System av linjära differentialekvationer

Ett *linjärt* system av DE:r har den allmänna formen

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \tag{1}$$

där

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ - & - & \cdots & - \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \cdot \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

är givna. I fortsättningen skall vi alltid anta att $A(t)$ och $\mathbf{b}(t)$ är kontinuerliga funktioner av t i något intervall I. (Detta innebär precis detsamma som att anta att dessa matrisers element är kontinuerliga funktioner i I.) Systemet sägs vara *homogent* om $\mathbf{b}(t) \equiv 0$ i I. I motsatt fall sägs det vara *inhomogent*.

Linjära system, som innehåller bara några få likheter, kan ibland lösas med elementära metoder:

Exempel 5.1. Det homogena systemet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

kan också skrivas

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y\,. \end{cases}$$

Då är $x'' = 3x' - 2y' = 9x - 6y - 4x + 4y = 5x - 2y$. Genom att från denna likhet subtrahera $x' = 3x - 2y$, fås en homogen linjär DE med konstanta koefficienter, $x'' - x' - 2x = 0$, som har den allmänna lösningen $x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t}$. Eftersom $y = (3x - x')/2$ så är därmed $y(t) = (C_1/2)e^{2t} + 2C_2e^{-t}$. Varje lösning till vårt system bör alltså ha formen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + C_2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Genom direkt insättning verifierar man lätt att varje funktion $(\, x(t) \quad y(t)\,)^T$ av denna form faktiskt är en lösning. Den allmänna lösningen till systemet innehåller alltså två godtyckliga konstanter.

Existens och entydighet

Sats 5.1. *Antag att $A(t)$ och $\mathbf{b}(t)$ i ekvation (1) är kontinuerliga i ett intervall I samt att $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \mathbf{R}^n$. Då existerar i I en entydig global lösning till (1) som uppfyller begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.*

Bevis. Om vi sätter $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, så är för $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

$$|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})| = |A(t)\,\mathbf{e}_{\mathbf{xy}}| \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\,,$$

där $\mathbf{e}_{\mathbf{xy}} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ är en enhetsvektor (dvs. en vektor med beloppet 1). Låt I_1 vara ett godtyckligt slutet, begränsat delintervall av I och låt S beteckna mängden av alla enhetsvektorer i $\mathbf{R}^n$. Då är mängden $I_1 \times S$ sluten och begränsad och funktionen $(t,\mathbf{x}) \mapsto |A(t)x|$ är kontinuerlig, eftersom den är en sammansättning med hjälp av addition och multiplikation av de kontinuerliga matriselementen i $A(t)$ samt av beloppsfunktionen. Men en kontinuerlig funktion är begränsad på en sluten, begränsad mängd (se någon bok i flerdimensionell analys). Således existerar det ett tal L sådant att $|A(t)\,\mathbf{e}| \leq L$ för varje $t \in I_1$ och $\mathbf{e} \in S$ och därmed uppfyller $\mathbf{f}$ ett Lipschitzvillkor i $I_1 \times \mathbf{R}^n$. Påståendet i Sats 5.1 följer nu ur Korollarium 4.2.1. $\diamondsuit$

Med hjälp av Sats 5.1 kommer vi i Korollarium 5.2.1 att visa att den allmänna lösningen till (1) innehåller precis n stycken godtyckliga konstanter, eller uttryckt på ett mer exakt sätt, att det s.k. lösningsrummet till det homogena systemet

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}\,. \tag{2}$$

är n-dimensionellt.

Definition 5.1. Mängden av alla vektorvärda funktioner $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ $(t \in I)$, som är lösningar till (2), kallas *lösningsrummet* till (2). Vi betecknar detta med $\mathcal{V}$.

Anmärkning 1. Mängden $\mathcal{V}$ utgör en fullständig lösning till (2), eftersom varje lösning till (2) är en restriktion till något delintervall av I av någon funktion i $\mathcal{V}$.

Anmärkning 2. Mängden av alla funktioner på I bildar ett vektorrum. Eftersom för godtyckliga funktioner $\mathbf{x}_1(t)$ och $\mathbf{x}_2(t)$ i $\mathcal{V}$ också summan $\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$ och varje multipel $c\,\mathbf{x}_1(t)$ är funktioner i $\mathcal{V}$, så är $\mathcal{V}$ ett underrum av detta. Alltså är också lösningsrummet $\mathcal{V}$ ett vektorrum.

