Linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Redan i inledningen sades att en linjär DE av n:te ordningen är en ekvation av formen

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)\,. \tag{1}$$

Ekvationen sägs vara *homogen* om $b(t) \equiv 0$ och *inhomogen* i annat fall. I detta kapitel skall vi studera linjära DE:r, hos vilka koefficientfunktionerna $a_0(t)$, $\ldots$, $a_{n-1}(t)$ är konstanter:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = b(t)\,. \tag{2}$$

Definition 3.1. Polynomet

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

kallas det *karakteristiska polynomet* för (2) och ekvationen $L(\lambda) = 0$ kallas den *karakteristiska ekvationen* för (2).

Om man substituerar deriveringsoperatorn $D = \frac{d}{dt}$ på lambdas plats i det karakteristiska polynomet, fås en kompakt beteckning för (2): $L(D)x = b(t)$. Symbolen $L(D)$ kan nu uppfattas som en *differentialoperator* som opererar på funktionen $x(t)$ så att distributionslagen gäller: $L(D)x(t) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0x(t)$.

Genom direktverifiering av axiomen kan man visa att mängden $\mathcal{F}(I)$ av alla funktioner på ett intervall I bildar ett vektorrum, då man definierar vektoraddition som vanlig addition av funktioner och multiplikation med en skalär c som multiplikation av varje funktionsvärde med c:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)(t) &= x_1(t) + x_2(t)\,,\\ (cx)(t) &= cx(t)\,.\end{aligned}$$

För delmängden $\mathcal{C}^n(I)$ av alla funktioner, som har kontinuerliga derivator av $n$te ordningen, gäller att om funktionerna $x_1(t)$, $x_2(t)$ är i $\mathcal{C}^n(I)$ så är också funktionerna $x_1(t) + x_2(t)$ och $cx_1(t)$ i $\mathcal{C}^n(I)$. Således utgör $\mathcal{C}^n(I)$ ett underrum av $\mathcal{F}(I)$ och är därmed självt ett vektorrum.

Differentialoperatorn $L(D)$ kan uppfattas som den funktion (operator), som avbildar en funktion $x(\cdot) \in \mathcal{C}^n(I)$ på funktionen $(L(D)x)(\cdot) \in \mathcal{C}(I)$.

Sats 3.1. *Differentialoperatorn $L(D) : \mathcal{C}^n(I) \to \mathcal{C}(I)$ är* linjär, *dvs. för godtyckliga funktioner x, x_1, $x_2 \in \mathcal{C}^n(I)$ och varje konstant c är*

$$\begin{aligned}L(D)(x_1 + x_2) &= L(D)x_1 + L(D)x_2\\ L(D)(cx) &= cL(D)x\,.\end{aligned}$$

Bevis. Vi bevisar t.ex. den första av formlerna i satsen. Den andra kan bevisas på liknande sätt. Om $L(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$, $(a_n = 1)$, så är

$$\begin{aligned}
L(D)(x_1 + x_2)(t) &= \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left(x_1(t) + x_2(t)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(D^k x_1(t) + D^k x_2(t)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k D^k x_1(t) + \sum_{k=0}^{n} a_k D^k x_2(t) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\right) x_1(t) + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\right) x_2(t) \\
&= [L(D)x_1](t) + [L(D)x_2](t) = [L(D)x_1 + L(D)x_2](t)\,. \diamondsuit
\end{aligned}$$

Homogena ekvationer

Med en lösning till den homogena ekvationen

$$(2)' \qquad L(D)x = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

avses normalt en funktion $x(t)$ med reella värden i $\mathcal{C}^n$ sådan att $(L(D)x)\,(t) \equiv 0$. På grund av att teorin blir enklare och rätlinjigare om man också tillåter lösningar med komplexa värden, skall vi använda oss av sådana:

Definition 3.2. Antag att koefficienterna i (2) är komplexa tal och att funktionen $b(t)$ antar komplexa värden. Då sägs en funktion $x(t) = u(t) + iv(t)$ med komplexa värden vara en *komplex lösning* till ekvation (2) om denna satisfieras av $x(t)$.

Kom ihåg att derivering av $x(t)$ görs termvis så att t.ex. $x''(t) = u''(t) + iv''(t)$. Om koefficienterna i $(2)'$ är reella, är en funktion $x(t)$ därför en komplex lösning till $(2)'$ om och endast om $u(t)$ och $v(t)$ är (reella) lösningar.

Eftersom det karakteristiska polynomet kan faktoriseras i linjära faktorer $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$, där $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ är de olika komplexa rötterna till den karakteristiska ekvationen och $n_1, \ldots, n_m$ är deras multipliciteter, så kan operatorn $L(D)$ faktoriseras på motsvarande sätt:

$$L(D) = (D - \lambda_1)^{n_1} \cdots (D - \lambda_m)^{n_m}\,.$$

Operatorn $L(D) = D^2 - 3D + 2$ t.ex. kan skrivas $(D-1)(D-2)$. På grund av detta kan ekvation $(2)'$ lösas genom att man löser en linjär ekvation av formen $(D - \lambda)x = b(t)$ n gånger, så att de n faktorerna i $L(D)$ stegvis försvinner. Det både teoretiska och praktiska hjälpmedel, som vi behöver för denna stegvisa reduktion, är den s.k. förskjutningsregeln:

