfyller dessa krav. Genom att i (3) derivera uttrycket för ϕ_i' i gånger med avseende på t och därefter addera ihop resultaten, kommer vi till att $\phi_{n-1}(t)$ satisfierar den linjära DE:n

$$\text{(4)} \qquad x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0\,.$$

Som ansats för ϕ_{n-1} kan vi alltså ta den allmänna lösningen till (4). De övriga funktionerna fås därefter genom att man använder de $n-1$ sista likheterna i (3) som rekursionsformler (observera att dessa likheter tillsammans med (4) ger den första ekvationen i (3)):

Sats 7.7. *Antag att för en kvadratisk matris A och för polynomet $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$ gäller att $p(A) = 0$. Då är*

$$e^{tA} = \phi_0(t) I + \phi_1(t) A + \cdots + \phi_{n-1}(t) A^{n-1}\,,$$

där funktionerna ϕ_k fås så, att man som ansats för ϕ_{n-1} tar den allmänna lösningen till (4) *samt därefter beräknar övriga funktioner ϕ_k med hjälp av rekursionsformeln*

$$\phi_{k-1} = \phi_k' + a_k \phi_{n-1}, \qquad k = n-1, \ldots, 1\,.$$

Koefficienterna i den allmänna lösningen till (4) *fås ur villkoren $\phi_0(0) = 1$ och $\phi_k(0) = 0$ ($k = 1, \ldots, n-1$). Funktionerna ϕ_k är härigenom entydigt bestämda.*

Bevis. Det begynnelsevärdesproblem som definieras av det linjära systemet (3) och de givna begynnelsevärdena för funktionerna ϕ_k har alltid en entydig global lösning enligt existens- och entydighetssatsen. För matrisfunktionen

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(t) A^k$$

gäller då att

$$F'(t) = AF(t)\,,$$
$$F(0) = I\,.$$

Eftersom också matrisfunktionen e^{tA} satisfierar detta begynnelsevärdesproblem, är $F(t) = e^{tA}$ enligt entydighetssatsen. $\diamondsuit$

Exempel 7.5. Matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ har sekularekvationen $\lambda^2 + 1 = 0$, vilken har lösningarna $\lambda = \pm i$. Vi utgår därför från ansatsen $\phi_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, men eftersom $\phi_1(0)$ bör vara noll, är $C_1 = 0$. Således är $\phi_1(t) = C_2 \sin t$. Eftersom $a_1 = 0$ är $\phi_0(t) = \phi_1' + a_1\phi_1 = C_2 \cos t$ enligt Sats 7.7. Villkoret $\phi_0(0) = 1$ ger att $C_2 = 1$, varför

$$e^{tA} = \phi_0(t)I + \phi_1(t)A = \cos t\, I + \sin t\, A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Exempel 7.6. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

har det dubbla egenvärdet 1 och det enkla egenvärdet -1. Sekularekvationen är således $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, ur vilken vi kan avläsa att $a_2 = a_1 = -1$. För ϕ_2 har vi ansatsen $\phi_2(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{-t}$ och begynnelsevillkoret $\phi_2(0) = 0$ ger att $C_1 + C_3 = 0$. Funktionerna ϕ_1 och ϕ_0 beräknas rekursivt enligt formeln i Sats 7.7:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2' + a_2\phi_2 = C_2 e^t - 2C_3 e^{-t}\,, \\ \phi_0 &= \phi_1' + a_1\phi_2 = (C_2 - C_1 - C_2 t)e^t + C_3 e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren $\phi_1(0) = 0$ och $\phi_0(0) = 1$, tillsammans med det villkor som vi redan härlett, leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0, \\ C_2 - 2C_3 = 0, \\ -C_1 + C_2 + C_3 = 1, \end{cases}$$

vilket har lösningen $C_1 = -1/4$, $C_2 = 1/2$ och $C_3 = 1/4$. Alltså är

$$\begin{cases} \phi_0(t) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t\right) e^t + \frac{1}{4}e^{-t}, \\ \phi_1(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \\ \phi_2(t) = \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \end{cases}$$

och $e^{tA} = \phi_0(t)I + \phi_1(t)A + \phi_2(t)A^2$.

Exempel 7.7. Låt A vara en godtycklig 2×2-matris med egenvärdena λ_1 och λ_2. Sekularekvationen kan skrivas $\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$, dvs. $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ och $a_0 = \lambda_1\lambda_2$. Om egenvärdena är olika, är

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}\,, \\ \phi_0(t) &= \phi_1'(t) + a_1\phi_1(t) = -C_1\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - C_2\lambda_1 e^{\lambda_2 t}\,. \end{aligned}$$

Koefficienterna bör alltså uppfylla villkoren $C_1 + C_2 = 0$ och $C_1\lambda_2 + C_2\lambda_1 = -1$, vilket ger att $C_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} = -C_2$. Efter omformning fås

$$e^{tA} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{\lambda_1 t}(A - \lambda_2 I) - e^{\lambda_2 t}(A - \lambda_1 I)\right] .$$

Det fall då egenvärdena är lika, kan behandlas på ett likartat sätt (se övn.uppg. 9).

