Linjära differentialekvationer av 2:a ordningen

Homogena ekvationer

Betrakta DE:n

$$L(t,D)x = x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = 0\,.$$

Eftersom lösningsrummet till denna ekvation är tvådimensionellt kommer vilka två lösningar som helst att vara basvektorer i lösningsrummet om de är linjärt oberoende. Vi behöver en metod med vilkens hjälp vi lätt kan visa att n funktioner är linjärt oberoende.

Antag att funktionerna $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots,$ $x_n(t)$ ligger i mängden $\mathcal{C}^{n-1}(I)$. *Wronski-determinanten* för dessa funktioner definierades i föregående kapitel som determinanten

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ . & . & \cdots & . \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Exempel 6.1. Wronski-determinanten för funktionerna $x_1(t) = t$ och $x_2(t) = \ln t$, som är definierade på intervallet $I =]0,\infty[$, är

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} t & \ln t \\ 1 & 1/t \end{vmatrix} = 1 - \ln t\,.$$

Följande sats formulerar vi för det fall att vi har två funktioner. Satsen gäller emellertid generellt för n funktioner och beviset är i det allmänna fallet likartat.

Sats 6.1. *Om funktionerna $x_1(t)$ och $x_2(t)$ i $\mathcal{C}^1(I)$ är linjärt beroende så är Wronski-determinanten $W(x_1,x_2)(t) \equiv 0$ i I.*

Bevis. Om funktionerna $x_1(t)$ och $x_2(t)$ i $\mathcal{C}^1(I)$ är linjärt beroende, finns det tal c_1 och c_2, av vilka minst ett är olikt noll, sådana att $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \equiv 0$. Om t.ex. $c_1 \neq 0$ så är $x_1(t) \equiv -(c_2/c_1)x_2(t) \equiv kx_2(t)$. Därmed är

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} kx_2(t) & x_2(t) \\ kx_2'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \equiv 0\,. \diamondsuit$$

Korollarium 6.1.1. *Om $W(x_1,x_2)(t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$ så är x_1 och x_2 linjärt oberoende i $\mathcal{C}^1(I)$.*

Exempel 6.2. Funktionerna $x_1(t) = \cos t$ och $x_2(t) = \sin t$ är linjärt oberoende, ty

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1\,.$$

Märk, att implikationerna i satsen och korollariet inte kan omvändas: Om $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är linjärt oberoende, så behöver inte $W(x_1, x_2)(t) \not\equiv 0$ gälla i I, vilket följande exempel visar (jfr med Teorem 6.4):

Exempel 6.3. Betrakta funktionerna $x_1(t) = t^2$ och

$$x_2(t) = \begin{cases} t^2 & \text{, för } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{, för } t < 0. \end{cases}$$

Då är x_1 och x_2 linjärt oberoende, ty ur $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \equiv 0$ följer för $t = 1$ att $c_1 + c_2 = 0$ samt för $t = -1$ att $c_1 - c_2 = 0$, varför $c_1 = c_2 = 0$. Men

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t^2 \\ 2t & 2t \end{vmatrix} \equiv 0$$

för $t \geq 0$ och på samma sätt fås att $W(x_1, x_2)(t) \equiv 0$ för $t < 0$. Således är $W(x_1, x_2)(t) \equiv 0$.

Nästa sats är en direkt följd av Korollarium 1.1, eftersom lösningsrummet till en homogen linjär DE är tvådimensionellt.

Sats 6.2. *Antag att $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är två lösningar till DE:n $L(t, D)x = 0$ i intervallet I. Om $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$, så bildar x_1 och x_2 en bas i lösningsrummet till DE:n, dvs. $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ är den allmänna lösningen.*

Exempel 6.4. Lösningarna $x_1(t) = \cos t$ och $x_2(t) = \sin t$ till DE:n $x'' + x = 0$ bildar en bas i lösningsrummet, ty $W(x_1, x_2)(t) \equiv 1$.

Följande lemma, liksom de flesta satser i fortsättningen, gäller (*mutatis mutandis*) för linjära DE:r av godtycklig ordning.

Lemma 6.3. *Om $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är lösningar till DE:n $L(t, D)x = 0$ så satisfierar Wronski-determinanten $W(x_1, x_2)(t)$ DE:n*

$$\frac{dW}{dt} + p(t)\, W = 0\,,$$

dvs. $W(x_1, x_2)(t) = C \exp(-\int^t p(s)\, ds)$ för någon konstant C (Abels formel).

