Differentialekvationer av 2:a ordningen

DE:r av andra ordningen har den allmänna formen $F(t, x, x', x'') = 0$ medan normalformen är $x'' = f(t, x, x')$. Vi behandlar här bara några speciella typer av DE:r av 2:a ordningen, vilka kan återföras på DE:r av 1:a ordningen.

Differentialekvationer av typen

$$x'' = f(t, x') .$$

Genom att sätta $u = x'$ får man en DE av 1:a ordningen $u' = f(t, u)$. Om $u(t, C)$ är den allmänna lösningen till denna, så är $x(t) = \int u(t, C)\, dt + C_1$ den allmänna lösningen till $x'' = f(t, x')$.

Exempel 2.1. *Kedjelinjen.* Antag att en kedja eller ett (sladdrigt) rep är upphängt mellan två punkter och hänger stilla under tyngdkraftens inverkan. Kedjans krökta förlopp beskrivs av ekvationen $y = y(x)$, där x är den horisontella och y är den vertikala variabeln. Kedjan antas ha konstant täthet ϱ (=massa per längdenhet). Betrakta ett litet stycke av kedjan med längden Δs. Detta kommer i vertikal led att påverkas av tyngdkraften $mg = \varrho g \Delta s$ och kraftkomponenterna F_{1y} och F_{2y} samt i horisontell led av kraftkomponenterna F_{1x} och F_{2x} (se fig. 1).

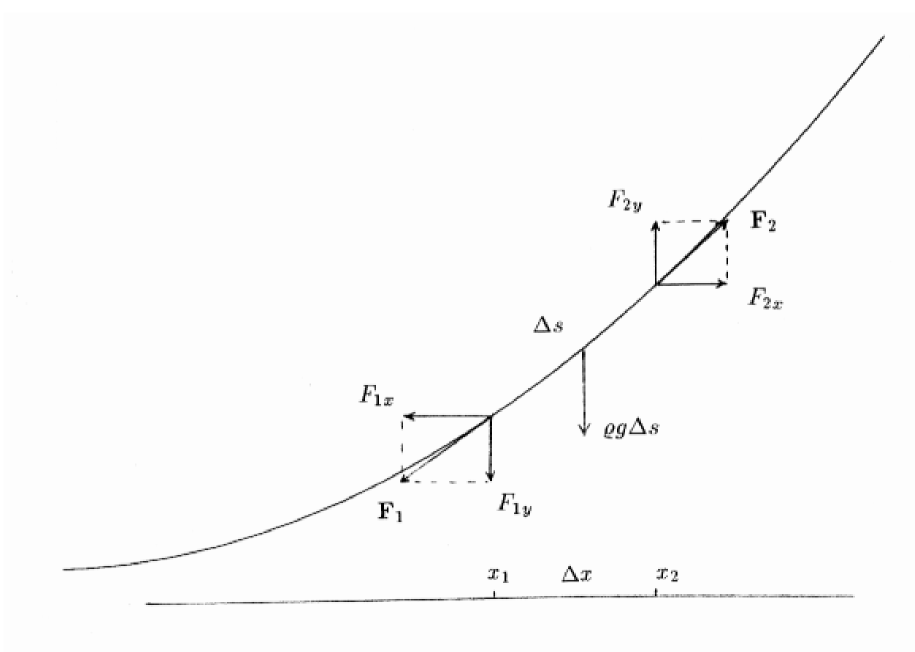

fig. 1

Eftersom kedjestycket befinner sig i vila bör

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} = \varrho g \Delta s \,. \end{cases}$$

Den första likheten ger att $F_{2x} = K$ är konstant och oberoende av var i kedjan stycket befinner sig. Eftersom $y'(x_2) = F_{2y}/F_{2x} = F_{2y}/K$ och $y'(x_1) = -F_{1y}/K$, så ger den andra likheten att $K(y'(x_2) - y'(x_1)) = \varrho g \Delta s$. Genom att dividera med Δx och låta Δx gå mot noll, finner vi att funktionen $y(x)$ bör satisfiera DE:n

$$y'' = \frac{\varrho g}{K}\sqrt{1 + y'^2} \,,$$

ty $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$. Om vi använder den förenklande beteckningen k för $\varrho g/K$ och sätter $u = y'$, får vi DE:n $u' = k\sqrt{1 + u^2}$, vilken har lösningen $u(x) = \sinh(kx + C)$. Genom integration av u fås $y(x) = (1/k)\cosh(kx + C) + C_1$.

Historiska notiser. Galileo Galilei hade förmodat att kedjelinjen är en parabel men Christiaan Huygens (1629–1695) insåg att detta är fel. År 1690 diskuterade Jacob och Johann Bernoulli problemet med kedjelinjen, vilket Johann Bernoulli därefter löste. Lösningen publicerades år 1691 i tidskriften *Acta eruditorum*. I samma nummer publicerade även Leibniz och Huygens sina lösningar på problemet. Detta var en av de allra första triumferna för problemlösning med hjälp av differentialekvationer inom Leibniz differentialkalkyl.

Differentialekvationer av typen

$$x'' = f(x, x') \,.$$

Antag att $x(t)$ är en lösning och antag att $x'(t) \neq 0$. Då kommer den inversa funktionen $t(x)$ att existera i något intervall, varför vi där kan övergå till att använda x som fri variabel i stället för t. Sätt $u = x'$. Då är $x'' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dx}u$. Funktionen $u(x) = x'(t(x))$ kommer därför att satisfiera DE:n

$$u\frac{du}{dx} = f(x, u) \,. \tag{1}$$

Omvänt gäller att om $u(x)$ är en lösning till (1), så får man en lösning till den ursprungliga DE:n genom att lösa ekvationen $x' = u(x)$, som har separerbara variabler.

