Allmänna existens- och entydighetssatser

Om vissa förutsättningar är uppfyllda har – som vi kommer att se – ett begynnelsevärdesproblem av formen $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ en entydig lösning. För system av DE:r av första ordningen (se definitionen nedan) bevisar man på samma sätt en motsvarande existens- och entydighetssats för begynnelsevärdesproblem. I slutet av detta avsnitt kommer vi att se att ett begynnelsevärdesproblem för en DE av n:te ordningen kan återföras på ett dylikt begynnelsevärdesproblem för ett system.

Definition 4.1. Ett *system* (i normalform) av n DE:r av första ordningen har det allmänna utseendet

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\,, \end{cases} \tag{1}$$

där $f_1, f_2, \dots, f_n$ är givna funktioner. En *lösning* till systemet består av n funktioner $x_1(t)$, $x_2(t), \dots,$ $x_n(t)$ som satisfierar alla de n ekvationerna.

Genom att införa vektorvärda funktioner $\mathbf{x}(t)$ och $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, definierade av

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\mathbf{x}) \\ f_2(t,\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix}\,,$$

kan systemet (1) skrivas i den kompakta formen $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Exempel 4.1. En DE av andra ordningen som t.ex. $x'' + t^2x' + tx = e^t$, återförs på ett ekvationssystem av första ordningen genom att man sätter $x' = y$:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -t^2y - tx + e^t\,. \end{cases}$$

Lipschitzvillkor

Ett begynnelsevärdesproblem behöver ingalunda ha bara en lösning. Detta visas av följande exempel:

Exempel 4.2. Problemet $x' = \sqrt[3]{x}$, $x(0) = 0$, har åtminstone lösningen $x(t) \equiv 0$. Eftersom variablerna kan separeras, gäller för varje annan lösning $x(t)$ till DE:n att

$$\frac{3}{2}x(t)^{2/3} = t - C\,,$$

där t måste vara större eller likamed C, då ju $x(t)^{2/3} \geq 0$. Begynnelsevärdesproblemet har alltså även lösningarna $x(t) = \pm(2t/3)^{3/2}$, men också t.ex. funktionen

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \text{för } 0 \leq t < 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} (t-1)^{3/2} & , \text{för } t \geq 1 \end{cases}$$

är en lösning. Det är lätt att se att begynnelsevärdesproblemet i själva verket har oändligt många lösningar (rita figur!).

Vi ställer nu frågorna: *Under vilka förutsättningar har begynnelsevärdesproblemet* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, *en lösning?* samt: *När är denna lösning entydig?* Vi kommer att se att om $\mathbf{f}$ är kontinuerlig och uppfyller ett s.k. Lipschitzvillkor så räcker detta till för att man både skall kunna påvisa lösningens existens och bevisa dess entydighet.

I $\mathbf{R}^n$ använder vi det vanliga euklidiska avståndet $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = ((x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$ mellan två punkter $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ och $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Definition 4.2. En funktion $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$, som är definierad i $\Omega \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ sägs uppfylla ett (globalt) *Lipschitzvillkor* i Ω om det finns ett tal L sådant att

$$|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \tag{2}$$

för varje $(t,\mathbf{x})$ och $(t,\mathbf{y})$ i Ω. Funktionen $\mathbf{f}$ sägs uppfylla ett *lokalt Lipschitzvillkor* i Ω om varje punkt i Ω har en omgivning där ett Lipschitzvillkor (2) gäller för någon konstant L.

Om ett globalt Lipschitzvillkor gäller i Ω, så kan samma konstant L användas i hela Ω. Då bara ett lokalt Lipschitzvillkor gäller, så duger samma konstant eventuellt bara i en liten del av Ω. I en annan del av Ω måste kanske ett mycket större värde på L väljas. Ett globalt Lipschitzvillkor innebär därmed ett strängare krav på $\mathbf{f}$ än ett lokalt sådant.