Bevis. *Ett* sätt att bevisa lemmat är att utgå från likheten $x_2\, L(t, D)x_1 - x_1\, L(t, D)x_2 = 0$. Ett bevis som direkt kan generaliseras till det allmänna fallet (som det som ges nedan) är emellertid att föredra. Då man deriverar en determinant skall varje rad (eller kolonn) behandlas som en faktor i en produkt. Om vi betecknar Wronski-determinanten med $W(t)$, är alltså

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -p(t)x_1' - q(t)x_1 & -p(t)x_2' - q(t)x_2 \end{vmatrix} = -p(t)\, W\,.\ \diamondsuit \end{aligned}$$

Teorem 6.4. *Följande påståenden är ekvivalenta för lösningar $x_1(t)$ och $x_2(t)$ i intervallet I till DE:n $L(t, D)x = 0$:*

a) $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ *för något* $t \in I$*;*

b) $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ *för varje* $t \in I$*;*

c) x_1 *och* x_2 *är linjärt oberoende;*

d) x_1 *och* x_2 *bildar en bas i lösningsrummet till DE:n.*

Bevis. Enligt Lemma 6.3 är $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ för varje t om detta gäller för något t. Därför är påståendena a) och b) ekvivalenta. Ur b) följer enligt Korollarium 6.1.1 att x_1 och x_2 är linjärt oberoende, dvs. att påståendet c) gäller. Ur detta följer i sin tur (Sats 6.2) att x_1 och x_2 bildar en bas i lösningsrummet, eftersom detta rum är tvådimensionellt. Om vi dessutom visar att d) implicerar a) så följer att alla påståendena är ekvivalenta. Antag alltså att x_1 och x_2 bildar en bas i lösningsrummet. Låt $t_0 \in I$ vara godtyckligt. Enligt existenssatsen har begynnelsevärdesproblemen

$$\begin{aligned} L(t,D)x &= 0 \\ x(t_0) &= 1 \\ x'(t_0) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{och} \qquad \begin{aligned} L(t,D)x &= 0 \\ x(t_0) &= 0 \\ x'(t_0) &= 1 \end{aligned}$$

lösningar y_1 resp. y_2 som bildar en bas i lösningsrummet enligt Sats 6.2, eftersom

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Lösningarna x_1 och x_2 kan därför framställas som linjärkombinationer av y_1 och y_2: $x_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2$, $x_2 = d_1 y_1 + d_2 y_2$. Då är

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2)(t) &= \begin{vmatrix} c_1 y_1 + c_2 y_2 & d_1 y_1 + d_2 y_2 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' & d_1 y_1' + d_2 y_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = (c_1 d_2 - c_2 d_1)\, W(y_1, y_2)(t)\,. \end{aligned}$$

Vore nu $W(x_1, x_2)(t) = 0$ för varje t så vore $c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$, dvs. $c_1 : d_1 = c_2 : d_2$, och då vore x_1 och x_2 linjärt beroende, vilket strider mot antagandet att d) gäller. Således är $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ för något t. $\diamondsuit$

Konstanternas variation kan användas då man utgående från en given lösning vill bestämma en annan linjärt oberoende lösning. Antag att $x_1(t)$ är en lösning till ekvationen $L(t, D)x = 0$ och att $x_1(t) \neq 0$ *för varje* $t \in I$ (om detta villkor inte är uppfyllt i I, betrakta ett delintervall!). Gör ansatsen $x_2(t) = c(t)\, x_1(t)$. Då är

$$\begin{aligned} x_2' &= c' x_1 + c x_1' \\ x_2'' &= c'' x_1 + 2c' x_1' + c x_1''\,, \end{aligned}$$

varför insättning i $x'' + px' + qx = 0$ efter hyfsning ger

$$c'' + u(t)\, c' = 0\,,$$

där vi har satt $u(t) = (2x_1' + px_1)/x_1$. Funktionen $c(t)$ kan nu bestämmas. Man finner lätt att

$$c(t) = \int^t e^{-\int^s u(\xi)\,d\xi} ds$$

är en lösning. Funktionerna $x_1(t)$ och $x_2(t) = c(t)x_1(t)$ är linjärt oberoende enligt Korollarium 6.1.1, ty på grund av att $c'(t) = \exp(-\int u(t)\,dt) \neq 0$ och $x_1(t) \neq 0$, är

