## Analytisk lösning av differentialekvationer av 1:a ordningen

Vissa DE:r av 1:a ordningen kan lösas med speciella metoder. Vi skall se närmare på några av dessa.

### Separerbara variabler

**Definition 1.1.** En DE har *separerbara variabler* om den kan fås på formen

$$x'(t)\,g(x) = f(t)\,, \tag{1}$$

där $f$ och $g$ är kontinuerliga funktioner, definierade på intervall $I$ resp. $J$.

Antag, att $x(t)$ är en lösning till (1) i något intervall $I'$ med $I' \subseteq I$. Då är

$$x'(t)\,g(x(t)) \equiv f(t)$$

för varje $t \in I'$. Låt $F$ och $G$ vara primitiva funktioner till $f$ och $g$. Eftersom $\frac{d}{dt}G(x(t)) = g(x(t))\,x'(t)$, så gäller nu

$$G\left(x(t)\right) \equiv F(t) + C \tag{2}$$

för en lämplig reell konstant $C$. Då $G(x)$ är deriverbar med derivatan $g(x)$, så har $G$ en deriverbar invers funktion i en omgivning av ett givet $x_0$ om $g(x_0) \neq 0$. *Lokalt* i en omgivning av en punkt $x_0$ med $g(x_0) \neq 0$ kan lösningen alltså skrivas ut explicit:

$$x(t) = G^{-1}\left(F(t) + C\right)\,. \tag{3}$$

Omvänt är det lätt att se, att om funktionerna $F$ och $G$ definieras som ovan, om $G^{-1}$ är deriverbar i ett visst intervall och om sammansättningen i ekvation (3) är definierad i detta intervall, så ger (3) en lösning till (1). Vi har nämligen då att

$$G'\left(x(t)\right)\, x'(t) \equiv F'(t)\,,$$

varur (1) följer.

**Sats 1.1.** *Ekvation* (2) *ger alla lösningar till* (1) *i implicit form, lokalt i en omgivning kring varje punkt* $(t_0, x_0)$, *där* $g(x_0) \neq 0$.

> **Exempel 1.1.** Betrakta DE:n $x' = tx^2$. Insättning visar direkt att funktionen $x(t) \equiv 0$ är en lösning. Antag att $x(\cdot)$ är en lösning sådan att $x(t_0) \neq 0$ i någon punkt $t_0$. Då är $x(t) \neq 0$ för varje $t$ i något intervall $I$, som innehåller $t_0$, och där är
>
> $$\int \frac{x'(t)}{x(t)^2}\,dt \equiv \int t\,dt + \frac{1}{2}C\,.$$

dvs. $x = -2/(t^2 + C)$ är en lösning i $I$. Andra lösningar finns inte. Om $C < 0$ så representerar uttrycket $-2/(t^2 + C)$ egentligen *tre* lösningar: en i intervallet $]-\infty, -\sqrt{-C}[$, en i $]-\sqrt{-C}, \sqrt{-C}[$ och en i $]\sqrt{-C}, \infty[$. På motsvarande sätt representerar uttrycket två lösninger om $C = 0$: en på den positiva halvaxeln och en på den negativa. Om $C > 0$ ger uttrycket en enda lösning (se fig. 1)

**Definition 1.2.** En mängd $S$ av lösningar till en DE sägs utgöra en *fullständig lösning* om varje lösning är en restriktion av någon lösning som finns i $S$. Med den *allmänna lösningen* avses en lösning som beror av ett antal parametrar (som t.ex. $x(t, C_1, C_2, C_3)$) och som ger en fullständig lösning då parametrarna varierar. En enskild lösning till en DE:n kallas en *partikulärlösning* (en fullständig lösning är alltså en mängd av partikulärlösningar).

I exempel 1.1 ovan kan vi som en fullständig lösning till DE:n $x' = tx^2$ ta mängden av alla funktioner definierade av uttrycket $x(t) = -2/(t^2 + C)$, vilket för varje $C < 0$ i själva verket representerar tre funktioner med olika definitionsmängder, för $C = 0$ två funktioner samt för varje $C > 0$ en enda funktion. I exempel 0.5 är $x(t) = Ce^t$, $C \in \mathbf{R}$, den allmänna lösningen till DE:n $x' = x$.

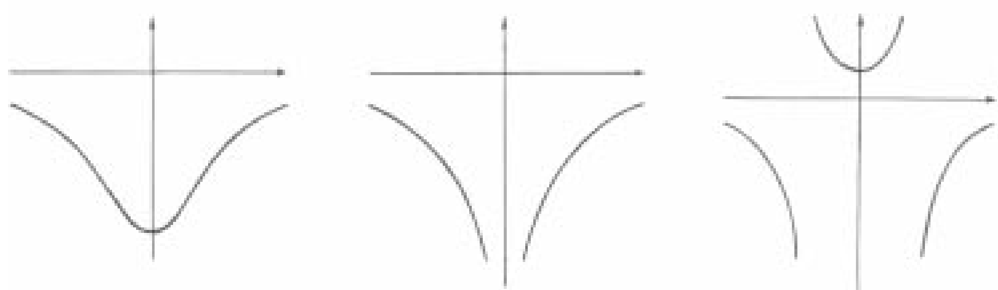

fig. 1

**Enkla populationsmodeller**. I exempel 2 i inledningen ställde vi upp DE:n $P' = (N - M)P + I$ som en modell för tidsutvecklingen hos en population $P$, då nativiteten är $N$, mortaliteten är $M$ och immigrationen är $I$. Om vi antar att $I \equiv 0$ och $N - M \equiv a$, där $a$ är en konstant, så erhåller vi DE:n

$$\frac{dP}{dt} = aP$$

(jfr. med exempel 0.5 i inledningen). Först kan vi konstatera att funktionen $P(t) \equiv 0$ är en lösning till denna DE:n. Antag att $P(t)$ är en godtycklig lösning, som är olik noll, i något intervall $J$. Genom separation av variablerna fås att

$$\int \frac{dP(t)}{P(t)} = \int a\, dt$$

och vidare att $\ln|P(t)| = at + \ln C_1$, där $C_1$ är en godtycklig positiv konstant (då $C_1$ genomlöper alla positiva tal, kommer $\ln C_1$ att genomlöpa alla reella tal). I intervallet $J$

måste således $P(t)$ ha formen $P(t) = \pm C_1 e^{at}$. Varje lösning i $J$ är alltså en restriktion av en funktion av formen $P(t) = Ce^{at}$, där $C$ är ett godtyckligt reellt tal. Att funktioner av denna form faktiskt är lösningar i hela $\mathbf{R}$, visas genom insättning i DE:n:

$$P'(t) = aCe^{at} = aP(t)\,.$$

Om populationens storlek vid tiden noll kallas $P_0$, så är $C = P_0$, dvs.

$$P(t) = P_0 e^{at}\,.$$

Detta är *Malthus lag*, uppkallad efter den brittiske nationalekonomen Thomas Malthus (1766-1834). Vi kan konstatera att enligt denna populationsmodell är den tomma populationen $P(t) \equiv 0$ den enda som är i jämvikt ($P = 0$ är en *jämviktspunkt*). Denna jämvikt sägs vara *instabil* eftersom minsta lilla ändring av utgångspopulationen (till minst två individer) leder till en population "långt från" den tomma populationen.