Sats 3.2. (förskjutningsregeln) *Om $g \in \mathcal{C}^n$ så gäller*

$$L(D)\left(e^{\lambda t} g(t)\right) = e^{\lambda t} L(D + \lambda) g(t)\,.$$

Bevis. Enligt deriveringsreglerna är $D(e^{\lambda t}g(t)) = e^{\lambda t}Dg(t) + \lambda e^{\lambda t}g(t) = e^{\lambda t}(D+\lambda)g(t)$. Genom att använda denna likhet k gånger fås allmänt att

$$D^k\left(e^{\lambda t}g(t)\right) = e^{\lambda t}(D+\lambda)^k g(t) \qquad (k = 0, \ldots, n)\,.$$

Eftersom $L(D) = \sum a_k D^k$ fås nu förskjutningsregeln:

$$\begin{aligned} L(D)(e^{\lambda t}g(t) &= \sum_{k=0}^{n} a_k D^k(e^{\lambda t}g(t)) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{\lambda t}(D+\lambda)^k g(t) \\ &= e^{\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (D+\lambda)^k\right) g(t) = e^{\lambda t}L(D+\lambda)g(t)\,.\ \diamondsuit \end{aligned}$$

Exempel 3.1. Låt oss använda förskjutningsregeln till att lösa ekvationen $x'' - 4x' + 4x = 0$, som också kan skrivas $(D-2)^2x = 0$. Antag att $x(t)$ är en godtycklig lösning. Eftersom ekvationen $(D-2)x = 0$ har den allmänna lösningen C_1e^{2t}, så måste det gälla att $(D-2)x = C_1e^{2t}$, för något värde på C_1. Genom att multiplicera med e^{-2t} och använda förskjutningsregeln fås:

$$D(e^{-2t}x) = e^{-2t}(D-2)x = C_1\,.$$

Således är $e^{-2t}x = C_1t + C_2$ för något värde på C_2, dvs. $x(t)$ måste ha formen $x(t) = C_1te^{2t} + C_2e^{2t}$. Genom insättning finner man omvänt att varje funktion av denna form (dvs. för godtyckliga värden på C_1 och C_2) är en lösning till ekvationen.

Teorem 3.3. *Låt $L(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$, där $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ är olika, vara det karakteristiska polynomet till den homogena linjära DE:n $L(D)x = 0$. Då är*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(t)e^{\lambda_k t}\,,$$

där $p_k(t)$ är ett godtyckligt komplext polynom av högst graden $n_k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ den allmänna komplexa lösningen till $L(D)x = 0$.

Bevis. Vi visar först att alla funktioner av den beskrivna formen faktiskt är lösningar. På grund av att $L(D)$ är linjär räcker det att visa att varje funktion $p_k(t)e^{\lambda_k t}$ $(k = 1, \ldots, m)$ är en lösning. Men detta följer direkt ur förskjutningsregeln, ty

$$\begin{aligned} L(D)\left(e^{\lambda_k t}p_k(t)\right) &= e^{\lambda_k t}L(D+\lambda_k)p_k(t) \\ &= e^{\lambda_k t}\left((D+\lambda_k-\lambda_1)^{n_1}\cdots(D+\lambda_k-\lambda_k)^{n_k}\cdots\right)p_k(t) \\ &= e^{\lambda_k t}P(D)\,D^{n_k}p_k(t) \equiv 0\,, \end{aligned}$$

där $P(D) = \prod_{i\neq k}(D+\lambda_k-\lambda_i)^{n_i}$. Antag omvänt att $x(t)$ är en godtycklig lösning till $(D-\lambda_1)^{n_1}\cdots(D-\lambda_m)^{n_m}x = 0$. På samma sätt som i exempel 3.1 ovan använder vi förskjutningsregeln n_1 gånger till att eliminera operatorn $(D-\lambda_1)^{n_1}$, varvid fås att

$$(D-\lambda_2)^{n_2}\cdots(D-\lambda_m)^{n_m}x = P_1(t)e^{\lambda_1 t}\,,$$

där $P_1(t)$ är ett polynom av högst graden $n_1 - 1$. Därefter kan vi använda förskjutningsregeln n_2 gånger för att eliminera operatorn $(D-\lambda_2)^{n_2}$ osv.. Slutligen fås att $x(t)$ med nödvändighet måste ha den form som satsen anger. (Detaljerna i den andra delen av beviset har bortlämnats på grund av att en mycket allmännare sats kommer att bevisas senare.) $\diamondsuit$

Exempel 3.2. För att bestämma den allmänna komplexa lösningen till DE:n $x'' - 3x' + 2x = 0$ löser vi den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$ och finner rötterna 1 och 2. Enligt Teorem 3.3 är den allmänna komplexa lösningen $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$, där C_1 och C_2 är godtyckliga komplexa konstanter.

Exempel 3.3. DE:n $x^{(4)} - 2x''' + 2x'' - 2x' + x = 0$ har den karakteristiska ekvationen $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda^2+1)(\lambda-1)^2 = 0$. Rötterna $\lambda = i$ och $\lambda = -i$ är alltså enkla medan roten $\lambda = 1$ är dubbel. Den allmänna komplexa lösningen är således $x(t) = (C_1 t + C_2)e^t + C_3 e^{it} + C_4 e^{-it}$, där $C_i \in \mathbf{C}$, för $i = 1, \ldots, 4$.

Om differentialekvationen är reell är man i allmänhet intresserad av reella lösningar:

Korollarium 3.3.1. *Låt γ_k $(k = 1, \ldots, l)$ vara de olika reella rötterna samt låt $\lambda_k = \gamma_k \pm i\omega_k$ $(k = l+1, \ldots, m)$ vara de olika komplexa rötterna till en homogen, linjär DE med konstanta koefficienter. Låt vidare n_k $(k = 1, \ldots, m)$ beteckna dessa rötters multipliciteter. Den allmänna reella lösningen är då en summa av termer av formen*

$$q_k(t)e^{\gamma_k t}$$

för $k = 1, \ldots, l$ samt

$$q_k(t)e^{\gamma_k t}\cos\omega_k t$$
$$r_k(t)e^{\gamma_k t}\sin\omega_k t\,,$$

för $k = l+1, \ldots, m$, där $q_k(t)$ och $r_k(t)$ är godtyckliga reella polynom som högst är av graden $n_k - 1$.