I nästa exempel löser vi ett begynnelsevärdesproblem med hjälp av exponentialfunktionen på det sätt som Sats 7.4 anger.

Exempel 7.8. Låt A beteckna matrisen i systemet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

för vilket vi föreskriver begynnelsevärdena $x(1) = 1$ och $y(1) = 2$. Sekularekvationen för A är $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ och bägge egenvärdena är 4. Vi gör därför ansatsen $\phi_1 = (C_1 t + C_2)e^{4t}$ och konstaterar att C_2 måste vara noll, eftersom $\phi_1(0)$ bör vara noll. Vidare är $\phi_0 = \phi_1' + a_1\phi_1 = C_1 e^{4t} - 4C_1 t e^{4t}$, där villkoret $\phi_0(0) = 1$ ger att $C_1 = 1$. Således är

$$e^{tA} = e^{4t}\left[(1 - 4t)I + tA\right] = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 - 2t & 2t \\ -2t & 1 + 2t \end{pmatrix} .$$

Lösningen till det givna begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-1)A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{4t-4}\begin{pmatrix} 2t - 1 \\ 2t \end{pmatrix} .$$

Inhomogena system

I Sats 5.5 härleddes en formel för en partikulärlösning till ett inhomogent system

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)\,, \tag{5}$$

uttryckt med hjälp av en fundamentalmatris $F(t)$. Eftersom e^{tA} är en fundamentalmatris, ger denna formel uttrycket

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\int^t e^{-sA}\mathbf{b}(s)\,ds = \int^t e^{(t-s)A}\mathbf{b}(s)\,ds$$

för en partikulärlösning till (5).

Exempel 7.9. I exempel 7.8 visade vi att om A betecknar den kvadratiska matrisen i systemet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix},$$

så är

$$e^{tA} = e^{4t} \begin{pmatrix} 1-2t & 2t \\ -2t & 1+2t \end{pmatrix}.$$

Enligt Sats 7.3 (b) bildas den inversa matrisen genom att man ersätter t med $-t$. Således är

$$\begin{aligned} \int^t e^{-sA}\mathbf{b}(s)\,ds &= \int^t e^{-4s} \begin{pmatrix} 1+2s & -2s \\ 2s & 1-2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \int^t e^{-3s}\,ds \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

och

$$e^{tA}\int^t e^{-sA}\mathbf{b}(s)\,ds = -\frac{1}{3}e^{4t}e^{-3t} \begin{pmatrix} 1-2t & 2t \\ -2t & 1+2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är en partikulärlösning till det givna systemet.

Låt oss nu se om vi kan säga någonting allmänt om det fall då $\mathbf{b}(t) = e^{\mu t}\mathbf{b}$, där $\mathbf{b}$ är en konstant vektor. Med föregående exempel som modell söker vi efter en partikulärlösning av formen $\mathbf{x}(t) = e^{\mu t}\mathbf{u}$. Insättning i $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\mu t}\mathbf{b}$ ger efter förenkling att $\mathbf{x}(t)$ är en lösning om och endast om den konstanta vektorn $\mathbf{u}$ satisfierar $(\mu I - A)\mathbf{u} = \mathbf{b}$. Om μ är ett egenvärde, kan det inträffa att ingen vektor $\mathbf{u}$ uppfyller denna likhet. I annat fall gäller allmänt:

Sats 7.8. *Om μ inte är ett egenvärde till A, är*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mu t}(\mu I - A)^{-1}\mathbf{b}$$

en partikulärlösning till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\mu t}\mathbf{b}$.

Operatorn $(\mu I - A)^{-1}$ existerar för alla värden på μ, som inte är egenvärden till A, och kallas *resolventen* till A.

Exempel 7.10. För att lösa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

kan vi använda oss av superpositionsprincipen: Om $\mathbf{x}_i(t)$ är en lösning till

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\mu_i t}\mathbf{b}_i \qquad (i = 1,\, 2)\,,$$

så är $\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$ en lösning till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\mu_1 t}\mathbf{b}_1 + e^{\mu_2 t}\mathbf{b}_2$. Låt A vara den kvadratiska matrisen i systemet, sätt $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mathbf{b}_1 = (1 \quad 1)^T$ och $\mathbf{b}_2 = (1 \quad -1)^T$. I exempel 7.9 bestämde vi en partikulärlösning till den första ekvationen (den där $i = 1$), och fann lösningen $\mathbf{x}_1(t) = -(1/3)e^t\,(1 \quad 1)^T$. För att bestämma en partikulärlösning till den andra ekvationen, dvs. till