Om vi fortsättningsvis antar att $M - N \equiv a$ men att immigrationen $I$ har ett konstant värde $d$ (som kan vara olikt noll), så erhåller vi DE:n

$$P' = aP + d\,.$$

Nu är tydligen $P(t) = -d/a$ en lösning ($P = -d/a$ är en *jämviktspunkt*). Om vi antar att i något intervall $J$ gäller att $P(t)$ är en lösning med $P(t) \neq -d/a$ för $t \in J$, så finner vi genom separation av variablerna att $|aP(t)+d| = C_1 e^{at}$, varför $P(t)$ måste ha formen $P(t) = Ce^{at} - d/a$ (se övningsuppgift 7). Omvänt finner man genom direkt insättning att alla funktioner av denna form är lösningar på hela reella axeln. Om populationens storlek vid tiden noll kallas $P_0$, är $C = P_0 + d/a$ och

$$P(t) = \left(P_0 + \frac{d}{a}\right) e^{at} - \frac{d}{a}\,.$$

*Den logistiska lagen* introducerades av den belgiske matematikern Pierre F. Verhulst 1838. Antag att den relativa tillväxttakten är

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a - bP\,,$$

så att den för små populationen är ungefär $a$, som i Malthus lag, men så att den avtar mot noll då $P$ närmar sig värdet $a/b$ (t.ex. beroende på brist på föda). Vi har då DE:n

$$P' = P(a - bP)\,,$$

den *logistiska differentialekvationen*. Först noterar vi att $P(t) \equiv 0$ och $P(t) \equiv a/b$ är lösningar (dessa populationer är i jämvikt). Om vi nu antar att $P(t)$ är en godtycklig lösning i något intervall $J$ med $P(t) \neq 0$ och $P(t) \neq a/b$ i $J$, så kan variablerna separeras (se övningsuppgift 8). Man finner att

$$\frac{P}{a - bP} = Ce^{at}\,,$$

där $C \neq 0$. Om $P_0$ betecknar populationens storlek vid tiden noll, så är

$$\frac{P_0}{a - bP_0} = C$$

och vi kommer till att

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}} \,.$$

Insättning i DE:n visar att detta faktiskt är en lösning. Av uttrycket framgår att jämviktspunkten $P = a/b$ är *stabil* i den meningen att en positiv population mindre än $a/b$ asymptotiskt växer mot jämviktsvärdet $a/b$ medan en population större än jämviktsvärdet asymptotiskt avtar mot jämviktsvärdet. Jämviktspunkten $P = 0$ är liksom i Malthus modell instabil.

## Linjära ekvationer

En linjär differentialekvation av första ordningen har den allmänna formen

$$x' = f(t)\,x + g(t)\,, \tag{4}$$

där $f$ och $g$ antas vara kontinuerliga funktioner. Om $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är två lösningar till (4), så är

$$\frac{d}{dt}[x_1(t) - x_2(t)] = f(t)[x_1(t) - x_2(t)]$$

dvs. $\bar{x}(t) = x_1(t) - x_2(t)$ är en lösning till den *homogena linjära differentialekvationen*

$$x' = f(t)\,x\,. \tag{5}$$

**Sats 1.2.** *Funktionerna*

$$x_0(t, C) = Ce^{\int f(t)\,dt} \qquad (C \in \mathbf{R})$$

*utgör den allmänna lösningen till* (5) *och om* $x_1(t)$ *är en partikulärlösning till* (4)*, så är* $x_1(t) + x_0(t, C)$ *den allmänna lösningen till* (4)*.*

Är nämligen $x(t)$ en godtycklig lösning till (4) så är som vi sett $x(t) - x_1(t)$ en lösning till (5), dvs. det finns ett tal $C$ sådant att $x(t) - x_1(t) = x_0(t, C)$.

Vi bestämmer först alla lösningar till (5). Det är uppenbart att funktionen $x(t) \equiv 0$ är en lösning. På grund av detta kan vi rikta in oss på att bestämma sådana lösningar $x(t)$, som går genom en given punkt $(t, x)$ med $x \neq 0$. För en sådan fås (åtminstone i en omgivning av $(t, x)$ ), eftersom variablerna kan separeras,

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int f(t)\,dt + \ln C_1 \quad (C_1 = \text{konst.},\;\; C_1 > 0)\,.$$

Alltså är

$$|x(t)| = C_1 e^{\int f(t)\,dt}\,, \quad \text{dvs.} \quad x(t) = Ce^{\int f(t)\,dt}\,.$$

(Värdet på konstanten $C$ kan bestämmas då vi vet att lösningen skall gå genom $(t,x)$ men just nu är vi inte intresserade av detta.) Omvänt är en funktion av ovannämnda form alltid en lösning till (5), eftersom kedjeregeln ger att

$$x'(t) = C\exp(\int f(t)\,dt)f(t) = x(t)f(t)\,.$$

Om $C \neq 0$ så är $x(t) \neq 0$ för varje $t$. Vi har alltså för varje $C \neq 0$ en *global* lösning, inte bara en lösning i en omgivning av $(t,x)$. För $C = 0$ återfår vi den globala lösningen $x(t) \equiv 0$. Vi har därmed bevisat att den allmänna lösningen till den homogena DE:n (5) ges av funktionsskaran

$$x(t) = Ce^{\int f(t)\,dt} \qquad (C \in \mathbf{R})\,.$$

**Konstantens variation**, är en metod att få fram en partikulärlösning till den inhomogena DE:n (4) genom att göra en ansats av formen