Bevis. Låt $x(t)$ vara en godtycklig reell lösning. Då är $x(t)$ en komplex lösning (som råkar vara reell) och kan därför enligt Teorem 3.3 skrivas

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(t)e^{\lambda_k t}$$

för lämpliga komplexa polynom $p_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$. Genom att för $k = 1, \ldots, m$ sätta $p_k(t) = q_k(t) + ir_k(t)$ fås, eftersom den imaginära delen är noll,

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^{l}(q_k(t) + ir_k(t))e^{\gamma_k t} + \sum_{k=l+1}^{m}(q_k(t) + ir_k(t))e^{\gamma_k t}(\cos\omega_k t + i\sin\omega_k t) \\ &= \sum_{k=1}^{l} q_k(t)e^{\gamma_k t} + \sum_{k=l+1}^{m}\left(q_k(t)e^{\gamma_k t}\cos\omega_k t - r_k(t)e^{\gamma_k t}\sin\omega_k t\right) . \diamondsuit \end{aligned}$$

Exempel 3.4. Den DE $x^{(4)} - 2x''' + 2x'' - 2x' + x = 0$, som vi betraktade i exempel 3.3, har den allmänna reella lösningen

$$x(t) = (C_1 t + C_2)e^t + C_3\cos t + C_4\sin t\,,$$

där $C_i \in \mathbf{R}$ för $i = 1, \ldots, 4$, eftersom $\lambda = 1$ är en dubbel rot och $\lambda = \pm i$ är enkla rötter till den karakteristiska ekvationen.

Inhomogena ekvationer

Precis som för linjära DE:r av första ordningen gäller följande:

Sats 3.4. *Antag att $x_p(t)$ är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen $L(D)x(t) = b(t)$ samt att $x_h(t)$ är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $L(D)x(t) = 0$. Då är $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen.*

Bevis. Alla funktioner av det angivna slaget är lösningar, ty $L(D)x(t) = L(D)x_h(t) + L(D)x_p(t) = L(D)x_p(t) = b(t)$. Antag omvänt att $x(t)$ är en godtycklig lösning till $L(D)x(t) = b(t)$. Då är

$$L(D)(x(t) - x_p(t)) = L(D)x(t) - L(D)x_p(t) = b(t) - b(t) \equiv 0\,,$$

dvs. $x(t) - x_p(t)$ är likamed $x_h(t)$ (för ett lämpligt val av de konstanter som ingår i $x_h(t)$). Alltså är $x(t)$ av formen $x_h(t) + x_p(t)$. $\diamondsuit$

Lösningsmetoder

1. Ansats med obestämda koefficienter. Metoden introduceras bäst genom några exempel:

Exempel 3.5. Den linjära DE:n $x'' + x = t^2 + t$ har ett kvadratiskt polynom som högerled. Det finns då en partikulärlösning som också är ett andragradspolynom. Vi gör därför ansatsen $x(t) = At^2 + Bt + C$ och bestämmer koefficienterna A, B och C genom insättning. Insättning av $x(t)$ och

$$\begin{aligned} x' &= 2At + B \\ x'' &= 2A\,, \end{aligned}$$

i DE:n ger att $2A + At^2 + Bt + C \equiv t^2 + t$. Denna identitet gäller om och endast om koefficienterna i de bägge leden är lika:

$$\begin{cases} 2A + C = 0 \\ A = 1 \\ B = 1\,. \end{cases}$$

Polynomet $x(t) = t^2 + t - 2$ är alltså en partikulärlösning.

Märk! Då man söker en partikulärlösning kan man ha nytta av följande uppenbara *superpositionsprincip*: Om

$$\begin{aligned} L(D)x_1(t) &= b_1(t) \\ L(D)x_2(t) &= b_2(t) \\ &--- \\ L(D)x_m(t) &= b_m(t)\,, \end{aligned}$$

så är $x(t) = x_1(t) + \cdots + x_m(t)$ en lösning till DE:n

$$L(D)x(t) = b_1(t) + \cdots + b_m(t)\,.$$

Om högerledet är av formen $ae^{\lambda_0 t}$, där λ_0 *inte är en lösning* till den karakteristika ekvationen, så finns det alltid en partikulärlösning av formen $x(t) = Ae^{\lambda_0 t}$. Insättning i $L(D)x = ae^{\lambda_0 t}$ ger nämligen då att $AL(\lambda_0)e^{\lambda_0 t} \equiv ae^{\lambda_0 t}$ bör gälla. För $A = a/L(\lambda_0)$ har vi alltså en lösning. Ansatsen fungerar i själva verket också om λ_0 och koefficienterna i DE:n är komplexa tal. På grund av detta kan vi också behandla de fall då högerledet innehåller en eller flera termer av formen $ae^{\gamma t}\cos\omega t$ eller $ae^{\gamma t}\sin\omega t$ på ett liknande sätt. Om $\lambda_0 = \gamma + i\omega$, är nämligen t.ex.

$$e^{\gamma t}\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_0 t} + e^{\overline{\lambda_0} t}\right)\,.$$

Enligt superpositionsprincipen kan vi därför (om $L(\lambda_0) \neq 0$) finna en partikulärlösning av formen $Ae^{\lambda_0 t} + Be^{\overline{\lambda_0} t}$, vilket också kan skrivas $\overline{A}e^{\gamma t}\cos\omega t + \overline{B}e^{\gamma t}\sin\omega t$.