Homogena system

Vi skall nu visa att vektorrummen $\mathcal{V}$ och $\mathbf{R}^n$ är isomorfa genom att konstruera en bijektiv (= injektiv och surjektiv) linjär avbildning från $\mathcal{V}$ till $\mathbf{R}^n$. För detta ändamål tar vi ett godtyckligt $t_0 \in I$ samt definierar avbildningen (funktionen)

$$\Phi_{t_0} : \mathcal{V} \to \mathbf{R}^n$$

genom att för en godtycklig lösning $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{V}$ sätta $\Phi_{t_0}(\mathbf{x}(\cdot))$ likamed funktionsvärdet $\mathbf{x}(t_0)$. Avbildningen Φ_{t_0} är linjär, ty för godtyckliga $\mathbf{x}_1(\cdot)$, $\mathbf{x}_2(\cdot) \in \mathcal{V}$ och för varje tal c är

$$\Phi_{t_0}(\mathbf{x}_1(\cdot) + \mathbf{x}_2(\cdot)) = \mathbf{x}_1(t_0) + \mathbf{x}_2(t_0) = \Phi_{t_0}(\mathbf{x}_1(\cdot)) + \Phi_{t_0}(\mathbf{x}_2(\cdot))$$
$$\Phi_{t_0}(c\mathbf{x}_1(\cdot)) = c\mathbf{x}(t_0) = c\Phi_{t_0}(\mathbf{x}_1(\cdot))\,.$$

Avbildningen är Φ_{t_0} injektiv, ty om $\mathbf{x}_1(\cdot)$ och $\mathbf{x}_2(\cdot)$ är två lösningar i $\mathcal{V}$ som har samma värde i t_0, så är de lika enligt entydighetssatsen. Vidare är Φ_{t_0} surjektiv enligt existenssatsen, ty för varje givet värde $\mathbf{x}_0$ existerar det en global lösning $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{V}$ med $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Vi sammanfattar detta i en sats:

Teorem 5.2. *För ett godtyckligt $t_0 \in I$ är avbildningen $\Phi_{t_0} : \mathcal{V} \to \mathbf{R}^n$, som avbildar en funktion $\mathbf{x}(\cdot)$ på dess värde $\mathbf{x}(t_0)$ i t_0, en linjär isomorfism.*

En linjär isomorfism mellan två vektorrum (som Φ_{t_0} och dess inversa avbildning $\Phi_{t_0}^{-1}$) avbildar linjärt oberoende vektorer på linjärt oberoende vektorer och baser på baser (detta är lätt att visa!). Således gäller:

Korollarium 5.2.1. *Funktionerna $\mathbf{x}_1(\cdot), \ldots, \mathbf{x}_k(\cdot) \in \mathcal{V}$ är linjärt oberoende i $\mathcal{V}$ om och endast om vektorerna $\mathbf{x}_1(t_0), \ldots, \mathbf{x}_k(t_0)$ är linjärt oberoende i $\mathbf{R}^n$ och funktionerna $\mathbf{x}_1(\cdot), \ldots, \mathbf{x}_n(\cdot) \in \mathcal{V}$ bildar en bas i $\mathcal{V}$ om och endast om vektorerna $\mathbf{x}_1(t_0), \ldots, \mathbf{x}_n(t_0)$ bildar en bas i $\mathbf{R}^n$. Således är $\dim \mathcal{V} = n$.*

Definition 5.2. En matris $F(t) = (\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n(t)\,)$ sägs vara en *fundamentalmatris* till systemet $\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$ om kolonnvektorerna $\mathbf{x}_1(\cdot)$, $\mathbf{x}_2(\cdot)$,..., $\mathbf{x}_n(\cdot)$ utgör en bas för lösningsrummet $\mathcal{V}$ till systemet.

Eftersom en matris deriveras elementvis, är

$$\begin{aligned} F'(t) &= (\,\mathbf{x}_1'(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n'(t)\,) = (\,A(t)\mathbf{x}_1(t) \quad \cdots \quad A(t)\mathbf{x}_n(t)\,) = \\ &= A(t)\,(\,\mathbf{x}_1(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n(t)\,) = A(t)F(t)\,, \end{aligned}$$

dvs. matrisen $F(t)$ satisfierar DE:n $\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$.

Anmärkning 3. Om $F(t) = (\,\mathbf{x}_1(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n(t)\,)$ är en fundamentalmatris till systemet $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, så representerar uttrycket

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) = F(t)\mathbf{c}\,,$$

där $\mathbf{c} = (c_1 \cdots c_n)^T$ är en godtycklig vektor, systemets *allmänna lösning*, eftersom varje funktion i lösningsrummet $\mathcal{V}$ är en linjärkombination av denna form.