Exempel 4.3. Funktionen $f(t,x) = \sqrt[3]{x}$, som vi använde i föregående exempel, uppfyller varken ett globalt eller ett lokalt Lipschitzvillkor i t.ex. mängden $\Omega = [0,1] \times \mathbf{R}$. Eftersom

$$f(t,x) - f(t,0) = x^{1/3} = x^{-2/3}(x - 0)$$

och funktionen $x^{-2/3}$ är obegränsad i närheten av t-axeln kan ingen Lipschitzkonstant L existera. Exempel 3.1 visar därmed att lösningar till ett begynnelsevärdesproblem kan existera även om inget Lipschitzvillkor är uppfyllt.

En delmängd Ω av $\mathbf{R}^n$ är *konvex* om för varje $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \Omega$ gäller att hela sträckan mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ ligger i Ω.

Lemma 4.1. *Antag att* Ω *är en begränsad delmängd av* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *sådan att för varje* t *mängden* $\Omega_t = \{\mathbf{x} | (t,\mathbf{x}) \in \Omega\}$ *är konvex* (om den inte är tom). *Antag vidare att funktionen* $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ *och dess partiella derivator* $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}$ *är kontinuerliga på det slutna höljet* $\bar{\Omega}$ *av* Ω. *Då uppfyller* $\mathbf{f}$ *ett* (globalt) *Lipschitzvillkor i* Ω.

Bevis. För tydlighetens skull bevisar vi lemmat först för $n = 1$. Enligt medelvärdessatsen är för varje punktpar (t, x) och (t, y) i Ω

$$f(t,x) - f(t,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi) \cdot (x-y),$$

där ξ är ett tal mellan x och y. Eftersom Ω_t är konvext, så ligger även ξ i Ω_t. Men en kontinuerlig funktion har alltid ett maximalt värde på en sluten begränsad mängd (se någon bok i flerdimensionell analys). Således är

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le \max_{\bar{\Omega}} |\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi)| \cdot |x-y| = L|x-y|.$$

Om $n > 1$ använder vi medelvärdessatsen för funktioner med flera variabler på varje komponentfunktion f_k av $\mathbf{f}$. Enligt denna finns det en punkt ξ_k på sträckan mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ sådan att

$$f_k(t,\mathbf{x}) - f_k(t,\mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}} f_k(t,\xi) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Låt L_k beteckna det maximala värdet hos $|\nabla_{\mathbf{x}} f_k(t,\mathbf{x})|$ i $\bar{\Omega}$. Då är

$$|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})| \le \sum_{k=1}^{n} L_k |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \le L\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,$$

där $L = L_1 + \cdots + L_n$. $\diamondsuit$

Existens och entydighet

Beviset för existens och entydighet hos lösningar till begynnelsevärdesproblem är praktiskt taget detsamma för ett system av DE:r som för en enda ekvation. För åskådlighetens skull samt för att undvika vissa satser som hör hemma i den flerdimensionella analysen, nöjer vi oss därför med att bevisa nedanstående sats och Sats 4.3 enbart i det endimensionella fallet.

Sats 4.2. (den globala existens- och entydighetssatsen) *Antag att funktionen* $\mathbf{f} : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$ *är kontinuerlig och uppfyller ett* (globalt) *Lipschitzvillkor i* $\Omega = [a,b] \times \mathbf{R}^p$*. Då har begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \\ &\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\,, \qquad t_0 \in [a,b] \end{aligned}$$

en entydig lösning i $[a,b]$.

Bevis. Antag att $p = 1$. Vi konstaterar först att satsens begynnelsevärdesproblem och integralekvationen

(3) $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds$$

är ekvivalenta (dvs. har samma lösningar).

Existensen. Med hjälp av (3) kan vi konstruera en iterationsformel som successivt ger allt bättre approximativa lösningar (*Picard's iterationsförfarande*): Sätt $I = [a, b]$ och låt funktionen (operatorn) $T : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ vara definierad av högerledet, dvs. sätt $(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\,ds$, samt låt $x_0(t) \equiv x_0$ vara den första (mycket dåliga) approximativa lösningen. Sätt sedan $x_{n+1}(t) = (Tx_n)(t)$ för $n = 0, 1, \ldots$. Med hjälp av Weierstrass kriterium för likformig konvergens skall vi visa att följden $x_0(t)$, $x_1(t), \ldots$ av successiva approximativa lösningar konvergerar likformigt i intervallet I mot en lösning till vårt begynnelsevärdesproblem. Välj talet M så stort att $|f(t, x_0)| \leq M$ för varje $t \in I$ (ett sådant tal finns eftersom en kontinuerlig funktion är begränsad på ett slutet, begränsat intervall). Då är