Exempel 3.6. Betrakta DE:n $x'' + x' + x = e^{-t}\cos 2t$. Talet $-1 + 2i$ är inte en komplex rot till den karakteristiska ekvationen. Vi kan därför göra ansatsen

$$x(t) = Ae^{-t}\cos 2t + Be^{-t}\sin 2t\,.$$

Insättning av derivatorna

$$\begin{aligned} x'(t) &= (2B - A)e^{-t}\cos 2t - (2A + B)e^{-t}\sin 2t\,,\\ x''(t) &= (-3A - 4B)e^{-t}\cos 2t + (4A - 3B)e^{-t}\sin 2t \end{aligned}$$

i DE:n ger identiteten

$$(-3A - 2B)e^{-t}\cos 2t + (2A - 3B)e^{-t}\sin 2t \equiv e^{-t}\cos 2t\,,$$

vilken är uppfylld om och endast om

$$\begin{cases} -3A - 2B = 1 \\ 2A - 3B = 0\,. \end{cases}$$

Ekvationssystemet har lösningen $A = -3/13$, $B = -2/13$. Således är

$$x(t) = -\frac{1}{13}e^{-t}\left(3\cos 2t + 2\sin 2t\right)\,,$$

en partikulärlösning.

I tabellen nedan sammanfattar vi de viktigaste ansatserna då man skall lösa den inhomogena ekvationen (2) för olika högerled $b(t)$. I den första kolumnen betecknar $p_m(t)$ ett givet polynom av graden m och i kolumnen med ansatser betecknar $P_m(t)$ och $Q_m(t)$ polynom av graden m med obestämda koefficienter:

Högerled	Ansats
$p_m(t)$	$P_m(t)$, om $L(0) \neq 0$; $t^k P_m(t)$, om 0 är ett k-faldigt nollställe till L.
$p_m(t)e^{\gamma t}$	$P_m(t)e^{\gamma t}$, om $L(\gamma) \neq 0$; $t^k P_m(t)e^{\gamma t}$, om γ är ett k-faldigt nollställe till L.
$p_m(t)\cos\omega t$ eller $p_m(t)\sin\omega t$	$P_m(t)\cos\omega t + Q_m(t)\sin\omega t$, om $L(i\omega) \neq 0$; $t^k[P_m(t)\cos\omega t + Q_m(t)\sin\omega t]$, om $i\omega$ är ett k-faldigt nollställe till L.
$p_m(t)e^{\gamma t}\cos\omega t$ eller $p_m(t)e^{\gamma t}\sin\omega t$	$[P_m(t)\cos\omega t + Q_m(t)\sin\omega t]e^{\gamma t}$, om $L(\gamma + i\omega) \neq 0$; $t^k[P_m(t)\cos\omega t + Q_m(t)\sin\omega t]e^{\gamma t}$, om $\gamma + i\omega$ är ett k-faldigt nollställe till L.

2. Lösning med hjälp av förskjutningsregeln. Med hjälp av precis den metod, som vi använde i exempel 3.1 och i beviset av Teorem 3.3, kan vi lösa en godtycklig inhomogen ekvation

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\cdots(D - \lambda_n)x = b(t)\,,$$

där rötterna λ_i, $i = 1, \ldots, n$, till den karakteristiska ekvationen kan vara lika eller olika. Vi betraktar ett par exempel:

Exempel 3.7. DE:n $x'' - x = 2e^t/(e^t - 1)$ kan skrivas

$$(D - 1)(D + 1)x = \frac{2e^t}{e^t - 1}\,.$$

Genom att multiplicera med e^{-t} kan vi med hjälp av förskjutningsregeln och en integration "invertera" operatorn $D - 1$. Vi får:

$$(D + 1)x = e^t \int^t \frac{2ds}{e^s - 1} = 2e^t \ln|1 - e^{-t}|\,, \tag{3}$$

där vi inte behöver addera till någon integrationskonstant, eftersom vi bara behöver finna *en* partikulärlösning. (Om man vid varje integration lägger till en integrationskonstant, så får man som slutresultat den allmänna lösningen.) Då man på samma sätt multiplicerar (3) med e^t, och använder förskjutningsregeln för att invertera $D + 1$, fås efter lite längre kalkyler partikulärlösningen

$$x(t) = (e^t - e^{-t})\ln|1 - e^{-t}| - te^{-t} - 1\,.$$

Strängt taget representerar detta uttryck två partikulärlösningar, en för $t < 0$ och en för $t > 0$.

Exempel 3.8. I stället för att lösa en ekvation som

$$x'' + x = \cos t\,, \tag{4}$$

kan man bestämma de komplexa lösningarna till ekvationen

$$x'' + x = e^{it}\,. \tag{5}$$

Eftersom $\cos t = \mathrm{Re}(e^{it})$, så är den reella delen av varje lösning till (5) en lösning till (4). Det är lätt att inse att varje lösning till (4) kan fås på detta sätt som den reella delen av en lösning till (5). Genom att tillämpa förskjutningsregeln två gånger på

$$(D-i)(D+i)x = e^{it}\,,$$

vilket är en omskrivning av (5), finner man (t.ex.) partikulärlösningen $x(t) = -\frac{i}{2}te^{it} + \frac{1}{4}e^{it}$. Den reella delen av denna, dvs.

$$x(t) = \frac{1}{4}\cos t + \frac{t}{2}\sin t$$

är alltså en partikulärlösning till (4).