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1 & cx_1 \\ x_1' & cx_1' + c'x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_1' & c'x_1 \end{vmatrix} = c'(t)\,x_1(t)^2 \neq 0\,.$$

Exempel 6.5. Vi ser genast att DE:n $x'' - \frac{t}{1+t^2}x' + \frac{1}{1+t^2}x = 0$ har lösningen $x_1(t) = t$ och gör ansatsen $x(t) = c(t)x_1(t)$. Insättning ger DE:n

$$c''t = \left(\frac{t^2}{1+t^2} - 2\right)c'\,,$$

som har (t.ex.) lösningen

$$c(t) = \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,dt = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) - \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,.$$

Funktionerna $x_1(t) = t$ och $x_2(t) = c(t)x_1(t) = t\ln(t+\sqrt{1+t^2}) - \sqrt{1+t^2}$ bildar nu en bas i lösningsrummet till den ursprungliga DE:n, som således har den allmänna lösningen $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$.

Sturms separations- och jämförelsesats

Teorem 6.5. (Sturms separationssats) *Antag att x_1 och x_2 utgör en bas för lösningsrummet till DE:n $L(t, D)x = 0$. Då har $x_1(t)$ precis ett nollställe mellan varje par av konsekutiva nollställen till $x_2(t)$ och omvänt. Nollställena till $x_1(t)$ och $x_2(t)$ följer alltså turvist efter varann på den reella axeln.*

Bevis. Antag att $x_1(t_1) = 0$, där $t_1 \in I$. Då är $x_1'(t_1) \neq 0$, ty vore $x_1'(t_1) = 0$, så vore $W(x_1, x_2)(t_1) = 0$, vilket strider mot att x_1 och x_2 utgör en bas i lösningsrummet. Antag t.ex. att $x_1'(t_1) > 0$ och sätt $A = \{t | t > t_1,\, x_1(t) = 0\}$. Om $A \neq \emptyset$, låt t_2 vara det minsta talet i A (ett sådant existerar, eftersom A är en sluten mängd som är nedåt begränsad).

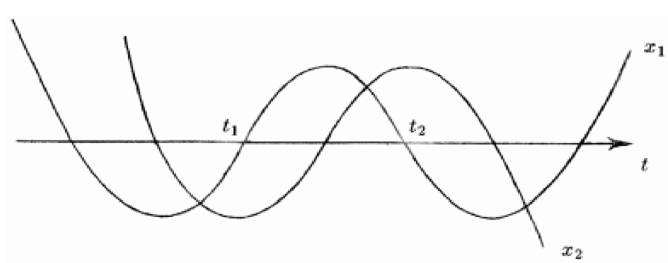

fig. 1

Vi visar att x_2 *har exakt ett nollställe i* $]t_1, t_2[$. Notera först att $x_2(t_1) \neq 0$ och $x_2(t_2) \neq 0$, ty annars vore $W(x_1, x_2)(t_i) = 0$ för $i = 1, 2$. Vidare är

$$W(x_1, x_2)(t_1) = \begin{vmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) \\ x_1'(t_1) & x_2'(t_1) \end{vmatrix} = -x_2(t_1)\, x_1'(t_1)\,,$$

där $x_1'(t_1) > 0$. På samma sätt fås att $W(x_1, x_2)(t_2) = -x_2(t_2)\, x_1'(t_2)$, där $x_1'(t_2) < 0$. Eftersom Wronski-determinanten har formen $W(x_1, x_2)(t) = C \exp(-\int p(t)\, dt)$, så har den samma tecken överallt. Således måste $x_2(t_1)$ och $x_2(t_2)$ ha motsatta tecken, dvs. x_2 måste ha minst ett nollställe i intervallet $]t_1, t_2[$. Skulle x_2 ha flera nollställen i nämnda intervall, så skulle enligt ovanstående resonemang (med funktionerna ombytta) x_1 ha minst ett nollställe där, vilket strider mot valet av t_2.

Om $A = \emptyset$ så kan x_2 ha högst ett nollställe till höger om t_1. Antar man nämligen det motsatta så följer igen som ovan att även x_1 har ett nollställe till höger om t_1, vilket strider mot att A är tomt. Satsens påstående är därmed bevisat. $\diamondsuit$

Med hjälp av samma slags resonemang kan vi få fram ännu ett användbart resultat:

Teorem 6.6. (Sturms jämförelsesats) *Antag att $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är icke-triviala lösningar till*

$$x'' + p(t)x' + q_1(t)x = 0 \quad \text{resp.} \quad x'' + p(t)x' + q_2(t)x = 0\,,$$

där $q_1(t) \geq q_2(t)$. Då gäller antingen att $x_1(t)$ har minst ett nollställe mellan varje par av konsekutiva nollställen t_1 och t_2 till $x_2(t)$ eller så är $q_1(t) = q_2(t)$ mellan t_1 och t_2 och $x_1(t) = kx_2(t)$ i $]t_1, t_2[$ för någon konstant $k \neq 0$.