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\mu_2 t}\mathbf{b}_2 = A\mathbf{x} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

kan vi göra ansatsen $\mathbf{x}_2(t) = e^{3t}\mathbf{u}$ (ty 3 är inget egenvärde till A). Efter insättning finner vi att om $\mathbf{u} = -\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}^T$, så är $\mathbf{x}_2(t)$ en lösning. *Ett annat sätt* är att bestämma resolventen $(3I - A)^{-1}$ med hjälp av Cayley–Hamiltons sats. För att kunna skriva sekularekvationen $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ med hjälp av potenser av $\lambda - 3$, inför vi för ett ögonblick symbolen $x = \lambda - 3$ och får då ekvationen $x^2 - 2x + 1 = 0$, vilken även kan skrivas $(\lambda - 3)^2 - 2(\lambda - 3) = -1$. Enligt Cayley–Hamiltons sats är $(A - 3I)[(A - 3I) - 2I] = (A - 3I)^2 - 2(A - 3I) = -I$, dvs.

$$(3I - A)^{-1} = A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Formeln i Sats 7.8 leder nu till precis samma partikulärlösning $\mathbf{x}_2(t)$ som den vi kom till genom en ansats. Den ursprungliga ekvationen har alltså partikulärlösningen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) = -\frac{1}{3}e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Låt oss till slut betrakta det fall att $\mathbf{b}(t) = e^{\gamma t}(\mathbf{b}_1 \cos \omega t + \mathbf{b}_2 \sin \omega t)$, där $\gamma \pm i\omega$ inte är egenvärden till A. Nu kan $\mathbf{b}(t)$ skrivas

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= e^{\gamma t}\left[\frac{\mathbf{b}_1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - i\frac{\mathbf{b}_2}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\mathbf{b}_1 - i\mathbf{b}_2)e^{(\gamma + i\omega)t} + (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)e^{(\gamma - i\omega)t}\right]. \end{aligned}$$

Men detta innebär (enligt superpositionsprincipen och Sats 7.8) att ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ har en partikulärlösning av formen $\mathbf{x}(t) = e^{\gamma t}(e^{i\omega t}\mathbf{U} + e^{-i\omega t}\mathbf{V})$. En ansats av formen

$$\mathbf{x}(t) = e^{\gamma t}(\cos \omega t\, \mathbf{u} + \sin \omega t\, \mathbf{v})$$

kan således användas.

System av andra ordningen

Ett system av DE:r av andra ordningen med konstanta koefficienter

$$\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}' + B\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)\,, \tag{6}$$

där A och B är kvadratiska matriser, kan alltid återföras på ett system av första ordningen genom att man sätter $\mathbf{x}' = \mathbf{y}$. Genom att på detta sätt fördubbla antalet obekanta funktioner, fås ett system av första ordningen

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + B\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)\,. \end{cases}$$

eller i matrisform

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Detta system av första ordningen kan lösas på vanligt sätt. Systemen (6) och (7) är ekvivalenta i den meningen att varje lösning till (6) genererar en lösning till (7) och omvänt.

Betrakta nu den enklare ekvationen

$$\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}\,, \tag{8}$$

där A antas vara en diagonaliserbar $n \times n$-matris. Då existerar det en inverterbar matris $P = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$, i vilken kolonnvektorerna $\mathbf{x}_k$ är egenvektorer till A och för vilken

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Om vi nu sätter $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$ så får (8) formen $\mathbf{y}'' = D\mathbf{y}$. Detta är ett betydligt enklare system, eftersom det sönderfaller i DE:r $y_k'' = \lambda_k y_k$ $(k = 1, \dots, n)$, som inte är kopplade till varandra. För varje k är $y_k(t) = C_k^{(1)} \exp(\sqrt{\lambda_k} t) + C_k^{(2)} \exp(-\sqrt{\lambda_k} t)$ och således $\mathbf{y}(t) = \sum_k y_k(t)\mathbf{e}_k$, där $\mathbf{e}_k$ $(k = 1, \dots, n)$ betecknar de naturliga enhetsvektorerna. Genom att multiplicera med P från vänster, får vi den allmänna (komplexa) lösningen till (8):

Sats 7.9. *Antag att A är en diagonaliserbar $n \times n$-matris med egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ och att motsvarande linjärt oberoende egenvektorer är $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Då är*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(C_k^{(1)} e^{\sqrt{\lambda_k} t} + C_k^{(2)} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} \right) \mathbf{x}_k$$

den allmänna komplexa lösningen till (8).

Här kan det vara skäl att återkalla i minnet att A är diagonaliserbar t.ex. om alla egenvärden är olika eller om A är en symmetrisk reell matris. I det senare fallet är alla egenvärden reella och egenvektorerna kan då också väljas reella. Sats 7.9 har således t.ex. följande korollarium:

Korollarium 7.9.1. *Om A är en symmetrisk reell matris med negativa egenvärden $\lambda_k = -\omega_k^2$ och motsvarande linjärt oberoende reella egenvektorer $\mathbf{x}_k$ $(k = 1, \dots, n)$, så är*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=1}^{n} \left(C_k^{(1)} \cos(\omega_k t) + C_k^{(2)} \sin(\omega_k t) \right) \mathbf{x}_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_k \cos(\omega_k t - \phi_k) \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

den allmänna reella lösningen till (8).