$$x(t) = C(t)e^{\int f(t)\,dt}\,,$$

där konstanten $C$ i lösningen till den homogena ekvationen har ersatts med en funktion $C(t)$. Eftersom $x'(t) = C'(t)\exp(\int f(t)dt) + C(t)\exp(\int f(t)dt)f(t) = f(t)x(t) + C'(t)\exp(\int f(t)\,dt)$, är $x(t)$ en lösning till (4) om och endast om $C'(t)\exp(\int f(t)\,dt) \equiv g(t)$. Således är

$$\begin{aligned} C(t) &= \int g(t)e^{-\int f(t)\,dt}\,dt \\ &= \int^t g(s)e^{-\int^s f(u)\,du}\,ds \end{aligned}$$

plus en godtycklig konstant, som vi emellertid nu kan ge värdet noll, eftersom vi bara behöver få fram *en* partikulärlösning. Funktionen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\int^t f(u)\,du}\int^t g(s)e^{-\int^s f(u)\,du}\,ds \\ &= \int^t g(s)e^{\int_s^t f(u)\,du}\,ds \end{aligned}$$

är alltså en partikulärlösning till (4). Enligt Sats 1.2 är

$$x(t) = C\exp\left(\int^t f(s)\,ds\right) + \int^t g(s)e^{\int_s^t f(u)\,du}\,ds$$

*den allmänna lösningen till DE:n* (4).

**Exempel 1.2.** Vi söker en lösning $x(t)$ till $x' = tx + \sin t$, för vilken $x(0) = 1$. Den homogena ekvationen $x' = tx$ integreras genom separation av variablerna:

$$\int \frac{dx}{x} = \int t\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \frac{1}{2}t^2 + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad x = Ce^{\frac{1}{2}t^2}\,.$$

För att få fram en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen gör vi ansatsen $x(t) = C(t)\exp(\frac{1}{2}t^2)$. Eftersom

$$x'(t) = C(t)e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot t + C'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} = t\,x(t) + C'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} ,$$

bör $C(t)$ uppfylla $C'(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}\sin t$. Vi kan därför välja

$$C(t) = \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}} \sin s\, ds .$$

Alltså är funktionen

$$x_1(t) = \int_0^t e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \sin s\, ds ,$$

en partikulärlösning, varför den allmänna lösningen har formen

$$x(t) = Ce^{\frac{1}{2}t^2} + \int_0^t e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \sin s\, ds .$$

Genom att utnyttja begynnelsevillkoret $x(0) = 1$ finner vi att $C = 1$.

## Exakta differentialekvationer

Antag att funktionen $u(t,x)$ tillhör klassen $\mathcal{C}^1$. Om $u'_x(t_0,x_0) \neq 0$ och $u(t_0,x_0) = C$, där $C$ är en konstant, så definierar (enligt satsen om implicit definierade funktioner; se kursen "Flerdimensionell analys") ekvationen $u(t,x) = C$ en funktion $x(t)$ i $\mathcal{C}^1$, åtminstone i en liten omgivning av $(t_0,x_0)$. Då är $u(t,x(t)) \equiv C$ för alla $t$ i en omgivning av $t_0$. Derivering ger att

$$0 \equiv \frac{d}{dt}u\left(t,x(t)\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}x'(t) = P\left(t,x(t)\right) + Q\left(t,x(t)\right)\, x'(t) ,$$

där vi har satt

$$P(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{och} \quad Q(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x} . \tag{6}$$

Funktionen $x(t)$ satisfierar alltså differentialekvationen

$$P(t,x) + Q(t,x)x' = 0 . \tag{7}$$

**Definition 1.3.** En DE av formen (7) är *exakt* om det finns en funktion $u(t,x)$ i klassen $\mathcal{C}^1$ sådan att (6) gäller.

**Sats 1.3.** *I en rektangel $V = ]a,b[\times]u,v[$, där $Q(t,x) \neq 0$, fås alla lösningar till den exakta DE:n (7) genom att man ur ekvationen $u(t,x) = C$, där $C$ är en godtycklig konstant, löser ut variabeln $x$ som en funktion av $t$.*

*Bevis.* Om (7) är exakt, så kan denna DE skrivas $\frac{d}{dt}u(t,x(t)) = 0$, varvid $u(t,x(t)) = C = \text{konst}$.

På grund av Sats 1.3 inställer sig följande frågor:

1) Hur vet man om en DE av formen (7) är exakt eller inte?
2) *Om* den är exakt, hur får man då fram funktionen $u(t,x)$?

Svaret på den första frågan ges av följande sats, som också bevisas i kursen Flerdimensionell analys, medan svaret på den andra frågan ges av satsens bevis.

**Sats 1.4.** *Antag att funktionerna $P(t,x)$ och $Q(t,x)$ tillhör $\mathcal{C}^1$ i en axelriktad rektangel $V$ i $tx$-planet. Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att det skall existera en funktion $u(t,x)$ i $\mathcal{C}^1$, sådan att*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(t,x) \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = Q(t,x) \tag{8}$$

*är att*

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) \equiv \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) \tag{9}$$

*i rektangeln $V$.*

*Bevis.* *Nödvändigheten*: Antag att en sådan funktion $u(t,x)$ existerar att (8) gäller. Då $u$ ju är i $\mathcal{C}^2$, så är de blandade derivatorna av andra ordningen lika, varför

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial P}{\partial x}\,.$$

*Tillräckligheten*: Vi antar nu att (9) gäller i $V$ och skall konstruera en funktion $u(t,x)$ så att (8) gäller. Varje lösning $u$ i $\mathcal{C}^1$ till den partiella differentialekvationen $\partial u/\partial t = P(t,x)$ måste vara av formen

$$u(t,x) = \int P(t,x)\,dt + C(x)\,,$$

där vi för varje $x$ har en "integrationskonstant" $C(x)$, dvs. en funktion av $x$. Vi söker en funktion $C(x)$ sådan att för funktionen $u(t,x)$ dessutom gäller att $Q(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int P(t,x)\,dt + C'(x)$, dvs. sådan att

$$C'(x) = Q(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\int P(t,x)\,dt\,.$$

Högra ledet i denna likhet är oberoende av $t$, ty

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Q(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\int P(t,x)\,dt\right) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\int P(t,x)\,dt = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x} \equiv 0\,.$$

Genom att integrera får vi funktionen $C(x)$ bestämd och därmed har vi också fått fram en funktion $u(t,x)$ för vilken (8) gäller. $\diamondsuit$

**Anmärkning 1.** Varje DE $f(x) - g(y)\,y' = 0$ med separerbara variabler är exakt, ty $\frac{\partial}{\partial x}(-g(y)) \equiv 0 \equiv \frac{\partial}{\partial y} f(x)$.