Exempel 2.2. DE:n $x'' = x'e^x$ har åtminstone de triviala lösningarna $x(t) \equiv C$. Antag att $x(t)$ är en lösning sådan att $x'(t) > 0$ (eller $x'(t) < 0$) i något intervall och sätt $u = x'$. Vi får då DE:n $u\frac{du}{dx} = ue^x$, som har de icke-triviala lösningarna $u(x) = e^x + C$. Genom att lösa DE:n $x' = e^x + C$ får vi fram lösningarna

$$x(t) = -\ln\left[\frac{1}{C}\left(\pm e^{-C(t+C_1)} - 1\right)\right]$$

till $x'' = x'e^x$ (vi utelämnar detaljerna).

Anmärkning 1. DE:n $x'' = f(x)$ är ett specialfall av föregående typ. Genom att sätta $u = x'$ övergår den i $u\frac{du}{dx} = f(x)$, där variablerna kan separeras.

Differentialekvationer av typen

$$F\left(t, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}\right) = 0$$

($x(t)$ förutsätts vara $\neq 0$). Sätt $u = x'/x$. Då är

$$u' = \frac{x''}{x} - \frac{x'^2}{x^2} = \frac{x''}{x} - u^2\,,$$

dvs. $u(t)$ satisfierar DE:n $F(t, u, u' + u^2) = 0$. Omvänt gäller att om $u(t)$ är en lösning till den sistnämnda DE:n, så är $x(t) = C\exp(\int u(t)\,dt)$ en lösning till den ursprungliga DE:n.

Exempel 2.3. *Homogena linjära differentialekvationer av 2:a ordningen:*

$$x'' = p(t)x' + q(t)x\,. \tag{2}$$

DE:n har den triviala lösningen $x(t) \equiv 0$. Antag att $x(t)$ är en lösning som är $\neq 0$ i något intervall. Då kan (2) skrivas

$$\frac{x''}{x} = p(t)\frac{x'}{x} + q(t)\,.$$

Då man sätter $u = x'/x$, varvid $x''/x = u' + u^2$, fås

$$u' = p(t)\,u - u^2 + q(t)\,,$$

vilket är en DE av Riccati-typ. Antag omvänt att $u(t)$ är en lösning till en DE

$$u' = f(t)\,u + g(t)\,u^2 + h(t)$$

av Riccatis typ. Sätt $u = -\frac{1}{g(t)}\frac{x'}{x}$ (dvs. sätt $x(t) = C\exp(-\int g(t)u(t)\,dt)$). Då är

$$\frac{g'}{g^2}\frac{x'}{x} - \frac{1}{g}\frac{x''}{x} + \frac{1}{g}\frac{x'^2}{x^2} = -\frac{f}{g}\frac{x'}{x} + g\frac{1}{g^2}\frac{x'^2}{x^2} + h\,,$$

vilket kan hyfsas till en homogen linjär DE

$$x'' = \left(\frac{g'(t)}{g(t)} + f(t)\right)x' - g(t)\,h(t)\,x\,.$$

Övningsuppgifter

1. Lös DE:n $x'' + (x')^2 + 1 = 0$ fullständigt.
2. I en lätt lina, vars bägge ändar är fastknutna i varsin stolpe, är ett stort antal tunga homogena lika grova kättingar fästade med sin ena ända så, att det horisontella avståndet mellan kättingarna överallt är detsamma. Kättingarnas lösa ända når precis ner till marken (som är plan). Vilken form har linan då jämvikt antas råda? (Ledn.: Eftersom antalet kättingar är stort, betraktar vi gränsfallet då antalet är "oändligt".)
3. Lös DE:n $x'' - \frac{(x')^2}{x} = 0$.
4. Lös begynnelsevärdesproblemet $x'' - e^x x' = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$. (Ledn.: Utnyttja begynnelsevillkoren så tidigt som möjligt.)
5. Vilken form har de två bärande kablarna på en horisontell hängbro, som har konstant vikt per längdenhet? Både de bärande kablarna och de från dessa utgående vertikala kablar, som nedtill är fästa vid bron, antas ha en försummbar vikt. Vidare antas antalet vertikala kablar vara mycket stort, dvs. "oändligt många".
6. Antag att $x(t)$, $t \in I$, är en sådan lösning till DE:n $xx'' + (x')^3 = 0$ för vilken $x'(t) > 0$ för varje $t \in I$. Bestäm den inversa funktionen till $x(t)$.
7. Lös DE:n $xx'' = 2xx' + (x')^2$.
8. Mellan två givna punkter ovanför x-axeln skall en kurva dras så att den rotationsyta, som uppkommer då kurvan roterar kring x-axeln, blir så liten som möjligt. Med hjälp av variationskalkyl kan man visa att den sökta kurvan $y = y(x)$ bör satisfiera DE:n
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \sqrt{1+y'^2}\,.$$
Lös denna DE.
9. Då man i polära koordinater r och ϕ (dumt nog!) försöker bestämma den kurva $r = r(\phi)$ som ger det kortaste avståndet mellan två givna punkter finner man (med hjälp av variationskalkyl) att $r(\phi)$ bör satisfiera DE:n
$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}\right) = \frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}\,, \quad \left(r' = \frac{dr}{d\phi}\right)\,.$$
Lös denna DE.