En liknande teknik kan användas även om A i ekvation (8) inte är diagonaliserbar: Det existerar alltid ett inverterbart P med $P^{-1}AP = J$ i Jordans normalform. Genom att sätta $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$, övergår (8) i en ekvation $\mathbf{y}'' = J\mathbf{y}$, som sönderfaller i ett antal delsystem $\mathbf{y}_k'' = J_k\mathbf{y}_k$, där varje J_k är ett Jordanblock. I ett sådant delsystem sätter vi $\mathbf{z}_k(t) = \mathbf{y}_k'(t)$ och får ett system av första ordningen

$$\mathbf{u}_k' = B_k\mathbf{u}_k\,, \quad \text{varvid} \quad \mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{z}_k \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 & I \\ J_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Genom att sätta in B_k:s potenser

$$B_k^2 = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix},\ B_k^3 = \begin{pmatrix} 0 & J_k \\ J_k^2 & 0 \end{pmatrix},\ B_k^4 = \begin{pmatrix} J_k^2 & 0 \\ 0 & J_k^2 \end{pmatrix},\ \text{etc.}$$

i serieutvecklingen för e^{tB_k} fås:

$$e^{tB_k} = \begin{pmatrix} I + \frac{t^2 J_k}{2!} + \frac{t^4 J_k^2}{4!} + \cdots & tI + \frac{t^3 J_k}{3!} + \frac{t^5 J_k^2}{5!} + \cdots \\ tJ_k + \frac{t^3 J_k^2}{3!} + \frac{t^5 J_k^3}{5!} + \cdots & I + \frac{t^2 J_k}{2!} + \frac{t^4 J_k^2}{4!} + \cdots \end{pmatrix}.$$

Matrisen J_k är nilpotent om egenvärdet i dess diagonal är noll och serieutvecklingarna är då ändliga. Om J_k är t.ex. en 2×2-matris, är i så fall

$$e^{tB_k} = \begin{pmatrix} 1 & t^2/2! & t & t^3/3! \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & t & 1 & t^2/2! \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{y}_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2/2! \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y}_k^{(0)} + \begin{pmatrix} t & t^3/3! \\ 0 & t \end{pmatrix}\mathbf{z}_k^{(0)}.$$

Om egenvärdet λ_k i matrisen J_k:s diagonal inte är noll, har denna matris alltid (minst) en kvadratrot

$$J_k^{1/2} = (\lambda_k I + E)^{1/2} = \sqrt{\lambda_k}\left(I + \frac{E}{2\lambda_k} - \frac{E^2}{8\lambda_k^2} + \cdots\right),$$

där $\sqrt{\lambda_k}$ är någon (komplex) kvadratrot och där utvecklingen i binomialserie är ändlig emedan E är nilpotent. Låt $J_k^{-1/2}$ beteckna inversen till $J_k^{1/2}$. Då är

$$e^{tB_k} = \begin{pmatrix} \cosh\left(tJ_k^{1/2}\right) & J_k^{-1/2}\sinh\left(tJ_k^{1/2}\right) \\ J_k^{1/2}\sinh\left(tJ_k^{1/2}\right) & \cosh\left(tJ_k^{1/2}\right) \end{pmatrix}$$

och $\mathbf{y}_k(t) = \cosh\left(tJ_k^{1/2}\right)\mathbf{y}_k^{(0)} + J_k^{-1/2}\sinh\left(tJ_k^{1/2}\right)\mathbf{z}_k^{(0)}$.

Variabla koefficienter

En DE:n av formen $x' = a(t)x$ har den allmänna lösningen $x(t) = C\exp(\int a(t)\,dt)$. Vi noterar här (utan detaljerade motiveringar) att en liknande formel gäller under vissa starkt begränsande förutsättningar för ett system

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \tag{9}$$

med en variabel koefficientmatris $A(t)$. Låt oss återkalla i minnet att två matriser A och B sägs *kommutera* om $AB = BA$.

Sats 7.10. *Antag att den kvadratiska koefficientmatrisen $A(t)$ är kontinuerlig i ett intervall I samt låt $t_0 \in I$. Om $A(t)$ och matrisen*

$$\tilde{A}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds$$

kommuterar för varje $t \in I$, så är $F(t) = e^{\tilde{A}(t)}$ en fundamentallösning till (9).

Bevisskiss. Eftersom $\tilde{A}'(t) = A(t)$, kommuterar $\tilde{A}(t)$ och $\tilde{A}'(t)$. Med hjälp av detta visar man genom induktion att derivatan av $\tilde{A}(t)^n$ är $nA(t)\tilde{A}(t)^{n-1}$. Då det dessutom gäller att exponentialserien får deriveras termvis, är

$$\frac{dF(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} nA(t)\tilde{A}(t)^{n-1} = A(t)F(t)\,,$$

dvs. $F(t)$ är en fundamentallösning.