**Exempel 1.3.** DE:n $(x-t^2)+(t+x^2)x'=0$ är exakt, eftersom

$$\frac{\partial}{\partial x}(x-t^2) \equiv 1 \equiv \frac{\partial}{\partial t}(t+x^2)\,.$$

Vi bestämmer en funktion $u(t,x)$ genom att integrera ekvationen $\partial u/\partial t = x - t^2$ och får:

$$u(t,x) = \int (x-t^2)\,dt = xt - \frac{1}{3}t^3 + C(x)\,.$$

Funktionen $C(x)$ bestäms då man kräver att även relationen $\partial u/\partial x = t + x^2$, dvs. $t + C'(x) = t + x^2$, bör gälla. Detta ger att $C(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, där $C$ är en godtycklig konstant för vilken vi t.ex. kan välja värdet 0. Således är

$$u(t,x) = tx - \frac{1}{3}(t^3 - x^3)$$

och lösningarna till DE:n ges implicit av ekvationer av formen $u(t,x) = $ konstant.

**Potential.** I kurser i flerdimensionell analys brukar visas att om $P(x,y)$ och $Q(x,y)$ är två funktioner i $\mathcal{C}^\infty$, så är kurvintegralen

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

från en fast punkt $(x_0,y_0)$ till en variabel punkt $(x,y)$ i någon rektangel $R$ i $xy$-planet "oberoende av vägen" (dvs. oberoende av integrationskurva mellan dessa punkter) om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Integralens värde $u(x,y)$ är då en funktion, för vilken $\partial u/\partial x = P$ och $\partial u/\partial y = Q$. och funktionen $u$ sägs utgöra en *potentialfunktion* till vektorfältet $(P(x,y), Q(x,y))$. Lösningskurvorna (dvs. graferna till lösningarna) till differentialekvationen $P(x,y) + Q(x,y)y(x) = 0$ är härvid *ekvipotentialkurvor*, dvs. kurvor där potentialen $u(x,y)$ är konstant.

Begreppet potential i fysiken är en motsvarighet i tre dimensioner. Om $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ är ett kraftfält med komponenterna $F_1(\mathbf{x})$, $F_2(\mathbf{x})$ och $F_3(\mathbf{x})$ , för vilket rotationen är noll, dvs. är sådant att

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \equiv 0\,,$$

så är kurvintegralen

$$V(\mathbf{x}) = -\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = -\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + F_3\,dx_3$$

oberoende av vägen mellan en fast punkt $\mathbf{x}_0$ och en variabel punkt $\mathbf{x}$. Funktionen $V(\mathbf{x})$ är den potentiella energin för en masspartikel som befinner sig i punkten $\mathbf{x}$.

### Integrerande faktor

Betrakta på nytt DE:n

$$P(t,x) + Q(t,x)x' = 0 \qquad (P, Q \in \mathcal{C}^1)\,. \tag{7}$$

**Definition 1.4.** En funktion $\mu(t,x)$ sägs vara en *integrerande faktor* till (7) om $\mu \in \mathcal{C}^1$ och DE:n

$$\mu P + \mu Q\, x' = 0 \tag{10}$$

är exakt.

**Anmärkning 2.** Observera att falska lösningar kan introduceras då man multiplicerar med en integrerande faktor $\mu$: Varje funktion $x(t)$ i $\mathcal{C}^1$ sådan att $\mu(t, x(t)) \equiv 0$ kommer att vara en lösning till (10) men behöver inte vara en lösning till (7). På samma sätt kan lösningar även försvinna: Då DE:n $tx^2 + x - tx' = 0$ multipliceras med den integrerande faktorn $1/x^2$ utesluts den triviala lösningen $x(t) \equiv 0$.

En funktion $\mu$ är en integrerande faktor till (7) om och endast om

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial x}\,. \tag{11}$$

Då vi utför deriveringarna får vi $\frac{\partial\mu}{\partial t}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial\mu}{\partial x}P + \mu\frac{\partial P}{\partial x}$. Kring punkter $(t,x)$, där $\mu(t,x) \neq 0$ är alltså $\mu$ en integrerande faktor om och endast om (dividera med $\mu$)

$$\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial t}Q - \frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}P = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\,. \tag{12}$$

**Exempel 1.4.** Ekvationen $(t^2x^4 + t^6) - t^3x^3x' = 0$ är inte exakt, eftersom

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(t^2x^4 + t^6) = 4t^2x^3 \quad \text{och} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(-t^3x^3) = -3t^2x^3\,.$$

Att bestämma en integrerande faktor kan vara svårt men om man gissar att det finns en integrerande faktor av någon viss enkel form – i vårt fall gissar vi att $\mu = \mu(t)$ – så kan $\mu$ fås relativt enkelt (om man gissat rätt!). Vi sätter in ansatsen $\mu(t)$ i (12) (eller (11)) och får efter hyfsning den ordinära DE:n

$$\frac{d(\ln\mu)}{dt} = -\frac{7}{t}\,,$$

vilken har lösningen $\mu = 1/t^7$ (eftersom vi bara är ute efter *en* integrerande faktor, behöver vi inte använda oss av någon godtycklig integrationskonstant). Vår ursprungliga DE är således ekvivalent med den exakta DE:n

$$\frac{x^4}{t^5} + \frac{1}{t} - \frac{x^3}{t^4}x' = 0\,,$$

för vilken vi som i exempel 3 får fram potentialfunktionen

$$u(t,x) = -\frac{x^4}{4t^4} + \ln t\,.$$

Alla lösningar $x(t)$ satisfierar alltså $x(t)^4 = 4t^4(\ln t + C)$, där $C$ är konstant.

**Anmärkning 3.** Den linjära ekvationen $x' = f(t)\,x + g(t)$ har den integrerande faktorn $\mu = \exp(-\int f(t)\,dt)$, ty om $P = -f(t)\,x - g(t)$ och $Q \equiv 1$, så är

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-f(t)\,x\,e^{-\int f(t)\,dt}\right) = -f(t)\,e^{-\int f(t)\,dt}\\
\frac{\partial}{\partial t}(\mu Q) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\int f(t)\,dt}\right) = -f(t)\,e^{-\int f(t)\,dt}\,.
\end{aligned}$$

Efter multiplikation med $\mu$ kan ekvationen därför skrivas

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{-\int f(t)\,dt} - \int g(t)e^{-\int^t f(s)\,ds}\,dt\right) = 0\,,$$

varför funktionen $u(t,x)$ inom parentesen måste vara konstant på lösningskurvorna.