Bevis. Antag att det första alternativet inte inträffar, dvs. att $x_1(t)$ inte har något nollställe mellan t_1 och t_2. Utan att inskränka på allmängiltigheten kan vi då anta att $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är positiva i $]t_1, t_2[$. Direkt uträkning ger att för Wronski-determinanten $W(t)$ för x_1 och x_2 gäller

$$\begin{aligned} W'(t) &= \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ px_1' + q_1x_1 & px_2' + q_2x_2 \end{vmatrix} \\ &= -pW(t) - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ q_1x_1 & q_2x_2 \end{vmatrix} = -pW(t) + (q_1 - q_2)x_1x_2\,. \end{aligned}$$

Genom att multiplicera $W'(t) + pW(t) = (q_1 - q_2)x_1x_2$ med $\exp(\int^t p(s)ds)$ fås att

$$\frac{d}{dt}\left[W(t)e^{\int^t p\, ds}\right] = (q_1 - q_2)x_1x_2e^{\int^t p\, ds} \geq 0$$

för varje $t \in]t_1, t_2[$. Således är $W(t)\exp(\int^t p\, ds)$ en växande funktion i $]t_1, t_2[$. Men då exponentialfunktionen ju alltid är positiv och då

$$W(t_1) = x_1(t_1)x_2'(t_1) \geq 0 \quad \text{och} \quad W(t_2) = x_1(t_2)x_2'(t_2) \leq 0\,,$$

så innebär detta en motsägelse, ifall inte $q_1(t) \equiv q_2(t)$. I detta fall är $W(t) \equiv 0$ och $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är linjärt beroende (betraktade som funktioner på $]t_1, t_2[$) enligt Teorem 6.4. $\diamondsuit$

Exempel 6.6. Vi skall tillämpa jämförelsesatsen på *Bessels differentialekvation*

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)x = 0 \qquad (t > 0)\,.$$

Lösningarna till denna kallas *Besselfunktioner* av ordningen n. Genom att substituera $x = y/\sqrt{t}$ fås

$$y'' + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4t^2}\right)y = 0\,.$$

Om $|n| < 1/2$, så är parentesen i denna DE större än eller likamed 1. Dess lösningar kan alltså jämföras med lösningarna till DE:n $y'' + y = 0$. Eftersom ändpunkterna av varje slutet intervall med längden π är nollställen till någon lösning $\cos(t - t_0)$ till $y'' + y = 0$, så gäller:

För $|n| < 1/2$ har Besselfunktionerna av ordningen n minst ett nollställe i varje intervall av längden π på den positiva tallinjen. Avståndet mellan konsekutiva nollställen är alltså mindre än π.

Om $|n| > 1/2$ får vi, då vi låter DE:na byta roller:

För $|n| > 1/2$ har Besselfunktionerna av ordningen n högst ett nollställe i varje intervall av längden π på den positiva tallinjen. Avståndet mellan konsekutiva nollställen är alltså större än π.

Besselfunktioner av ordningen $n = \pm 1/2$ har tydligen formen $C\cos(t - t_0)/\sqrt{t}$ (för $t > 0$).

Den inhomogena ekvationen

Låt oss använda metoden med konstanternas variation, som vi inforde redan i kapitel 3, till att bestämma en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen

$$L(t, D)x = x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = g(t)$$

då den allmänna lösningen $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ till den homogena ekvationen $L(t, D)x = 0$ är känd.