Fasporträtt i två dimensioner

Lösningarna $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ till ett system $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ av n DE:r kan uppfattas som parameterframställningar av kurvor, *faskurvor*, i ett n-dimensionellt rum $\mathbf{R}^n$, det s.k. *fasrummet*. Skaran av alla faskurvor utgör systemets *fasporträtt*. Punkter i fasrummet kallas *tillstånd*. Faskurvorna visar alltså hur tillstånden förändras då parametern t ("tiden") växer. För att komplettera bilden brukar man förse faskurvorna med en pilriktning i vektorfältets $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ riktning ("hastighetsfältets" riktning).

Vi skall beskriva alla möjliga typer av fasporträtt för ett homogent system $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ då A är en reell 2×2-matris

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

En *jämviktspunkt* är en punkt $\mathbf{x}$ sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (varvid $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}$ är lösning). Mängden av alla jämviktspunkter är tydligen ett linjärt underrum av det tvådimensionella planet, dvs. antingen

(1) mängden $\{\mathbf{0}\}$,

(2) en rät linje genom origo, eller

(3) hela planet.

Den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ kan skrivas $\lambda^2 - S\lambda + D = 0$, där $S = \operatorname{tr} A$ och $D = \det A$. Egenvärdena λ_1 och λ_2 är alltså

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(S \pm \sqrt{S^2 - 4D}\right).$$

Notera att $\lambda_1 + \lambda_2 = S$ och $\lambda_1\lambda_2 = D$. Vi kan klassificera olika typer av fasporträtt genom att ange att parametrarna D, S och $S^2 - 4D$ är > 0 eller < 0. Dessa typer är *generiska* (dvs. strukturellt stabila) eftersom en mycket liten ändring av matrisen A inte åstadkommer ett teckenbyte för någon av dessa parametrar. Vid "gränsen" mellan de generiska fasporträtten, dvs. där $D = 0$, $S = 0$ eller $S^2 = 4D$ har vi ett antal icke-generiska typer av fasporträtt. En hur liten ändring som helst av matrisen A kan leda till att ett icke-generiskt fasporträtt övergår i en annan typ. Fallen (I) till (V) nedan är generiska (se fig. 2).

I. *Instabil knut* (instabil nod); $D > 0$, $S > 0$, $S^2 > 4D$: Eftersom $\lambda_1 + \lambda_2 = S > 0$ och $\lambda_1\lambda_2 = D > 0$ är λ_1 och λ_2 reella och positiva. Låt $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ vara motsvarande reella egenvektorer. Enligt Sats 1 är $\mathbf{x}(t) = C_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + C_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{x}_2$ den allmänna reella lösningen till systemet. Vi inför ett (eventuellt snedvinkligt) nytt koordinatsystem, genom att skriva alla vektorer som linjärkombinationer av $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ och låta koefficienterna ξ och η utgöra de nya koordinaterna. Vi sätter alltså $\xi = C_1e^{\lambda_1 t}$ och $\eta = C_2e^{\lambda_2 t}$ och finner att alla kurvor av formen $\eta = C\xi^k$, där C är godtyckligt och $k = \lambda_2/\lambda_1$ består av tre faskurvor: Jämviktspunkten är en degenererad faskurva medan de halvor av kurvan som separeras av jämviktspunkten är två andra faskurvor. De räta linjerna i egenvektorernas riktning, dvs. ξ- och η-axlarna kallas *separatriser*. Vardera separatrisen består av tre faskurvor. Jämviktspunkten sägs vara instabil på grund av att faskurvornas pilar pekar bortåt (se fig. 1 (a)).

II. *Instabil spiral* (instabilt fokus); $D > 0$, $S > 0$, $S^2 < 4D$: I detta fall är egenvärdena λ_1 och λ_2 konjugerade komplexa tal $\gamma \pm i\omega$, där $\gamma > 0$ och $\omega \neq 0$. Om $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är reella, är de motsvarande egenvektorerna, så är enligt Korollarium 1.1 de reella lösningarna av formen

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= C_1e^{\gamma t}(\cos\omega t\,\mathbf{u} - \sin\omega t\,\mathbf{v}) + C_2e^{\gamma t}(\sin\omega t\,\mathbf{u} + \cos\omega t\,\mathbf{v})\\ &= Ce^{\gamma t}[\cos(\omega t - \phi)\,\mathbf{u} - \sin(\omega t - \phi)\,\mathbf{v}]\,,\end{aligned}$$

där $\tan\phi = C_2/C_1$ och $C = \sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2}$ (se fig 1 (b)).

(a) (b) (c)

fig. 1

III. *Stabil knut* (stabil nod); $D > 0$, $S < 0$, $S^2 > 4D$: Egenvärdena är reella, negativa och olika. Faskurvorna ser ut som de i fall I men med pilarna omsvängda.

IV. *Stabil spiral* (stabilt fokus); $D > 0$, $S < 0$, $S^2 < 4D$: Egenvärdena är konjugerade komplexa tal $\gamma \pm i\omega$, där $\gamma > 0$ och $\omega \neq 0$. Faskurvorna ser ut som de i fall II men med pilarna omsvängda.