## Variabeltransformationer

Med hjälp av en substitution $t = g(\xi,\eta)$, $x = h(\xi,\eta)$ kan man ofta — om man väljer den rätt — transformera en DE så att den blir *enklare att lösa.* Genom substitutionen ersätter vi de vanliga koordinaterna $t$ och $x$ med (i.a.) kurvlinjiga koordinater $\xi$ och $\eta$. En lösningskurva $x = x(t)$ till en DE övergår då i en lösningskurva $\eta = \eta(\xi)$ till den transformerade DE:n.

Om vi utgår från DE:n $x' = f(t,x)$ och gör substitutionen ovan, så transformeras funktionen $f$ och antar formen $\overline{f}(\xi,\eta) = f(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta))$. Genom att derivera $g(\xi,\eta)$ och $h(\xi,\eta)$ med avseende på $\xi$ (varvid $\eta$ betraktas som en funktion av $\xi$) fås

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\xi} &= g'_\xi + g'_\eta\frac{d\eta}{d\xi}\\
\frac{dx}{d\xi} &= h'_\xi + h'_\eta\frac{d\eta}{d\xi}\,.
\end{aligned}$$

Eftersom $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\xi}/\frac{dt}{d\xi}$, får den transformerade DE:n därmed utseendet

$$\frac{h'_\xi + h'_\eta\frac{d\eta}{d\xi}}{g'_\xi + g'_\eta\frac{d\eta}{d\xi}} = \overline{f}(\xi,\eta)\,.$$

**Exempel 1.5.** DE:n $tx' + x - (2t+1) = 0$ kan skrivas $(tx)' = 2t + 1$. Vi försöker därför med nya variabler $\xi = t$, och $\eta = tx$ och får

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2\xi + 1\,.$$

Denna DE har lösningarna $\eta = \xi^2 + \xi + C$ i $\xi\eta$-planet, varför lösningarna i $tx$-planet ges av $tx = t^2 + t + C$.

Vi skall nu studera några olika typer av DE:r och lära oss de transformationer som är lämpliga vid deras lösning:

**Differentialekvationer av typen**

$$x' = f(at + bx + c)\,.$$

Sätt $\eta = at + bx + c$ och låt $t$ stå kvar som den andra variabeln (naturligtvis kan man också sätta $\xi = t$). Nu är

$$\frac{d\eta}{dt} = a + b\frac{dx}{dt}\,.$$

DE:n övergår alltså i $\frac{d\eta}{dt} = bf(\eta) + a$, där variablerna kan separeras.

**Exempel 1.6.** I DE:n $x' = e^{t+x}(t+x)$ inför vi variabeln $\eta = t + x$ och får $\eta' - 1 = e^{\eta}\eta$, där variablerna kan separeras. Genom integration fås $\int d\eta/(\eta e^{\eta} + 1) = t + C$, vilket ger $t$ som en funktion av parametern $\eta$. Med hjälp av likheten $\eta = t + x$ får vi skaran av lösningar i parameterform:

$$\begin{cases} t = \int \frac{d\eta}{\eta e^{\eta}+1} - C \\ x = \eta - \int \frac{d\eta}{\eta e^{\eta}+1} + C\,. \end{cases}$$

**Ekvationer av typen**

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

DE:r av detta slag brukar sägas vara av *homogen* typ. Sätt $\eta = x/t$. Då är $x = t\eta$ och $x' = \eta + t\eta'$, vilket leder till ekvationen $t\eta' = f(\eta) - \eta$ där variablerna kan separeras.

**Exempel 1.7.** DE:n $txx' = t^2 + x^2$ kan (för $t \neq 0$ och $x \neq 0$) skrivas

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx} = \frac{t}{x} + \frac{x}{t}\,.$$

Den är alltså av homogen typ. Då vi sätter $\eta = x/t$ antar den den enkla formen $\eta\eta' = 1/t$, vilket ger att $\frac{1}{2}\eta^2 = \ln(C_1|t|)$ och vidare att

$$x^2 = 2t^2\ln(Ct)\,.$$

**Ekvationer av typen**

$$x' = f\left(\frac{at + bx + c}{a_1t + b_1x + c_1}\right), \qquad (a, b) \neq (0, 0),\ \ (a_1, b_1) \neq (0, 0)\,.$$

*a)* Om $c = 0 = c_1$ så är ekvationen homogen (förläng bråket med $1/t$!). *b)* Om de räta linjerna $at + bx + c = 0$ och $a_1t + b_1x + c_1 = 0$ är *parallella*, sätt $\eta = a_1t + b_1x + c_1$, varefter variablerna kan separeras. *c)* Om de räta linjerna *skär varandra* i en punkt $(t_0, x_0)$, sätt

$$\begin{cases} t = t_0 + \xi \\ x = x_0 + \eta \, , \end{cases}$$

dvs. flytta origo till $(t_0, x_0)$. Då antar DE:n formen

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right) = f\left(\frac{a + b(\eta/\xi)}{a_1 + b_1(\eta/\xi)}\right) ,$$

dvs. den är homogen (t.ex. $at+bx+c$ kan ju skrivas $a(t-t_0)+b(x-x_0)+at_0+bx_0+c = a\xi + b\eta$, eftersom $at_0 + bx_0 + c = 0$).

**Bernoullis differentialekvation**

$$x' = f(t)\, x + g(t)\, x^m \, .$$

Märk, att om $m \geq 1$ så är $x(t) \equiv 0$ en lösning. Om $m = 1$ så är DE:n linjär. Vi antar därför att $m \neq 1$. Bernoullis DE kan skrivas

$$x^{-m}x' - f(t)\, x^{1-m} = g(t) \, .$$

Genom att sätta $\eta = x^{1-m}$, $\eta' = (1-m)x^{-m}x'$, fås den linjära DE:n $\eta' = (1-m)f(t)\eta + (1-m)g(t)$.