3. Konstanternas variation. Vi använde metoden med konstantens variation då vi bestämde en partikulärlösning till en linjär DE av första ordningen. Samma metod fungerar också för DE:r av högre ordning:

Exempel 3.9. För att lösa DE:n

$$x'' - x = \sin t$$

skriver man först ut den allmänna lösningen $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$ till motsvarande homogena ekvation. Därefter görs en ansats av formen

$$x(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}\,,$$

där konstanterna ersatts med funktioner av t. Derivering ger

$$x'(t) = (C_1'e^t + C_2'e^{-t}) + (C_1e^t - C_2e^{-t})\,.$$

För att inte förlora översikten vid nästa derivering, *kräver* vi redan nu att funktionerna C_1 och C_2 skall vara sådana att

$$C_1'e^t + C_2'e^{-t} = 0\,.$$

Då är $x'(t) = C_1e^t - C_2e^{-t}$. Ytterligare en derivering ger att

$$x''(t) = (C_1'e^t - C_2'e^{-t}) + (C_1e^t + C_2e^{-t})$$

och därmed är $x'' - x = C_1'e^t - C_2'e^{-t}$. Ansatsen $x(t)$ är alltså en lösning till den givna DE:n om högerledet är likamed $\sin t$. Av funktionerna C_1 och C_2 bör vi således kräva att ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_1'e^t + C_2'e^{-t} = 0 \\ C_1'e^t - C_2'e^{-t} = \sin t,, \end{cases}$$

är satisfierat. Genom att ur detta lösa derivatorna C_1' och C_2' och därefter integrera, ser vi att om vi i ansatsen väljer

$$C_1(t) = \frac{1}{2}\int^t e^{-u}\sin u\,du \quad \text{och} \quad C_2(t) = -\frac{1}{2}\int^t e^{u}\sin u\,du\,,$$

så har vi en partikulärlösning till den ursprungliga DE:n. Dessa integraler kan beräknas genom partiell integration.

Allmänt kan metoden med konstanternas variation beskrivas på följande sätt:

1. Utgå från den allmänna lösningen $x(t) = C_1x_1(t) + \cdots + C_nx_n(t)$ till den homogena ekvation som svarar mot (2).
2. Gör ansatsen $x(t) = C_1(t)x_1(t) + \cdots + C_n(t)x_n(t)$ för att hitta en partikulärlösning till (2).
3. För att bestämma koefficientfunktionerna $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ bildar man successivt derivatorna $x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$, som sedan insätts i (2). Vid de $n-1$ första deriveringarna lägger man varje gång till ett nytt villkor på koefficientfunktionerna: Eftersom

$$x'(t) = (C_1'(t)x_1(t) + \cdots + C_n'(t)x_n(t)) + (C_1(t)x_1'(t) + \cdots + C_n(t)x_n'(t))\,,$$

kräver vi att den första parentesen är noll och då är ju $x' = C_1x_1' + \cdots + C_nx_n'$. Vid nästa derivering kräver vi att $C_1'x_1' + \cdots + C_1'x_n' = 0$, så att $x'' = C_1x_1'' + \cdots + C_nx_n''$ osv. Efter den sista deriveringen sätts uttrycken för alla derivator in i DE (2), vilken kommer att vara satisfierad om och endast om (genomför kalkylerna!)

$$C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \cdots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = b(t)\,.$$

Koefficientfunktionerna skall alltså väljas så att ekvationssystemet

$$\begin{array}{lll}
C_1'x_1 & + \cdots + C_n'x_n & = 0 \\
C_1'x_1' & + \cdots + C_n'x_n' & = 0 \\
\multicolumn{3}{c}{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-} \\
C_1'x_1^{(n-2)} & + \cdots + C_n'x_n^{(n-2)} & = 0 \\
C_1'x_1^{(n-1)} & + \cdots + C_n'x_n^{(n-1)} & = b
\end{array}$$

är satisfierat.
4. Lös $C_1', \ldots, C_n'$ ur ovanstående linjära ekvationssystem, som alltid har en entydig lösning enligt teori som utvecklas senare. Koefficientfunktionerna $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ fås därefter genom integration.

Harmoniska oscillatorn

Bakgrund: A) Antag att en kropp med massan m som rör sig på x-axeln dras mot origo med en kraft $-kx$ $(k > 0)$. Antag vidare att rörelsen dämpas av en kraft $-cx'$

($c \geq 0$) som är proportionell mot hastigheten samt att kroppen dessutom påverkas av en tidsberoende "yttre" kraft $F(t)$. Kroppens rörelse kommer då att beskrivas av DE:n

$$mx'' = -kx - cx' + F(t)\,.$$

B) I en elektrisk svängningskrets, bestående av en enkel slinga, ingår en spole med induktansen L, en kondensator med kapacitansen C samt ett motstånd på R ohm. Vidare antar vi att en tidsberoende "yttre" elektromotorisk kraft $E(t)$ är inkopplad. Om strömstyrkan vid en given tidpunkt t är I och laddningen i kondensatorn är Q, så är