V. *Sadelpunkt*; $D < 0$: Det finns ett negativt egenvärde λ_1 samt ett positivt, λ_2. Enligt Sats 1 är den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{x}_2$, där $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är egenvektorer svarande mot λ_1 respektive λ_2. Som i fall I inför vi ett nytt koordinatsystem och sätter $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}$ och $\eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$. Faskurvor är alltså linjen $\xi = 0$ samt alla kurvor av formen $\eta = C\xi^k$, där $k = (\lambda_1/\lambda_2) < 0$. Precis som i fall I kallas ξ- och η-axlarna *separatriser* (se fig. 1 (c)).

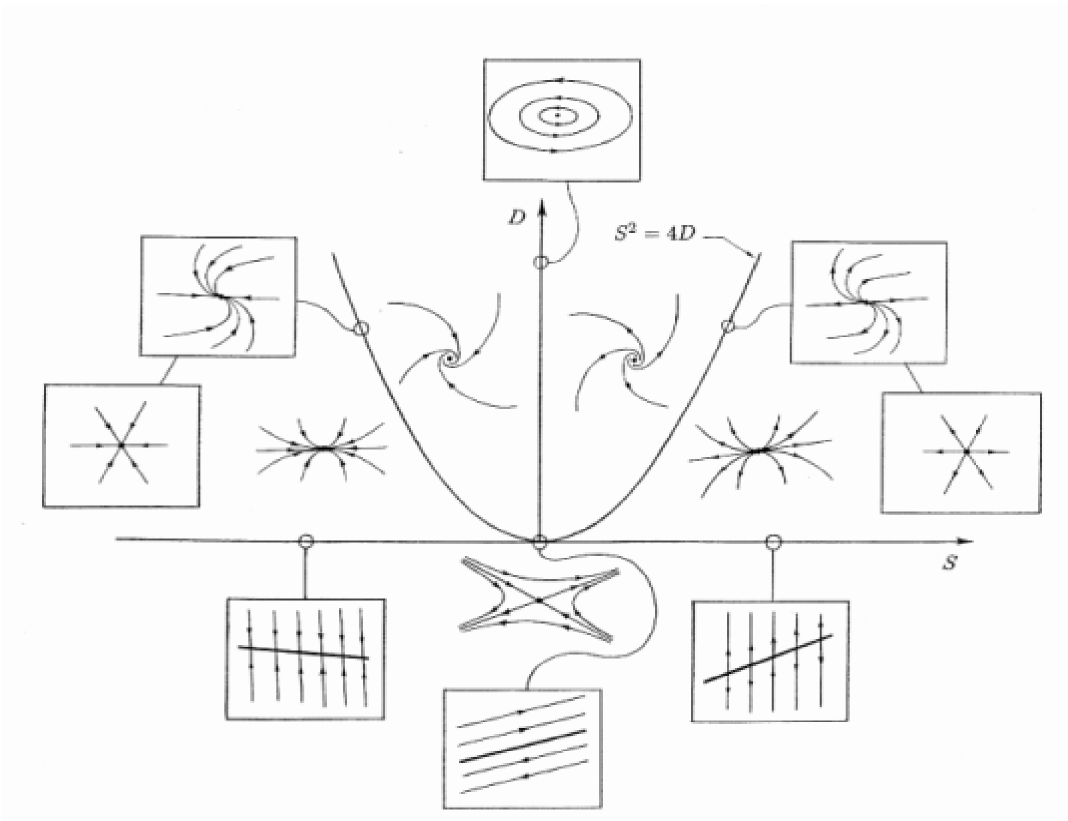


fig. 2

Låt oss nu se på de icke-generiska fallen (gränsfallen):

Oegentlig knut (oegentlig nod); $D > 0$, $S^2 = 4D$: Egenvärdena är lika och reella. Jordans normalform $P^{-1}AP$ är någondera av matriserna

$$(\alpha)\quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad (\beta)\quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ur $D > 0$ följer att $\lambda \neq 0$. Systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ kan skrivas $(P^{-1}\mathbf{x})' = (P^{-1}AP)(P^{-1}\mathbf{x})$. Genom att sätta $(\xi\ \ \eta)^T = P^{-1}\mathbf{x}$, inför vi nya koordinater ξ och η:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \xi' = \lambda\xi + \eta \\ \eta' = \lambda\eta \end{cases} \qquad (\beta)\quad \begin{cases} \xi' = \lambda\xi \\ \eta' = \lambda\eta \end{cases}.$$

Dessa system har de allmänna lösningarna

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \xi = e^{\lambda t}(C_1 t + C_2) \\ \eta = C_1 e^{\lambda t} \end{cases} \qquad (\beta)\quad \begin{cases} \xi = C_1 e^{\lambda t} \\ \eta = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}.$$

I bägge fallen sägs den oegentliga knuten vara instabil om $\lambda > 0$ och stabil om $\lambda < 0$. I fallet (β) är faskurvorna strålar som utgår från jämviktspunkten. Denna sägs därför vara en *stjärnpunkt*.