**Exempel 1.8.** Ekvationen $x' + x = tx^2$ är av Bernoulli-typ och har den triviala lösningen $x(t) \equiv 0$. Division med $x^2$ ger

$$\frac{x'}{x^2} + \frac{1}{x} = t \, .$$

Vi sätter $\eta = \frac{1}{x}$, varvid $\eta' = -\frac{1}{x^2}x'$, och får då den linjära ekvationen $\eta' = \eta - t$, vilken har den allmänna lösningen $\eta(t) = Ce^t + t + 1$. Vår ursprungliga DE har alltså den allmänna lösningen

$$x(t) = \frac{1}{Ce^t + t + 1} \qquad (C \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}) \, .$$

**Riccatis differentialekvation**

$$x' = f(t)\, x + g(t)\, x^2 + h(t) \, .$$

Antag att vi på ett eller annat sätt lyckats finna en partikulärlösning $x_1(t)$. Sätt $x = x_1 + z$, vilket ger:

$$x_1' + z' = f(t)\,(x_1 + z) + g(t)\left(x_1^2 + 2x_1z + z^2\right) + h(t) \, ,$$

och vidare (eftersom $x_1' = f(t)\, x_1 + g(t)\, x_1^2 + h(t)$)

$$z' = \left(f(t) + 2g(t)x_1(t)\right)\, z + g(t)\, z^2 \, ,$$

vilket är en ekvation av Bernoulli-typ.

**Exempel 1.9.** DE:n $x' = 2 - 2tx + x^2$ har partikulärlösningen $x_1 = 2t$. Då man sätter $x = 2t + z$, får man:

$$2 + z' = 2 - 4t^2 - 2tz + 4t^2 + 4tz + z^2$$

och efter hyfsning: $z' = 2tz + z^2$. Denna DE är av Bernoulli-typ och förenklas till en linjär DE med hjälp av transformationen $\eta = 1/z$.

**Historiska notiser**. Bernoullis DE studerades av Jacob (Jacques) Bernoulli (1654–1705). Den löstes av Leibniz och brodern Johann (Jean) Bernoulli (1657–1748). En DE av Riccati-typ uppträder första gången 1694 i en studie an Johann Bernoulli i tidskriften Acta eruditorum. Sitt namn fick denna DE av den venetianske greven Jacopo Francesco Riccati (1674–54), som 1724 i samma tidskrift studerade (men inte löste) en DE av Riccati-typ. Det var Leonhard Euler (1707–83) som reducerade Riccatis DE till Bernoullis DE på det ovan beskrivna sättet (publicerat 1764). Euler klargjorde begreppen exakt DE och integrerande faktor år 1734.

## Geometriska aspekter på differentialekvationer

En DE $x' = f(t, x)$ definierar ett *riktningsfält* där $f$ är definierad: I varje punkt $(t, x)$ har vi en vektor $(1, f(t, x))$. Lösningskurvorna till DE:n är kurvor som i varje punkt tangerar vektorer i riktningsfältet.

**Exempel 1.10.** För DE:n $x' = x$ får vi vektorfältet i den vänstra bilden i fig. 2, medan några lösningskurvor, dvs. grafer för funktioner av formen $x(t) = Ce^t$, är utritade på den högra bilden.

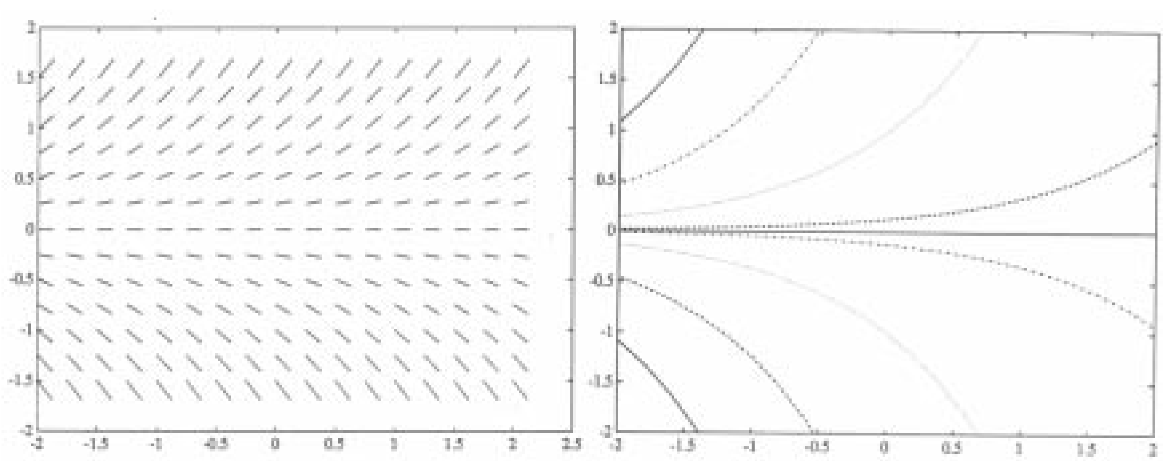

fig. 2

Betrakta DE:n $F(t,x,x')=0$.

**Definition 1.5.** Varje trippel $(t,x,p)$ av tal sådana att $F(t,x,p)=0$ kallas ett *linje-element* eller ett *kurvelement* (till lösningskurvorna).

Om $x(t)$ är en lösning till en DE så är $(t,x,x'(t))$ ett linjeelement till kurvan $x=x(t)$.

**Exempel 1.11.** Det kan finnas flera linje-element i samma punkt $(t,x)$. För t.ex. DE:n $x'^2+t^2=1$ har vi i varje punkt $(t,x)$ med $|t|<1$ två riktningar, nämligen $p=\sqrt{1-t^2}$ och $p=-\sqrt{1-t^2}$.

Den allmänna lösningen till DE:n $x'=f(t,x)$ innehåller en godtycklig parameter $C$, dvs. den är av formen $x=x(t,C)$. För varje värde på $C$ har vi en speciell lösningskurva. Mängden av alla sådana lösningskurvor utgör en kurvskara av lösningar till DE:n.

Om vi *omvänt* utgår från en kurvskara, som är given implicit genom $F(t,x,C)=0$ ($C\in I=$ intervall), så kan vi i allmänhet på följande sätt få fram en DE med den givna kurvskaran som lösningskurvor: Genom att derivera identiteten $F(t,x(t),C)\equiv 0$ får vi ett ekvationssystem

$$\begin{cases} F(t,x,C)=0 \\ F'_t+F'_x x'=0\,, \end{cases}$$

ur vilket vi (i allmänhet) kan eliminera $C$, varvid en DE uppstår, vilken har kurvorna i kurvskaran som lösningskurvor.

**Exempel 1.12.** Betrakta kurvskaran $x=1/(t+C)$, $C\in\mathbf{R}$. Derivering ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t+C} \\ x' &= -\frac{1}{(t+C)^2}\,. \end{aligned}$$

Då $C$ elimineras fås DE:n $x'=-x^2$.