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t), \qquad I = \frac{dQ}{dt}\,,$$

dvs. kretsen beskrivs av DE:n

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}E'(t)\,.$$

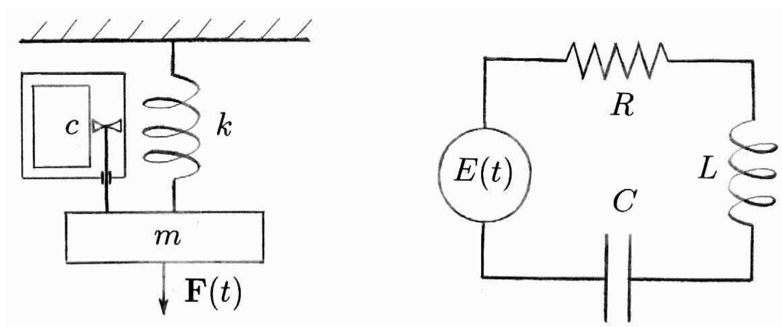


fig. 1

I bägge exempelfallen erhåller vi en DE av formen

$$x'' + ax' + bx = f(t), \quad a \geq 0 \text{ och } b > 0\,,$$

där termen ax' representerar en dämpning, dvs. ett motstånd mot kroppens rörelse i (fall A)) eller ett motstånd mot den elektriska strömmen (fall B)).

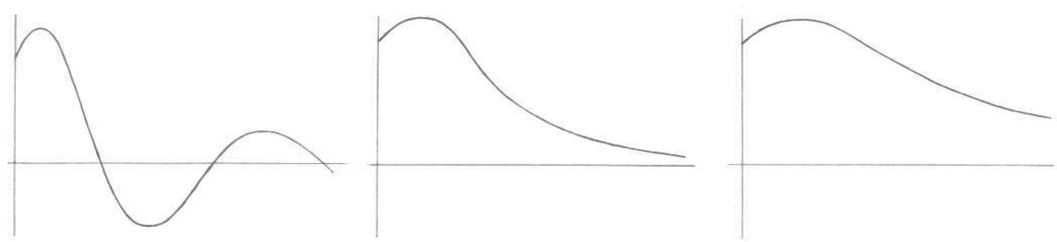
Antag först att $f(t) \equiv 0$. Olika typer av svängningar hos oscillatorn kan klassificeras med hjälp av rötterna till den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

1) *Icke-reella rötter* ($a^2 < 4b$): Den karakteristiska ekvationen har rötterna $\lambda = -\gamma \pm i\omega_0$, där $\gamma = a/2$ och $\omega_0 = \sqrt{4b - a^2}/2$, varför den allmänna lösningen blir

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t}\cos\omega_0 t + C_2 e^{-\gamma t}\sin\omega_0 t\,.$$

Om vi sätter $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ och väljer ϕ så att $\cos\phi = C_1/C$ och $\sin\phi = C_2/C$, så antar $x(t)$ formen

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t - \phi)\,,$$



(a) (b) (c)

fig. 2

där C och ϕ nu är godtyckliga konstanter. Oscillatorn utför i detta fall en *dämpad harmonisk svängning* (fig. 2 (a)).

2) *Dubbelrot* ($a^2 = 4b$): I detta fall är $\lambda = -\gamma$. Den allmänna lösningen är

$$x(t) = (C_1 t + C_2)e^{-\gamma t}.$$

Dämpningen sägs nu vara *kritisk* därför att den är just så stark att den kan förhindra svängningar. Detta är det *aperiodiska gränsfallet* (fig. 2 (b)), som ligger mellan fall 1) ovan och fall 3), som vi strax kommer till:

3) *Olika reella rötter* ($a^2 > 4b$): Om vi betecknar de reella rötterna med $-\gamma_1$ och $-\gamma_2$ så är den allmänna lösningen

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}.$$

Detta fall kallas det *aperiodiska fallet*. Dämpningen är mer än väl så kraftig att den förhindrar svängningar (fig. 2 (c)).

Man säger att fallen 1) och 3) är *strukturellt stabila* eller *generiska* därför att en liten störning av systemet (dvs. en liten ändring av DE:s koefficienter) inte leder till någon kvalitativ ändring av svängningstyp: En liten störning av t.ex. en dämpad harmoninsk svängning (typ 1)) resulterar i en ny (något förändrad) dämpad harmonisk svängning.

Resonans. Låt oss använda det fall då $f(t) \not\equiv 0$, dvs. då en yttre "kraft" är inkopplad, till att förklara begreppet *resonans*. Antag att $f(t) = e\cos\omega t$ ($e > 0$) samt antag att $a = 0$ medan $b > 0$. Vi har då DE:n

$$x'' + bx = e\cos\omega t.$$

Den karakteristiska ekvationen har rent imaginära rötter, varför lösningarna till den homogena DE:n representerar en harmonisk svängning med frekvensen $\omega_0 = \sqrt{|b|}$ utan dämpning.

a) Antag att $\omega \neq \omega_0$. För att få fram en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen prövar vi ansatsen $x(t) = A\cos\omega t$, varvid det visar sig att värdet

$$A = \frac{e}{b-\omega^2} = \frac{e}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ger en lösning. Den allmänna lösningen

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{e}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t \tag{6}$$

består alltså av en *superposition* (dvs. överlagring) av två svängningar: en svängning med den s.k. *egenfrekvensen* ω_0 samt en svängning med den påtvungna frekvensen ω. Vi ser att om vi låter ω närma sig ω_0 i (6), så kommer amplituden hos den påtvungna svängningskomponenten att närma sig oändligheten.

b) Antag att $\omega = \omega_0$. Vi prövar ansatsen $x(t) = At\sin\omega_0 t$ och finner att värdet $A = e/2\omega_0$ ger en partikulärlösning. Den allmänna lösningen är då

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{e}{2\omega_0} t\sin\omega_0 t\,. \tag{7}$$