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_0)|\,ds \right| \leq M|t - t_0|\,.$$

Genom induktion skall vi visa att den allmännare formeln

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq ML^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}\,. \tag{4}$$

gäller generellt för alla naturliga tal $n \geq 1$. Om (4) gäller för ett visst värde på n så är

$$\begin{aligned}
|x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_{n+1}(s)) - f(s, x_n(s))|\,ds \right| \leq \\
&\leq L \left| \int_{t_0}^t |x_{n+1}(s) - x_n(s)|\,ds \right| \leq \\
&\leq LM \frac{L^n}{(n+1)!} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^{n+1}\,ds \right| = M \frac{L^{n+1}}{(n+2)!} |t - t_0|^{n+2}\,,
\end{aligned}$$

varför induktion ger att (4) gäller för varje n. Eftersom serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} ML^n \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

är konvergent (det är ju Maclaurinutvecklingen för $ML^{-1}(e^t - 1)$ då $t = L(b - a)$) så konvergerar funktionsserien

$$x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \cdots$$

likformigt i I mot en kontinuerlig funktion $x(t)$ enligt Weierstrass kriterium (se någon bok i analys). Seriens partialsummor $x_0(t)$, $x_1(t), \ldots$ konvergerar alltså likformigt mot $x(t)$. På grund av att $|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \leq L|x_n(t) - x(t)|$ konvergerar därför $f(t, x_n(t))$ likformigt mot $f(t, x(t))$. Eftersom limes vid likformig konvergens kan flyttas under integraltecknet, satisfierar $x(t)$ integralekvationen (3):

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1}(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^t f(s, x_n(s))\,ds \\
&= x_0 + \int_{t_0}^t \lim_{n\to\infty} f(s, x_n(s))\,ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\,ds\,.
\end{aligned}$$

Entydigheten: Låt $x(t)$ och $y(t)$ vara lösningar till (3). Vi kan anta att $L > 0$ (om $L = 0$, sätt $L = 1$). Betrakta ett delintervall $I_0 = [a_0, b_0]$ av I med t_0 som mittpunkt sådant att $b_0 - a_0 < 1/L$ och sätt $m = \max_{I_0} |x(t) - y(t)|$. Då är

$$|x(t) - y(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \, ds \right| \leq Lm\,(b_0 - a_0)$$

för varje $t \in I_0$, dvs. $m \leq Lm\,|b_0 - a_0|$. Vore nu $m > 0$ så vore $|b_0 - a_0| \geq 1/L$, vilket är en motsägelse. Således är $m = 0$, dvs $x(t) \equiv y(t)$ i I_0. Skriv nu I som en union av ett ändligt antal delintervall I_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, vilkas längd är mindre än $1/L$. Låt I_j vara ett av dessa delintervall som dessutom råkar ha ett icke-tomt snitt med I_0. Genom att ersätta startpunkten t_0 med en annan punkt $t_1 \in I_0 \cap I_j$ (t.ex. a_0 eller b_0) finner vi på samma sätt som ovan att $x(t) \equiv y(t)$ i I_j. Eftersom varje I_k berör ett annat intervall i skaran av delintervall, kan vi med hjälp av detta resonemang sluta oss till att $x(t) \equiv y(t)$ i hela I. $\Diamond$

Sats 4.2 kan förbättras till att gälla även öppna och halvöppna (eventuellt obegränsade) intervall:

Korollarium 4.2.1. *Låt t_0 beteckna en punkt i ett godtyckligt intervall I. Antag att funktionen $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ är kontinuerlig och uppfyller ett Lipschitzvillkor i $[a, b] \times \mathbf{R}^n$ för varje begränsat delintervall $[a, b]$ av I. Då har begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, där $t_0 \in I$, en entydig lösning i I.*

Bevis. Enligt Sats 4.2 har begynnelsevärdesproblemet en entydig lösning i $[a, b] \times \mathbf{R}^n$ för varje intervall $[a, b]$ med $t_0 \in [a, b] \subset I$. Med då I ju är unionen av alla sådana intervall $[a, b]$ så existerar en entydig lösning i hela I. $\Diamond$