Vi gör ansatsen $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ och försöker välja koefficientfunktionerna $c_1(t)$ och $c_2(t)$ så att $x(t)$ blir en lösning till $L(t, D)x = g$. Derivering ger:

$$x' = (c_1x_1' + c_2x_2') + (c_1'x_1 + c_2'x_2)\,.$$

Vi kräver nu att funktionerna c_1 och c_2 är sådana att den andra parentesen är noll, dvs. sådana att

$$c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0\,.$$

Då är $x'' = c_1'x_1' + c_1x_1'' + c_2'x_2' + c_2x_2''$. Insättning i DE:n ger likheten $c_1'x_1' + c_2'x_2' = g$, då man beaktar att x_1 och x_2 är lösningar. Om funktionerna $c_1(t)$ och $c_2(t)$ satisfierar ekvationssystemet

$$\begin{cases} c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0 \\ c_1'x_1' + c_2'x_2' = g\,. \end{cases}$$

så ger alltså ansatsen en lösning till den inhomogena ekvationen. Eftersom ekvationssystemets determinant är $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ så har det en entydig lösning. Eliminering ger:

$$\begin{aligned} c_1'(t)\, W(x_1, x_2)(t) &= -g(t)\, x_2(t) \\ c_2'(t)\, W(x_1, x_2)(t) &= g(t)\, x_1(t)\,, \end{aligned}$$

varur c_1 och c_2 fås genom integration. Vi sammanfattar resultaten i en sats:

Sats 6.7. *Antag att $x_1(t)$ och $x_2(t)$ bildar en bas i lösningsrummet till DE:n $L(t, D)x = 0$ och sätt $W(t) = W(x_1, x_2)(t)$. Då är funktionen $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$, där*

$$c_1(t) = -\int^t \frac{g(s)\, x_2(s)}{W(s)}\, ds \quad \text{och} \quad c_2(t) = \int^t \frac{g(s)\, x_1(s)}{W(s)}\, ds\,,$$

en partikulärlösning till DE:n $L(t, D)x = g(t)$.

Exempel 6.7. Betrakta DE:n $x'' + x = \tan t$ i intervallet $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Den homogena ekvationen har lösningerna $x_1(t) = \cos t$ och $x_2(t) = \sin t$, som är linjärt oberoende då ju $W(x_1, x_2)(t) \equiv 1$. Koefficientfunktionerna $c_1(t)$ och $c_2(t)$ är enligt formeln i satsen

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\int^t \tan s\, \sin s\, ds = -\int^t \frac{\sin^2 s}{\cos s}\, ds = \\ &= \int^t \cos s\, ds - \int^t \frac{ds}{\cos s} = \sin t - \ln\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\,, \\ c_2(t) &= \int^t \tan s\, \cos s\, ds = \int^t \sin s\, ds = -\cos t\,. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till DE:n $x'' + x = \tan t$ i I är därför $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \cos t \cdot \ln\tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})$.

Elementärt om lösningar

Vi har tidigare sett att en DE $x'' + a_1 x' + a_0 x = g(t)$ med konstanta koefficienter kan skrivas $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x = g(t)$, där λ_1 och λ_2 är nollställena till det karakteristiska polynomet $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. En liknande faktorisering av differentialoperatorn $L(t, D) = D^2 + p(t)D + q(t)$ kan uttryckas med hjälp av en partikulärlösning till den homogena ekvationen $L(t, D)x = 0$:

Lemma 6.8. *Om $x_1(t)$ är en icke-trivial partikulärlösning till den homogena DE:n $L(t, D)x = x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ så gäller faktoriseringen $L(t, D) = D^2 + pD + q = (D - r_1)(D - r_2)$ i varje intervall I där $x_1(t) \neq 0$, varvid*

$$r_1 = -\left(p + \frac{x_1'}{x_1}\right) \quad \text{och} \quad r_2 = \frac{x_1'}{x_1}\,.$$

Bevis. En direkt kalkyl ger

$$\begin{aligned}(D-r_1)(D-r_2) &= \left(D+p+\frac{x_1'}{x_1}\right)\left(D-\frac{x_1'}{x_1}\right) = \\ &= D^2 - D\frac{x_1'}{x_1} + pD - p\frac{x_1'}{x_1} + \frac{x_1'}{x_1}D - \left(\frac{x_1'}{x_1}\right)^2 = \\ &= D^2 + \left(\frac{x_1'}{x_1}\right)^2 - \frac{x_1''}{x_1} - \frac{x_1'}{x_1}D + pD - p\frac{x_1'}{x_1} + \frac{x_1'}{x_1}D - \left(\frac{x_1'}{x_1}\right)^2 = \\ &= D^2 + pD + q - \frac{1}{x_1}(x_1'' + px_1' + qx_1) = D^2 + pD + q\,. \diamondsuit\end{aligned}$$

Låt Γ vara en klass av funktioner som är definierade i alla punkter i ett intervall I utom möjligen i enstaka isolerade punkter (som ett exempel, se på $\tan t$ och $\cot t$ i intervallet $\mathbf{R}$). Vi konstruerar nya funktioner genom att använda följande operationer på funktionerna i Γ eller på de nya funktioner som uppstår då operationerna används:

1) addition, subtraktion
2) multiplikation, division
3) derivering, integrering (= bildning av primitiv funktion)
4) exponentiering

Låt $L_0(\Gamma)$ beteckna den klass av funktioner som fås genom att – utgående från funktionerna i Γ – använda operationerna 1) till 4) ett ändligt antal gånger.