Amplituden hos den andra svängningskomponenten växer alltså linjärt i tiden mot oändligheten. Man säger i detta fall att egensvängningen och den påtvungna svängningen är i *resonans*. Vi såg redan att man inte får fram lösningen (7) genom att man i (6) direkt låter ω gå mot ω_0 om C hålls oförändrad. Vi skall visa att partikulärlösningen $(e/2\omega_0)t\sin\omega_0 t$ i (7) däremot nog kan erhållas som ett gränsvärde av lösningar av formen (6) om man låter koefficienten C i (6) bero av ω på ett lämpligt sätt: Vi betraktar lösningen

$$x_\omega(t) = \frac{e}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t) = -\frac{e}{\omega_0 + \omega}\,\frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega - \omega_0}\,,$$

som är av formen (6), samt låter $\omega \to \omega_0$. Definitionen på derivata ger då att gränsvärdet blir

$$-\frac{e}{2\omega_0}\frac{d}{d\omega}\left(\cos\omega t\right)_{\omega=\omega_0} = \frac{e}{2\omega_0} t\sin\omega_0 t\,.$$

Genom att lägga till termen $C\cos(\omega_0 t - \phi)$ fås generellt att varje lösning av typ (7) är ett gränsvärde av lösningar av typ (6).

Lösning med hjälp av Fourierserier

Antag nu att $a > 0$ och $b > 0$ och att vi har en dämpad harmonisk svängning, så att den homogena ekvationen $x'' + ax' + bx = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t - \phi)$, där $\gamma > 0$. Lägger man till ett högerled, t.ex. $f(t) = e\sin\omega t$, så får man fram en partikulärlösning genom att göra ansatsen $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, eftersom $i\omega$ nu inte är en rot till den karakteristiska ekvationen:

$$x(t) = e\frac{-a\omega\cos\omega t + (b - \omega^2)\sin\omega t}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}\,.$$

För ett visst värde på ω är amplituden hos denna lösning maximal på grund av resonans (se uppgift 8).

Om högerledet $f(t)$ är en godtycklig periodisk funktion, som kan utvecklas i Fourierserie

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos n\omega(t - t_0) + \beta_n\sin n\omega(t - t_0)\right),$$

så fås en lösning enligt (en generaliserad variant av) superpositionsprincipen så, att man för varje term i serieutvecklingen av $f(t)$ bestämmer en motsvarande partikulärlösning och adderar ihop dessa till en oändlig serie. Om denna är konvergent och seriens summa två gånger kontinuerligt deriverbar, så är summan en partikulärlösning till $x'' + ax' + bx = f(t)$.

Eulers ekvation

Ekvationer av Eulers typ, dvs. ekvationer av formen

$$t^n x^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 t x' + a_0 x = b(t)\,, \tag{8}$$

är inte linjära ekvationer med konstanta koefficienter, men de kan lätt överföras på sådana med hjälp av en variabeltransformation. För $t > 0$ sätter man $t = e^s$ (för $t < 0$ sätts $t = -e^s$), varvid $s = \ln t$ och för derivatorna med avseende på t och s gäller att $x'_t = \frac{1}{t}x'_s$. Fortsatt derivering ger att

$$x''_t = -\frac{1}{t^2}x'_s + \frac{1}{t}x''_s\frac{ds}{dt} = (D_s^2 x - D_s x)\cdot\frac{1}{t^2} = D_s(D_s - 1)x\cdot\frac{1}{t^2}$$

och allmänt (genom induktion) att

$$x_t^{(k)} = D_s(D_s - 1)\cdots(D_s - k + 1)x\cdot\frac{1}{t^k}\,.$$

Genom variabeltransformationen får vi därmed en linjär ekvation med konstanta koefficienter

$$[a_0 + a_1 D_s + a_2 D_s(D_s - 1) + \cdots + D_s(D_s - 1)\cdots(D_s - n + 1)]\,x = b(e^s)\,, \tag{9}$$

vilken har den karakteristiska ekvationen

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda(\lambda - 1) + \cdots + \lambda(\lambda - 1)\cdots(\lambda - n + 1) = 0\,. \tag{10}$$

Enligt Teorem 3.3 fås lösningarna till den homogena Eulerekvationen på följande sätt:

Sats 3.5. *Om $b(t) \equiv 0$ samt om $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ är de olika rötterna till* (10) *och dessa har multipliciteterna $n_1, \ldots, n_m$, har den allmänna komplexa lösningen till* (8) *formen*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(\ln t)t^{\lambda_k} \qquad (t > 0)\,,$$

där $p_k(\cdot)$ är ett godtyckligt polynom som högst är av graden $n_k - 1$.

Bevis. Den allmänna lösningen till (9) är av formen $x(s) = \sum p_k(s)e^{\lambda_k s}$, men $e^{\lambda_k \ln t} = (e^{\ln t})^{\lambda_k} = t^{\lambda_k}$. Detta ger satsens påstående. $\diamondsuit$

Exempel 3.9. Då man sätter $s = \ln t$ i DE:n $t^2x'' - 2tx' + 2x = \ln t$, $t > 0$, fås

$$(D_s(D_s - 1) - 2D_s + 2)x = s\,.$$

Den karakteristiska ekvationen $\lambda(\lambda-1)-2\lambda+2=0$ har lösningarna $\lambda=1$ och $\lambda=2$, varför den homogena ekvationen enligt satsen har den allmänna lösningen $x(t)=C_1t+C_2t^2$. För att hitta en partikulärlösning gör vi ansatsen $x(s)=As+B$ i den transformerade ekvationen och finner att värdena $A=\frac{1}{2}$ och $B=\frac{3}{4}$ svarar mot en lösning. Den allmänna (komplexa eller reella) lösningen till den ursprungliga ekvationen är således

$$x(t)=C_1t+C_2t^2+\frac{1}{2}\ln t+\frac{3}{4}\,.$$

Märk, att om den ursprungliga DE:n är reell men någon exponent är komplex, så är lösningen i Sats 3.5 komplex även om polynomen p_k väljs reella. Reella lösningar fås fram genom att man bildar reella och imaginära delar som i följande exempel (jfr. Korollarium 3.1):