Definition 5.3. Om $F(t) = (\,\mathbf{x}_1(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n(t)\,)$ är en kvadratisk matris, så kallas $\det F(t)$ *Wronski-determinanten* för $F(t)$.

Eftersom kolonnerna $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ i en $n \times n$-matris $A = (\,\mathbf{a}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n\,)$ bildar en bas i $\mathbf{R}^n$ om och endast om A är icke-singulär och detta i sin tur gäller om och endast om $\det A \neq 0$, så följer ur Korollarium 5.2.1:

Sats 5.3. *För funktioner $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ i lösningsrummet $\mathcal{V}$ till det homogena systemet $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}(t)$ är nedanstående påståenden ekvivalenta:*

(*i*) *Matrisen $F(t) = (\,\mathbf{x}_1(t) \quad \ldots \quad \mathbf{x}_n(t)\,)$ är en fundamentalmatris till systemet;*

(*ii*) *Wronski-determinanten $\det F(t) \neq 0$ för varje $t \in I$;*

(*iii*) *Wronski-determinanten $\det F(t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$;*

Exempel 5.2. Eftersom lösningarna

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{x}_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

till systemet i exempel 1 uppspänner hela lösningsrummet, så måste de vara linjärt oberoende. Matrisen

$$F(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \tag{3}$$

är således en fundamentalmatris till systemet. Ett annat och enklare sätt att visa att $\mathbf{x}_1(\cdot)$ och $\mathbf{x}_2(\cdot)$ är linjärt oberoende är att konstatera att Wronskideterminanten $\det F(t) = 4e^t - e^t = 3e^t \neq 0$ för varje t.

Inhomogena system

Samma samband som i en dimension råder mellan lösningar till det inhomogena systemet (1) och lösningar till det homogena systemet (2):

Sats 5.4. *Låt $\mathbf{x}_1(t)$ beteckna en partikulärlösning till det inhomogena systemet* (1)*. Då är $\mathbf{x}_1(\cdot) + \mathcal{V} = \{\mathbf{x}_1(\cdot) + \mathbf{x}(\cdot) | \mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{V}\}$ en fullständig lösning till* (1)*.*

Mängden av alla lösningar (definierade på I) till (1) fås alltså genom att man i vektorrummet av alla funktioner på I förskjuter $\mathcal{V}$ medelst vektorn $\mathbf{x}_1(\cdot)$.

Bevis. Genom insättning ser man att om $\mathbf{x}(t)$ är en lösning till (2), så är $\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}(t)$ en lösning till (1). Antag nu att $\mathbf{y}(t)$ är en godtycklig lösning till (1). Då kan $\mathbf{y}(t)$ entydigt utvidgas till en lösning som är definierad på hela I, eftersom mot varje begynnelsevärdesvillkor $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ($t_0 \in I$) svarar en entydig global lösning enligt Sats 5.1. Sätt $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}_1(t)$. Då är $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) - A(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}(t) - \mathbf{b}(t) \equiv 0$, dvs. $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{V}$ och $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}(t)$. $\diamondsuit$

Antag att en fundamentalmatris $F(t)$ (och därmed den allmänna lösningen $F(t)\mathbf{c}$) till det homogena systemet (2) är känd. Då kan en partikulärlösning till det inhomogena systemet

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \tag{4}$$

bestämmas medelst *konstantens variation*:

Vi gör ansatsen $\mathbf{x}(t) = F(t)\mathbf{c}(t)$ och bestämmer den vektorvärda funktionen $\mathbf{c}(t)$ så att ansatsen faktiskt blir en lösning till (4). På grund av att derivering av matriser och vektorer sker element- resp. komponentvis, kommer den vanliga deriveringsregeln för derivering av en produkt att gälla för matrisprodukter. Således är

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= F'(t)\mathbf{c}(t) + F(t)\mathbf{c}'(t) \\ &= A(t)F(t)\mathbf{c}(t) + F(t)\mathbf{c}'(t) \\ &= A(t)\mathbf{x}(t) + F(t)\mathbf{c}'(t)\,, \end{aligned}$$

ty $F'(t) = A(t)F(t)$. Nu ser vi att om $\mathbf{c}(t)$ väljs så att $F(t)\mathbf{c}'(t) \equiv \mathbf{b}(t)$, så är $\mathbf{x}(t)$ en lösning till (4). Men detta villkor är uppfyllt t.ex. för funktionen

$$\mathbf{c}(t) = \int_{t_0}^{t} F(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds \qquad (t_0 \in I)\,.$$

Vi sammanfattar detta i en sats:

Sats 5.5. *Antag att $n \times n$-matrisen $A(t)$ och n-vektorn $\mathbf{b}(t)$ är kontinuerliga i intervallet I samt att $F(t)$ är en fundamentalmatris till $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. För ett godtyckligt $t_0 \in I$ är då*

$$\mathbf{x}(t) = F(t) \int_{t_0}^{t} F(s)^{-1} \mathbf{b}(s)\, ds$$

en partikulärlösning till (4) *som uppfyller begynnelsevillkoret* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$.