**Exempel 1.13.** Deriverar vi $x=C/t$, så får vi $x'=-C/t^2$. Då vi eliminerar $C$ så får vi DE:n $x'=-x/t$.

**Ortogonala trajektorier.** Antag att ekvationen $G(x,y,C)=0$ beskriver en kurvskara $K$ då parametern $C$ varierar.

**Definition 1.6.** En kurva, som skär varje kurva i $K$ ortogonalt, kallas en *ortogonal trajektorie* till $K$ (se fig. 3).

Om $F(x,y,y')=0$, där $y$ är en funktion av $x$, är DE:n svarande mot kurvskaran $K$, så är

$$F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0$$

DE:n svarande mot $K$:s ortogonala trajektorier.

**Exempel 1.14.** I exempel 1.12 såg vi att kurvorna i kurvskaran $y=1/(x+C)$ är lösningar till DE:n $y'=-y^2$. DE:n svarande mot de ortogonala trajektorierna är således

$$-\frac{1}{y'}=-y^2\,,$$

vilken har den allmänna lösningen $3x - y^3 = C_1$. Denna kurvskara består alltså av de ortogonala trajektorierna till kurvskaran $y = 1/(x + C)$ (se fig. 3).

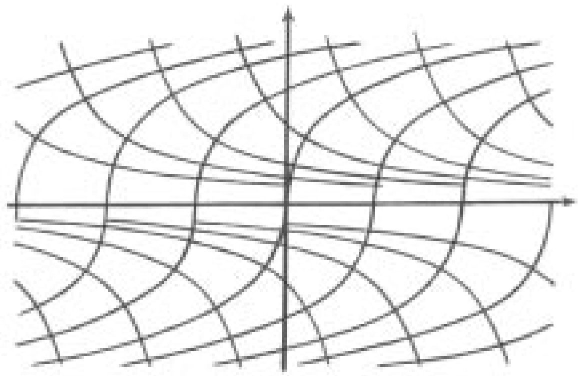

fig. 3

**Singulära lösningar**

Betrakta en allmän DE av formen

$$(13) \qquad F(t, x, x') = 0 \qquad (F \in \mathcal{C}^1)\,.$$

**Definition 1.7.** Ett linjeelement $(t, x, p)$ är *singulärt* om $F'_p(t, x, p) = 0$ (motsats: *regulärt* linjeelement). En lösning $x(t)$ till (13) är *singulär* om alla dess linjeelement är singulära, dvs. om

$$\begin{cases} F\,(t, x(t), x'(t)) \equiv 0 \\ F'_p\,(t, x(t), x'(t)) \equiv 0 \end{cases}$$

(motsats: *regulär*).

Följande exempel visar att en lösning kan vara singulär då DE:n skrivs på ett sätt medan den är regulär då DE:n skrivs på ett annat sätt:

**Exempel 1.15.** DE:n $x' = t\sqrt[3]{x}$ har inga singulära lösningar, eftersom $F'_p(t, x, p) \equiv 1$ då $F$ är definierat genom $F(t, x, p) = p - t\sqrt[3]{x}$. Betraktar vi däremot DE:n $x'^3 - t^3x = 0$ och sätter $G(t, x, p) = p^3 - t^3x$ så är $G'_p(t, x, p) = 3p^2$. Lösningen $x(t) \equiv 0$ är alltså nu en singulär lösning.

Låt $S$ vara den kurvskara som ekvationen $g(t, x, C) = 0$ ($g \in \mathcal{C}^1$) definierar i $tx$-planet.

**Definition 1.8.** En kurva som tangerar varje kurva i $S$ kallas en *envelopp* till $S$.

Betrakta två kurvor i $S$ svarande mot närliggande parametervärden $C$ och $C + \Delta C$. Eventuella skärningspunkter mellan dessa kurvor svarar då mot lösningar till ekvationssystemet (se fig. 4)

$$\begin{cases} g(t, x, C) = 0 \\ g(t, x, C + \Delta C) = 0\,, \end{cases}$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{cases} g(t,x,C) = 0 \\ \frac{1}{\Delta C}[g(t,x,C+\Delta C) - g(t,x,C)] = 0\,. \end{cases}$$

Punkterna på en envelopp till $S$ kommer således att satisfiera ekvationssystemet

$$\begin{cases} g(t,x,C) = 0 \\ g'_C(t,x,C) = 0\,, \end{cases}$$

vilket vi får då $\Delta C \to 0$. Ekvationen för enveloppen fås genom elimination av $C$.

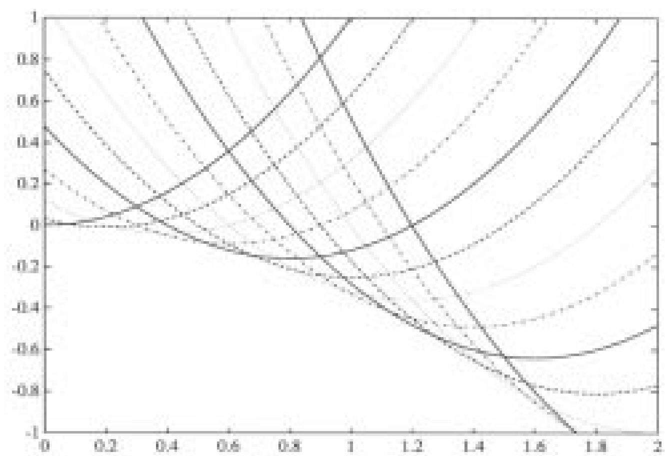


fig. 4

Antag nu att kurvorna i kurvskaran $x = g(t,C)$ är lösningar till en DE $F(t,x,x') = 0$ samt att $g \in \mathcal{C}^2$. Enligt ovanstående satisfierar punkterna på någon envelopp till kurvskaran ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = g(t,C) \\ g'_C(t,C) = 0\,. \end{cases}$$

Om $g''_{CC} \neq 0$ kan man ur den andra av dessa likheter lösa ut parametern $C$ som en funktion av $t$, varigenom man får enveloppens ekvation $x = g(t, C(t)\,)$. Varje kurva i kurvskaran satisfierar DE:n $F(t,x,x') = 0$. Likheten

$$F(t, g(t,C), g'_t(t,C)) = 0 \tag{14}$$

gäller därför identiskt för varje $t$ och $C$. Men då är ju $F(t, g(t,C(t)), g'_t(t,C(t))\,) \equiv 0$, dvs. *enveloppen till kurvskaran är en lösning* till DE:n. Detta inser man även genom att betrakta fig. 4, eftersom en kurva är en lösning till en DE om och endast om kurvans alla linjeelement satisfierar DE:n.