Exempel 3.10. DE:n $t^2x''-tx'+2x=0$, $t>0$, övergår i ekvationen $(D_s(D_s-1)-D_s+2)x)=0$ då man sätter $s=\ln t$. Den karakteristiska ekvationen $\lambda(\lambda-1)-\lambda+2=0$ har rötterna $\lambda=1\pm i$. Den allmänna komplexa lösningen är således $x(t)=C_1t^{1+i}+C_2t^{1-i}$. Men

$$\begin{aligned}t^{1+i}&=t\cdot t^i=t\cdot e^{i\ln t}=t(\cos\,\ln t+i\sin\,\ln t)\\ t^{1-i}&=t\cdot t^{-i}=t\cdot e^{-i\ln t}=t(\cos\,\ln t-i\sin\,\ln t)\,.\end{aligned}$$

De reella och imaginära delarna är $t\cos\ln t$ och $t\sin\ln t$ och den allmänna reella lösningen blir $x(t)=t(C_1\cos\ln t+C_2\sin\ln t)$, där C_1 och C_2 nu är godtyckliga *reella* tal.

Historiska notiser. Grunden till teorin för DE:r med konstanta koefficienter lades av Leonhard Euler (1707–83) och Joseph-Louis Lagrange (1736–1813). Metoden med konstantens variation härstammar från Lagrange. I ett brev till Johann Bernoulli år 1740 löser Euler DE:r av den typ som senare uppkallats efter honom. Av Bernoullis svar framgår emellertid att han redan omkring år 1700 kunde lösa sådana ekvationer fullständigt.

Övninguppgifter

1. Bestäm den allmänna lösningen till DE:n $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=t+2$.
2. Lös begynnelsevärdesproblemen
   a) $x''+2x'+x=te^{-t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$;
   b) $(D^3+2D^2-7D+4)x=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=x''(0)=0$.
3. Lös Eulerekvationen $t^2x''-4tx'+6x=0$, $t>0$.
4. Bestäm den allmänna lösningen till DE:na
   a) $x''+x=\sin t+e^{2t}$,
   b) $t^2x''-3tx'+4x=\ln t$.
5. Lös DE:na
   a) $x'''+5x''+19x'-25x=0$,

b) $x''' + 3x'' - 4x = 2 - 4t^2$.

6. Antag att ett hål borras genom jordens mitt (längs en diameter) och att en kropp med massan m släpps i hålet. Låt r beteckna kroppens avstånd från jordens medelpunkt. Man kan visa att gravitationskraften under fallet är proportionell mot r och att man därför kan beskriva kroppens rörelse med hjälp av DE:n $r'' + \omega^2 r = 0$, där $\omega^2 = g/R$, varvid g är tyngkraftens acceleration vid jordytan och R är jordens radie (luftmotstånd och dylikt försummas). Lös DE:n samt bestäm hur lång tid det tar innan kroppen kommer ut på andra sidan av jordklotet.

7. Ett 20 meter långt rep hålls hängande över en glatt stång så att 8 meter hänger på ena sidan och 12 meter på den andra sidan. Man släpper repet. Hur lång tid tar det för repet att glida av stången? (Ledn.: $mx'' = F(x)$, där m är repets massa och $F(x)$ är den variabla kraft med vilken gravitationen påverkar repet. Bortse från att repändan kommer att slänga p.g.a. centrifugalkraften.)

8. Härled den lösning till $x'' + ax' + b = e \sin \omega t$, som nämns i avsnittet om lösning med hjälp av Fourierserier. Bestäm det värde på ω för vilket lösningens amplitud är maximal.

9. Systemet
$$\begin{cases} x_1'' + x_1 = \varepsilon(x_2 - x_1) \\ x_2'' + x_2 = \varepsilon(x_1 - x_2) \end{cases}$$
beskriver approximativt små svängningar hos två identiska pendlar förbundna med en fjäder. Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $x_1(0) = \alpha$, $x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0$. (Ledn.: Inför nya obekanta $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$.)

10. Bestäm talen A och a så att DE:n $x'' + 2(1-t)x' + t(t-2)x = 0$ efter substitutionen $x = \exp(At^a)u$ övergår i en ekvation med konstanta koefficienter.

11. Sök den lösning till DE:n $x'' + x' - 2x = 1$ som är noll för $t = 0$ och som har ett ändligt gränsvärde då $t \to +\infty$.

12. På en skidlöpare som åker utför en backe med lutningen α verkar följande krafter: friktionskraften $-\mu mg \cos \alpha$ ($\mu > 0$), tyngdkraftens komponent i färdriktningen $mg \sin \alpha$ och luftmotståndet $-cx'(t)$ (som alltså antas vara proportionellt mot hastigheten $x'(t)$). Visa att gränshastigheten $\lim_{t\to\infty} x'(t)$ är en växande funktion av skidlöparens längd d då man antar att $c = \beta d^2$ och att skidlöparens massa $m = \gamma d^3$.

13. Bestäm den allmänna lösningen till DE:n $x'' - x' - 6x = te^{-2t} + \sin t$.

14. Lös DE:na

a) $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}(1 + \sin t)$;

b) $x'' - 2x' + 2x = t \cos t \cdot \cosh t$.