Sats 5.4 och Sats 5.5 ger nu tillsammans:

Korollarium 5.5.1. *Den allmänna lösningen till* (4) *är*

$$\mathbf{x}(t) = F(t)\mathbf{c} + F(t) \int_{t_0}^{t} F(s)^{-1} \mathbf{b}(s)\, ds\,.$$

Exempel 5.3. I det föregående exemplet visade vi att det homogena systemet svarande mot

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

har fundamentalmatrisen (3). Genom att för den inversa matrisen göra ansatsen

$$F(t)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

och utnyttja likheten $F(t)F(t)^{-1} = I$, fås ekvationssystemen

$$\begin{cases} 2e^{2t}a + e^{-t}c = 1 \\ e^{2t}a + 2e^{-t}c = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2e^{2t}b + e^{-t}d = 0 \\ e^{2t}b + 2e^{-t}d = 1 \end{cases}$$

ur vilka följer att $a = \frac{2}{3}e^{-2t}$, $c = -\frac{1}{3}e^{t}$ och $b = -\frac{1}{3}e^{-2t}$, $d = \frac{2}{3}e^{t}$. Om vi sätter $\mathbf{b}(t) = (\, e^{-t} \quad 0\,)^T$ så är

$$F(t)^{-1}\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} \\ -\frac{1}{3}e^{t} & \frac{2}{3}e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-3t} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

och

$$F(t)\int_0^t F(s)^{-1}\mathbf{b}(s) ds = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9}(1 - e^{-3t}) \\ -\frac{1}{3}t \end{pmatrix} = \frac{e^{-t}}{9} \begin{pmatrix} 4(e^{3t} - 1) - 3t \\ 2(e^{3t} - 1) - 6t \end{pmatrix},$$

vilket enligt Sats 5.5 är en partikulärlösning till det inhomogena systemet. Vid integrationen har vi här använt den undre gränsen $t_0 = 0$. Genom att använda en annan undre gräns, fås en annan partikulärlösning. Enligt Sats 5.4 är skillnaden mellan två sådana partikulärlösningar alltid en lösning till det homogena systemet.

Tillämpning på linjära ekvationer

För tydlighetens skull diskuterar vi i fortsättningen DE:r av tredje ordningen. Allt som sägs kan emellertid direkt generaliseras till DE:r av godtycklig ordning.

I föregående kapitel såg vi att en DE av formen

$$L(t,D)x = x''' + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t)\,,$$

där $g(\cdot)$ och $a_i(\cdot)$, $(i = 0, 1, 2)$, är kontinuerliga funktioner och $L(t, D)$ betecknar differentialoperatorn $D^3 + a_2(t)D^2 + a_1(t)D + a_0(t)$, kan överföras på ett system

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - a_2(t)x_3 + g(t)\,, \end{cases}$$

vilket i matrisform blir $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, där

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Om $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ och $y_3(\cdot)$ är linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen $L(t, D)x = 0$, är

$$F(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \mathbf{u}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{pmatrix}$$

en fundamantalmatris till det homogena system som svarar mot (5). Determinaten $\det F(t)$ kallas *Wronski-determinanten* för funktionerna $y_1(t)$, $y_2(t)$ och $y_3(t)$ (se nästa kapitel). Mängden $\{y_1, y_2, y_3\}$ av dessa funktioner kallas ett *fundamentalsystem.* (Observera att determinanten för det ekvationssystem, som metoden med konstanternas variation ger upphov till i kapitel 3, är Wronski-determinanten för ett fundamentalsystem.)