Sats 6.9. a) *Om den homogena ekvationen $x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = 0$ har en icke-trivial lösning $x_1(t) \neq 0$ i klassen $L_0(\Gamma)$ och om även p och q finns i $L_0(\Gamma)$, så ligger alla lösningar i klassen $L_0(\Gamma)$.*

b) *Om dessutom gäller att funktionen g tillhör $L_0(\Gamma)$ så ligger alla lösningar till den inhomogena ekvationen $x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = g(t)$ i klassen $L_0(\Gamma)$.*

Bevis. På grund av Lemma 6.8 har vi faktoriseringen $D^2 + pD + q = (D-r_1)(D-r_2)$, där r_1 och r_2 är i $L_0(\Gamma)$. Använd därefter två gånger det faktum att alla lösningar till en linjär ekvation $x' - fx = h$ ligger i $L_0(\Gamma)$ om f och h gör det. $\diamondsuit$

Historiska notiser. Redan Leonhard Euler (1707–83) löste linjära DE:r med variabla koefficienter. Då han 1734-5 bidrog till Daniel Bernoullis teori om svängningar hos hängande linor, uppträdde Besselfunktioner – i princip – i hans lösningar av en viss DE. De var dock dolda i form av oändliga serier. Dessa Besselfunktioner infördes sedan medvetet av astronomen Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) i samband med ett problem inom astronomin rörande planeternas rörelse. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) undersökte mer systematiskt än sina föregångare linjära DE:r med variabla koefficienter. Jacques Charles François Sturm (1803–55), efter vilken separations- och jämförelsesatserna är uppkallade, vann flera utmärkelser för sitt arbete om DE:r av andra ordningen, vilket publicerades år 1834. Sturm var för övrigt den förste som noggrant bestämde ljudets hastighet i vatten. Abels formel härleddes av norrmannen Niels Henrik Abel (1802–29) år 1827.

Övningsuppgifter

1. Är följande funktioner linjärt oberoende?
   (a) t, e^t, e^{2t};
   (b) $\sin t$, $\sin t - t$, t.
2. Bestäm en bas för lösningsrummet till följande DE:r genom att göra ansatsen $x(t) = c(t)x_1(t)$:
   a) $x'' + 2x' + x = 0$, då $x_1(t) = e^{-t}$ är en lösning;
   b) $t^2x'' + 2tx' - 2x = 0$, $t > 0$, då $x_1(t) = t$ är en lösning.
3. Kan funktionerna $x_1(t) = \sin t$ och $x_2(t) = e^t$ ($t \in \mathbf{R}$) utgöra en bas för lösningsrummet till någon homogen, linjär DE av 2:a ordningen?
4. Lös DE:n $x''' - \frac{3}{t}x'' + \frac{6}{t^2}x' - \frac{6}{t^3}x = 0$ då $x_1(t) = t$ är en lösning. (Ledn.: Gör den vanliga ansatsen $x(t) = c(t)\,t$ och bestäm därefter tre *olika* funktioner $c(t)$ så att en bas för lösningsrummet till DE:n, bestående av funktioner av formen $c(t)\,t$, erhålls.)
5. Lös DE:na
$$\text{(a)} \qquad x'' - \frac{3}{t}x' + \frac{3}{t^2}x = 0, \qquad t > 0\,;$$
$$\text{(b)} \qquad x'' - \frac{3}{t}x' + \frac{3}{t^2}x = 2t - 1, \qquad t > 0\,.$$
6. Visa att nollställena hos funktionerna $x_1(t) = a\cos t + b\sin t$ och $x_2(t) = c\cos t + d\sin t$ "separerar varann" (som i Sturms separationssats) om $ad - bc \neq 0$.
7. Antag att funktionen q är kontinuerlig och att $q(t) < 0$ i ett intervall I. Visa att varje icke-trivial lösning till DE:n $x'' + q(t)x = 0$ har högst ett nollställe i I. Gäller detsamma om $q(t) > 0$ i I?