Sats 4.3. (den lokala existens- och entydighetssatsen) *Antag att funktionen $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ är kontinuerlig och uppfyller ett lokalt Lipschitzvillkor i en öppen delmängd Ω av $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. För varje $(t_0, \mathbf{x}_0)$ i Ω existerar då ett öppet intervall I med $t_0 \in I$ och en entydigt bestämd funktion $\mathbf{x}(t)$ som är definierad i I och som är en lösning till begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.*

Anmärkning 1. Det kan vara skäl att poängtera att ett lokalt Lipschitzvillkor gäller i den öppna mängden Ω om $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ och dess partiella derivator är kontinuerliga i Ω. Kring varje punkt $(t_0, \mathbf{x}_0)$ i Ω kan vi nämligen *välja* en begränsad omgivning Ω', i vilken förutsättningarna i Lemma 4.1 är uppfyllda (jfr. med beviset nedan).

Bevis. Vi bevisar satsen enbart i fallet $n = 1$ (i det allmänna fallet är beviset likartat). Låt $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ vara godtyckligt. Enligt antagandet finns det en rektangel $R = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ i vilken ett Lipschitzvillkor $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L\,|x - y|$ gäller. Sätt $B = \max_R |f(t, x)|$ samt konstruera en ny rektangel R' som i figuren (om $B > \beta/\alpha$ är R' en ny rektangel, i annat fall är $R' = R$).

Då kommer alla funktionsvärden för de successiva approximationerna $x_0(t)$, $x_1(t)$, ... i Picards iterationsförfarande att ligga i intervallet $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ då $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Detta är uppenbart för $x_0(t)$. Antag att vi visat att $|x_n(t) - x_0| \leq \beta$ för $|t - t_0| \leq \alpha$. Då är

$$|x_{n+1}(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_n(s))| \, ds \right| \leq B|t - t_0| \leq B\alpha \leq \beta$$

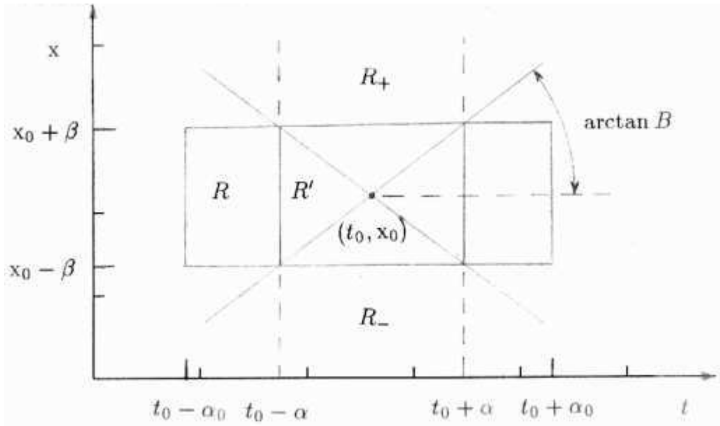

fig. 1

och induktion ger att $|x_n(t)-x_0| \leq \beta$ för $|t-t_0| < \alpha$. Definiera en ny funktion

$$\bar{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,x) & \text{om } (t,x) \in R \\ f(t,x_0+\beta) & \text{om } (t,x) \in R_+ \\ f(t,x_0-\beta) & \text{om } (t,x) \in R_- \end{cases}$$

(se fig. 1). Då är $\bar{f}$ kontinuerlig och uppfyller ett globalt Lipschitzvillkor i mängden $R' \cup R_- \cup R_+$. Enligt Sats 4.2 har begynnelsevärdesproblemet $x' = \bar{f}(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, en entydig lösning där. Men denna lösning är just funktionen $\mathbf{x}(t) = \lim_n x_n(t)$, vars graf helt löper i R'. Därför är $\mathbf{x}(t)$ också den (lokala) *entydiga* lösningen till det ursprungliga begynnelsevärdesproblemet. $\diamondsuit$

Den lokala existens- och entydighetssatsen säger att en entydig lösning existerar lokalt, men ingenting om hur långt den i ett givet fall eventuellt kan utsträckas.