Låt oss beteckna inversen till $F(t)$ med $F(t)^{-1} = (\,\mathbf{v}_1(t) \quad \mathbf{v}_2(t) \quad \mathbf{v}_3(t)\,)$. Då är enligt Sats 5.5

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} &= F(t)\int_{t_0}^t F(s)^{-1}\mathbf{b}(s)ds = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \mathbf{u}_3(t) \end{pmatrix} \int_{t_0}^t (\,\mathbf{v}_1(s) \quad \mathbf{v}_2(s) \quad \mathbf{v}_3(s)\,) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \mathbf{u}_3(t) \end{pmatrix} \int_{t_0}^t \mathbf{v}_3(s)g(s)\,ds \end{aligned}$$

en partikulärlösning till (5) med begynnelsevärdet $\mathbf{0}$ i t_0. Den första komponenten

$$y(t) = \int_{t_0}^t K(t,s)g(s)\,ds\,,$$

där $K(t,s) = \mathbf{u}_1(t)\mathbf{v}_3(s)$, är således en partikulärlösning till begynnelsevärdesproblemet $L(t,D)x = g(t)$, $y(t_0) = y'(t_0) = y''(t_0) = 0$.

Vi formulerar följande sats för DE:r av n:e ordningen trots att vi bevisar den enbart i fallet $n = 3$:

Sats 5.6. a) *Funktionen* $K(t,s)$ (*fundamentallösningen* till operatorn $L(t,D)$) *är den entydiga lösningen till begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{cases} L(t,D)x = 0 \\ x(s) = x'(s) = \cdots = x^{(n-2)}(s) = 0 \\ x^{(n-1)}(s) = 1\,. \end{cases}$$

b) *Funktionen* $y(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)g(s)\,ds$ *är en lösning till begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{cases} L(t,D)x = g(t) \\ x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0\,. \end{cases}$$

Bevis. a) (antag att $n = 3$) För varje s är $K(\cdot,s)$ (enligt definitionen) en linjärkombination av $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ och $y_3(\cdot)$. Således är $K(t,s)$ för varje s en lösning till $L(t,D)x = 0$. Då det dessutom gäller att $F(s)F(s)^{-1} = I$, är $\mathbf{u}_i(s)\mathbf{v}_j(s) = \delta_{ij}$. Detta ger att

$$\begin{aligned} K(s,s) &= \mathbf{u}_1(s)\mathbf{v}_3(s) = 0 \\ K'(s,s) &= \mathbf{u}_1'(s)\mathbf{v}_3(s) = \mathbf{u}_2(s)\mathbf{v}_3(s) = 0 \\ K''(s,s) &= \mathbf{u}_1''(s)\mathbf{v}_3(s) = \mathbf{u}_3(s)\mathbf{v}_3(s) = 1\,. \end{aligned}$$

Påståendet b) följer direkt ur Sats 5.5. $\diamondsuit$

Historiska notiser. Begreppet fundamentalsystem för linjära DE:r av högre ordning infördes år 1866 av Lazarus Fuchs (1833–1902). Wronski-determinanten infördes redan år 1821 av Josef Hoëné Wronski (1778–1853).

Övningsuppgifter

Bestäm i uppgifterna 1–3 en fundamentalmatris på intervallet $]0,\infty[$ till det angivna systemet.

1.
$$\begin{cases} x' = -\frac{2y}{t^2} \\ y' = -x\,. \end{cases}$$

Ledning: Lös $y(t)$ ur en DE av Eulers typ.

2.

$$\begin{cases} tx' = 6x - 3y \\ ty' = 2x + y\,. \end{cases}$$

Ledning: Använd substitutionen $t = e^\tau$.

3.

$$\begin{cases} 2t^2x' = -tx + y \\ 2ty' = tx + y\,. \end{cases}$$

Ledning: Härled en DE av Eulers typ för $x(t)$.

4. Bestäm fundamentallösningen $K(t,s)$ för operatorn $L(D) = D^3$ (dvs. fundamentallösningen till $x''' = 0$). Använd denna för att lösa problemet $x'''(t) = 2t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
5. Bestäm en fundamentallösning till DE:n $x'' - x = 0$. Lös med hjälp av denna DE:n $x'' - x = e^t \sin t$.
6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}.$$

7. Antag att $F(t) = (\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t)\,)$ är en fundamentalmatris till systemet $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ (där $A(t)$ är en kontinuerlig 2×2-matris). Visa att Wronski-determinanten $W(t) = \det F(t)$ satisfierar DE:n $W'(t) = \mathrm{tr}A(t)W(t)$, där $\mathrm{tr}A(t)$ betecknar *spåret* av matrisen $A(t)$, dvs. summan av diagonalelementen. Härled därefter *Abels formel*

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(s)\,ds}\,.$$

8. Lös i intervallet $]0,\infty[$ systemet

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t^2}y + t \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2t}y + t^2 \end{cases}$$

med hjälp av den fundamentallösning som härletts i uppgift 3.