Centrum (vortex); $D > 0$, $S = 0$: Egenvärdena är konjugerade komplexa tal av formen $\pm i\omega$. Som i fallen II och IV fås den allmänna lösningen

$$\mathbf{x}(t) = C[\cos(\omega t - \phi)\mathbf{u} - \sin(\omega t - \phi)\mathbf{v}]\,.$$

Faskurvorna är tydligen i detta fall en skara av ellipser kring jämviktspunkten.

$D = 0$, $S > 0$: Ett egenvärde är noll medan det andra, λ, är positivt. Enligt Sats 7.1 är $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1 + C_2 e^{\lambda t}\mathbf{x}_2$ den allmänna lösningen då $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ betecknar egenvektorer. I ett $\xi\eta$-koordinatsystem har vi alltså lösningarna $\xi = C_1$, $\eta = C_2 e^{\lambda t}$. Varje punkt på linjen $\eta = 0$, dvs. ξ-axeln, är en jämviktspunkt. Övriga faskurvorna är tydligen strålar, som är parallella med η-axeln och utgår från ξ-axeln.

$D = 0$, $S < 0$: Ett egenvärde är noll medan det andra är negativt. Faskurvorna är som i föregående fall men med pilarna omsvängda.

$D = 0$, $S = 0$: Bägge egenvärdena är noll. Nu är antingen $A = 0$, i vilket fall hela planet består av idel jämviktspunkter, eller så är matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordans normalform för A. Uttryckt i motsvarande ξ- och η-koordinater får vi i det senare fallet systemet

$$\begin{cases} \xi' = \eta \\ \eta' = 0\,, \end{cases}$$

vilket har lösningar av formen $\xi = C_1 t + C_2$, $\eta = C_1$. Faskurvorna är räta linjer parallella med ξ-axeln, försedda med olika pilriktningar på olika sidor om ξ-axeln.

Definition 7.2. Systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sägs vara *asymptotiskt stabilt* om alla lösningar $\mathbf{x}(t)$ går mot $\mathbf{0}$ då $t \to +\infty$. Det sägs vara *stabilt* om alla lösningar är begränsade för $t \geq 0$.

I två dimensioner är tydligen ett system asymptotiskt stabilt, om dess fasporträtt är en stabil knut, en stabil spiral eller en stabil oegentlig knut. I dessa fall är reella delen av varje egenvärde negativt. Stabilt är ett system förutom i dessa fall dessutom om för matrisens determinant D och spår S gäller $D = 0$, $S < 0$ samt om $S = 0$ och $D > 0$. Allmänt gäller:

Sats 7.11. *Systemet* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ *är asymptotiskt stabilt om och endast om* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ *för varje egenvärde* λ *till den kvadratiska matrisen* A.

Bevis. Den metod att beräkna exponentialfunktionen e^{tA}, som beskrevs i Sats 7.7, visar att denna alltid är en summa av ett ändligt antal termer av formen $t^j e^{\lambda_k} p_{jk}(A)$, där λ_k betecknar ett egenvärde till A och p_{jk} är ett polynom. Eftersom $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$ är den allmänna lösningen, gäller för varje lösning $\mathbf{x}(t)$ till systemet att

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \cdots + |t|^j e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t} |p_{jk}(A)\mathbf{c}| + \cdots \to 0\,,$$

då $t \to +\infty$, förutsatt att $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ för varje k. Om å andra sidan $\mathrm{Re}(\lambda_k) \geq 0$ för något k, så går $|t^j e^{\lambda_k t}|$ inte mot noll, då $t \to +\infty$. Eftersom funktionerna $t^j e^{\lambda_k t} p_{jk}(A)\mathbf{c}$ är linjärt oberoende, kan $\mathbf{x}(t)$ inte konvergera mot noll då $t \to +\infty$. $\diamondsuit$

Historiska notiser. Ordet matris infördes år 1850 av James Joseph Sylvester (1814–97) som benämning på ett rektangulärt schema av tal ur vilket olika determinanter kunde bildas. Arthur Cayley (1821–1895) lade grunden för en teori för matriser år 1858. Han införde de grundläggande räknereglerna, gav villkor för när den inversa matrisen existerar och studerade matrisfunktioner, tom. funktionen $\sqrt{A}$. Vidare studerade han egenvärdesproblemet för kvadratiska matriser. Samma år bevisade han för 2×2- och 3×3-matriser den sats, som numera är uppkallad efter honom och Hamilton. William Rowan Hamilton (1805–65) hade redan tidigare bevisat den för vissa 4×4-matriser, som svarar mot s.k. kvaternioner. Ett arbete om Galois-teori år 1870 av Camille Jordan (1838–1922) innehåller Jordans normalform, inte för komplexa matriser utan för matriser med element ur ändliga kroppar. Han var tydligen omedveten om att Karl Weierstrass (1815–97) kommit till liknande resultat redan år 1868.

Övningsuppgifter

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}, \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

2. Lös systemet

$$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z\,. \end{cases}$$

   Utnyttja att $(x + y + z)' = x + y + z$, $(x + y)' = 2z$, etc.