Definition 4.3. Antag att I är ett öppet intervall. En lösning $\mathbf{x}(t)$ i I till ett system av DE:r (eller till en DE) är *maximal* om den inte är restriktionen av någon lösning i något större öppet intervall J innehållande I (dvs. om den inte kan fortsättas (som lösning) utanför I).

Vi belyser detta begrepp med hjälp av några exempel:

Exempel 4.4. Funktionen $x(t) = 1/(1-t^2)$, $t \in]-1,1[$, är en maximal lösning till DE:n $x' = 2tx^2$. Lösningen kan inte fortsättas eftersom $x(t) \to +\infty$ då $t \to \pm 1$.

Exempel 4.5. Funktionen $x(t) = t \ln t$, $t \in]0,+\infty[$, är en maximal lösning till $tx' = x + t$, ty $x'(t) = \ln t + 1 \to -\infty$ då $t \to 0^+$ (medan $x(t) \to 0$ då $t \to 0^+$). Funktionen $x(t) = t\ln(-t)$, $t \in]-\infty, 0[$, är på samma sätt en maximal lösning.

Exempel 4.6. Funktionen $x(t) = \sin(1/t)$, $t \in]0,+\infty[$, är en maximal lösning till $t^2x' + \cos(1/t) = 0$, ty $x(t)$ har inget gränsvärde då $t \to 0^+$.

För fullständighetens skull omnämner vi följande sats (beviset utelämnas):

Sats 4.4. (Peanos existenssats) *Om funktionen* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *är kontinuerlig i en omgivning av en punkt* $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$*, så har begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

en lösning i någon omgivning av t_0.

Anmärkning 2. Enligt Sats 4.4 är det alltså kontinuiteten hos funktionen $\mathbf{f}$ i begynnelsevärdesproblemet som garanterar existensen av en lösning medan Lipschitzvillkoret (i Sats 4.2 och 4.3) medför entydighet. Men i vissa fall kan en lösning vara entydig även om inget Lipschitzvillkor gäller (se uppg. 7) och en lösning kan existera och vara entydig till och med om $\mathbf{f}$ är diskontinuerlig (se uppg. 8).

Ekvationer av högre ordning

En DE

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{6}$$

av ordningen n kan överföras på ett system av n DE:r genom att man sätter $x_1 = x$, $x_2 = x_1'$, $\ldots$,$x_{n-1} = x_{n-2}'$ och $x_n = x_{n-1}'$. Då är

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \quad \cdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n)\,. \end{cases} \tag{7}$$

Det är klart att varje lösning till (6) ger en lösning till (7) och omvänt. Korollarium 4.2.1 och Sats 4.3 genererar därför existens- och entydighetssatser för DE:r av n:te ordningen:

Sats 4.5. *Låt* I *vara ett intervall och antag att* $t_0 \in I$*. Om funktionen* $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *är kontinuerlig och uppfyller ett Lipschitzvillkor i* $I_1 \times \mathbf{R}^n$ *för varje slutet begränsat delintervall* I_1 *av* I *(resp. uppfyller ett Lipschitzvillkor i en omgivning av* $(t_0, \mathbf{x}_0)$*), så har begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) &= x_{01} \\ x'(t_0) &= x_{02} \\ &- - - \\ x^{(n-1)}(t_0) &= x_{0n} \end{aligned}$$

$(\mathbf{x}_0 = (x_{01} \ldots\ x_{0n})^T)$ *en entydig lösning i* I *(resp. i någon omgivning av* t_0*).*

Bevis. Högra ledet i (7), dvs. funktionen $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = (x_2, x_3, \ldots, f(t, \mathbf{x}))^T \in \mathbf{R}^n$, uppfyller ett Lipschitzvillkor i $I_1 \times \mathbf{R}^n$ (eller i en omgivning av $(t_0, \mathbf{x}_0)$), ty om $|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| \le L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ så är

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{y})| &\le |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| + |f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| \\ &\le (L + (n-1))\,|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\,. \ \Diamond \end{aligned}$$

Historiska notiser. En existens- och entydighetssats för begynnelsevärdesproblemet $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ bevisades år 1824 av Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) under antagandet att f och f'_x är kontinuerliga i någon lämplig rektangel. Lösningen konstruerades som gränsvärdet av en oändlig följd av polygondrag. Kravet att derivatan f'_x skall vara kontinuerlig, lindrades år 1876 av Rudolf Lipschitz (1832–1903) med hjälp av det som nu kallas Lipschitzvillkor. Den metod med successiva approximationer, som vi använt i beviset av Sats 4.2, uppfanns år 1890 av Émile Picard (1856–1941) i beviset för en formulering av existenssatsen, som är lite generellare är vår. Denna formulering förbättrades väsentligt år 1894 av finländaren Ernst Lindelöf (1970–1946), som samtidigt också gav ett entydighetsbevis. Giuseppe Peano (1858–1932) publicerade sin existenssats redan år 1886 i ett banbrytande arbete. Han visade mer än det som Sats 4.4 anger, nämligen att det existerar lösningar x_1 och x_2 till begynnelsevärdesproblemet, sådana att för varje annan lösning x gäller att $x_1 \leq x \leq x_2$. Dessutom visade han att $x_1 = x_2$, om f'_x existerar och är begränsad. År 1890 utvidgade Peano sitt existensbevis till att gälla system av DE:r.

Övningsuppgifter

1. Vilka av följande funktioner uppfyller ett lokalt eller ett globalt Lipschitzvillkor i hela tx-planet: a) tx, b) $x \sin t$, c) $\sqrt{|x|}\sin t$, d) $\sin t \cdot \sin x$.
2. Undersök om $f(t,x)$ uppfyller ett Lipschitzvillkor i $[0,1] \times [0,1]$ om
   a) $f(t,x) = t^2 + x^2$, b) $f(t,x) = \sin t \cdot \cos x$,
   c) $f(t,x) = |t - x|$, d) $f(t,x) = |x|^\alpha$, $(\alpha > 0)$.
3. Visa att följande begynnelsevärdesproblem har precis en (lokal) lösning samt bestäm denna lösning:
   a) $x' = e^{t^2 x} - 1$, $x(0) = 0$,
   b) $x' = 1 + \sin(tx - t^2)$, $x(0) = 0$.
4. Reducera DE:n $x''' + x^2 = 1$ till ett system av DE:r av 1:a ordningen och bestäm ett naturligt definierat område Ω där högerledet uppfyller ett Lipschitzvillkor.
5. För vilka tal $\alpha > 0$ har problemet $x' = |x|^\alpha$, $x(0) = 0$, en entydig lösning?
6. Visa att lösningen till problemet $x' = \sin t + \ln(1 + x^2)$, $x(0) = 0$, är definierad på hela reella axeln.
7. Visa att funktionen
$$f(t,x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\ln|x|} & , \text{om } x \neq 0 \\ 1 & , \text{om } x = 0 \end{cases}$$
   inte uppfyller något Lipschitzvillkor i någon som helst omgivning av $(0,0)$, samt visa att begynnelsevärdesproblemet $x' = f(t,x)$, $x(0) = 0$, trots det har en entydig lokal lösning (dvs. varje lösning är en restriktion av samma maximala lösning).
8. Visa att begynnelsevärdesproblemet $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, har en entydig lösning $x(t)$ för varje (t_0, x_0) då f är den diskontinuerliga funktionen
$$f(t,x) = \begin{cases} x & , \text{om } x = e^t . \\ 0 & , \text{om } x \neq e^t . \end{cases}$$
9. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad genom
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\ln|x|} & , \text{för } x \neq 0 \\ 0 & , \text{för } x = 0. \end{cases}$$

Visa att begynnelsevärdesproblemet $x' = f(x)$, $x(0) = 0$, har oändligt många lösningar i $\mathcal{C}^1(]-a,a[)$ för varje $a > 0$, medan det har en entydig lösning i $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ (problemet har alltså många lokala lösningar men en entydig global lösning på $\mathbf{R}$).

10. Visa först att högra ledet i systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = xy \end{cases}$$

uppfyller ett Lipschitzvillkor i $\mathbf{R}\times[-n,n]^2$ för varje naturligt tal n. Bestäm därefter den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $x(0) = 1$, $y(0) = 1/2$.