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = (\,2 \quad 2\,)^T$, där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix},$$

4. Beräkna e^{tA} genom att summera potensserien, då A är någon av följande matriser:

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

5. Visa genom att beräkna potenserna av B att

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \text{om} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Använd detta till att beräkna e^{tA} då $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Beräkna e^{tA} om

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Beräkna e^{tA} då A är någon av matriserna

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Låt $F(t)$ vara en godtycklig fundamentalmatris till systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Visa att $e^{tA} = F(t)F(0)^{-1}$.

9. Bestäm e^{tA} då A är en godtycklig 2×2-matris med två egenvärden som är lika.

10. Visa att om A är en 3×3-matris, vilkens alla egenvärden har samma värde λ, så är

$$e^{tA} = \frac{1}{2} e^{\lambda t} \left[(\lambda^2 t^2 - 2\lambda t + 2)I + (-2\lambda t^2 + 2t)A + t^2 A^2 \right].$$

11. Lös begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = (1 \quad 1)^T$, då

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}.$$

12. Bestäm en partikulärlösning till systemet

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_2 + 2\cos 2t \\ x_2' = x_1 - 3x_2 + \cos 2t. \end{cases}$$

13. Två bakteriestammar med populationerna $x(t)$ och $y(t)$ förökar sig inte men "äter" varann med en hastighet som är proportionell mot den ätande stammens storlek. För detta systen använder vi modellen

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha\, y(t) \\ y'(t) = -\beta\, x(t), \end{cases}$$

där α och β är positiva tal. Vilket bör förhållandet $x(0)/y(0)$ vara för att bägge stammarna skall skall leva oändligt länge, dvs. för att $x(t) > 0$ och $y(t) > 0$ skall gälla för varje $t \geq 0$.

14. Lös begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = (0 \quad 3 \quad 2)^T$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

16. Lös begynnelsevärdesproblemet

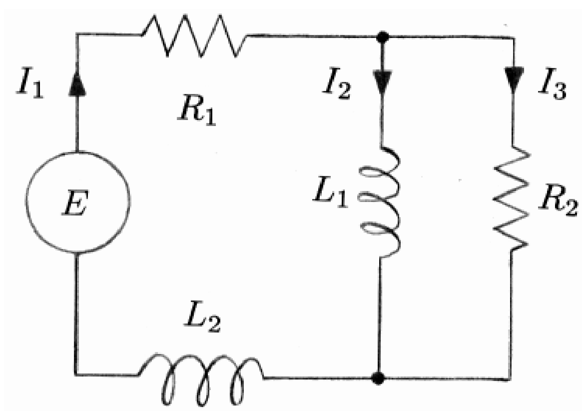
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

17. Bestäm en partikulärlösning till systemet

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_2 + 2\cos 2t \\ x_2' = x_1 - 3x_2 + \cos 2t\,. \end{cases}$$

18. Antag att $\mathbf{x}_0$ är en egenvektor svarande mot egenvärdet λ till matrisen A. Visa att $\mathbf{x}(t) = te^{\lambda t}\mathbf{x}_0$ är en lösning till systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{x}_0$.

19. För kretsen i figuren



uppställer man lätt systemet

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R_1+R_2)/L_2 & R_2/L_2 \\ R_2/L_1 & -R_2/L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E/L_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lös systemet då $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$, $L_1 = L_2 = 1$ H, $E(t) = 100\sin t$ V, $I_1(0) = I_2(0) = 0$.

20. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x_1'' = -5x_1 + 2x_2 \\ x_2'' = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ x_3'' = 2x_2 - 3x_3\,. \end{cases}$$

21. Av tre likadana pendlar, som hänger efter varann, är den första kopplad ihop med den andra och den andra ihop med den tredje medelst två likadana spiralfjädrar. För små svängningar beskrivs pendelsystemet av

$$\begin{cases} x_1'' = -kx_1 + \varepsilon(x_2 - x_1) \\ x_2'' = -kx_2 + \varepsilon(x_1 - x_2) + \varepsilon(x_3 - x_2) \\ x_3'' = -kx_3 + \varepsilon(x_2 - x_3)\,, \end{cases}$$

där x_i, $i = 1, 2, 3$, är respektive pendels utslag och k och ε är positiva konstanter. Bestäm den allmänna lösningen till systemet samt den partikulärlösning som uppfyller kraven $x_1(0) = \alpha$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$, $x_1'(0) = x_2'(0) = x_3'(0) = 0$.

22. Bestäm en fundamentalmatris till systemet $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ då $A(t)$ är någon av matriserna

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. För vilka värden på a är systemet

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + ax_2 \\ x_2' = x_1 - 4x_2\,, \end{cases}$$

asymptotiskt stabilt?

24. Antag att det homogena systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ är asymptotiskt stabilt. Visa att om funktionen $\mathbf{b}(t)$ är begränsad för $t \geq t_0$, är varje lösning till systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ begränsad då $t \geq t_0$.