Genom att derivera (14) med avseende på $C$ får vi identiteten $F'_x g'_C + F'_p g''_{Ct} \equiv 0$. Då vi i denna sätter in $C(t)$ på $C$:s plats och beaktar att $g'_C(t,C(t)) \equiv 0$, finner vi att i punkter där $g''_{Ct} \neq 0$ är $F'_p(t, g(t,C(t)), g'_t(x,C(t))\,) = 0$. Men

$$\frac{d}{dt} g(t,C(t)) = g'_t + g'_C C'(t) = g'_t(t,C(t))\,,$$

eftersom $g'_C(t, C(t)) \equiv 0$. Insättning ger nu att

$$F'_p\left(t, g\left(t, C(t)\right), \frac{d}{dt} g\left(t, C(t)\right)\right) \equiv 0 \, .$$

Vi har därmed visat att vilken som helst *envelopp till kurvskaran av lösningskurvor är en singulär lösning* i de punkter där $g''_{Ct}$ är olik noll.

## Clairauts differentialekvation

$$x = pt + \phi(p) \, , \quad \text{där} \quad p = x'$$

och $\phi \in \mathcal{C}^1$ är en godtycklig funktion, är ett klassiskt exempel på en typ av DE, som ofta har en singulär lösning.

**Exempel 1.16.** Vi härleder först en DE av Clairauts typ genom att lösa följande problem: *Vilken DE har tangenterna till kurvan $x = t^2$ som lösningskurvor?* Kurvskaran av tangenter ges av $x - t_0^2 = 2t_0(t - t_0)$, där $t_0$ är parametern. Nu är $x' = 2t_0$, varför vi genom elimination av $t_0$ får

$$x - \frac{x'^2}{4} = x'\left(t - \frac{x'}{2}\right)$$

och efter hyfsning

$$x = x't - \frac{x'^2}{4} \, .$$

(Varje kurva $x = g(t)$ som är sådan att $g'$ har en invers funktion ger på motsvarande sätt upphov till en DE av Clairauts typ).

*Lösning av Clairauts differentialekvation*: För en singulär lösning bör enligt föregående avsnitt gälla:

$$\begin{cases} x = pt + \phi(p) \\ 0 = t + \phi'(p) \, , \end{cases}$$

där den andra likheten erhållits genom derivering med avseende på $p$. Detta ger omedelbart en parameterframställning av den singulära lösningen:

$$\begin{cases} t = -\phi'(p) \\ x = -p\phi'(p) + \phi(p) \, . \end{cases}$$

Eftersom

$$x' = \frac{\frac{dx}{dp}}{\frac{dt}{dp}} = \frac{-\phi'(p) - p\phi''(p) + \phi'(p)}{-\phi''(p)} = p \, ,$$

är kurvan faktiskt en lösningskurva överallt där $\phi''(p) \neq 0$. De reguljära lösningarna får man fram på följande sätt: Derivering av $x = pt + \phi(p)$ ger, då man beaktar att $p = x'(t)$ är en funktion av $t$:

$$0 = p'(t) \cdot (\, t + \phi'(p) \,) \, .$$

Eftersom $t + \phi'(p) \neq 0$ för reguljära linjeelement är $p' = 0$ och därmed $x' = p = C$ (= konst.). Insättning i Clairauts DE ger en skara av räta linjer

$$x = Ct + \phi(C)$$

som lösningskurvor. Man kan lätt visa att denna kurvskara har den singulära lösningen som envelopp.

**Brännlinjen i en kaffekopp.** Då solen lyser snett mot en kaffekopp ser man på kaffeytan en ljus spetsig geometrisk figur. Denna figur är ljusast vid sin rand, den s.k. brännlinjen eller *kaustika*n. Solens strålar reflekteras av det blanka porslinet i koppen. De reflekterade strålarna tangerar kaustikan, som således är enveloppen till kurvskaran av reflekterade strålar (se fig. 6). Dylika brännlinjer (eller brännytor) uppstår ofta då ljusstrålar reflekteras mot buktiga ytor.

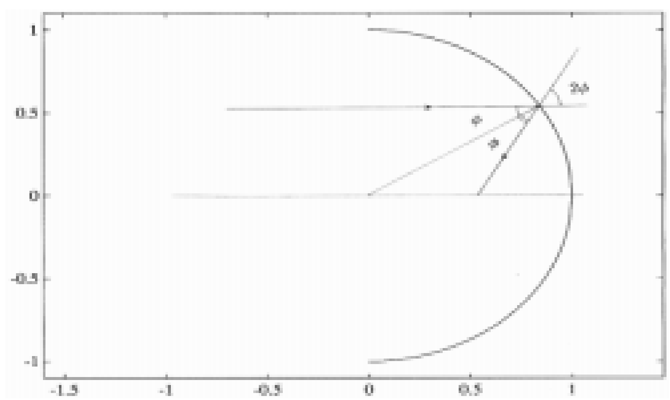


fig. 5

Vi föreställer oss att ljusstrålar kommer in från vänster parallellt med $x$-axeln och att de reflekteras mot den halva cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, vilken också kan skrivas i parameterform: $x = \cos\phi$, $y = \sin\phi$, där $|\phi| < \pi/2$. Vid reflektion gäller att infallsvinkeln är lika stor som reflektionsvinkeln (se fig. 5). Därför kommer de reflekterade strålarna att bestå av kurvskaran $y - \sin\phi = \tan 2\phi\,(x - \cos\phi)$, $|\phi| < \pi/2$, som även kan beskrivas med ekvationen

$$y\cos 2\phi - x\sin 2\phi + \sin\phi = 0 \tag{1}$$

(vi betraktar nu enbart strålar i ett plan vinkelrätt mot cylinderytan). Genom att derivera med avseende på parametern $\phi$ får vi ett ekvationssystem för enveloppen

$$\begin{cases} y\cos 2\phi - x\sin 2\phi = -\sin\phi \\ y\sin 2\phi + x\cos 2\phi = \frac{1}{2}\cos\phi\,, \end{cases}$$

vars matris representerar en vridning med vinkeln $2\phi$:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \frac{1}{2}\cos\phi \end{pmatrix}.$$

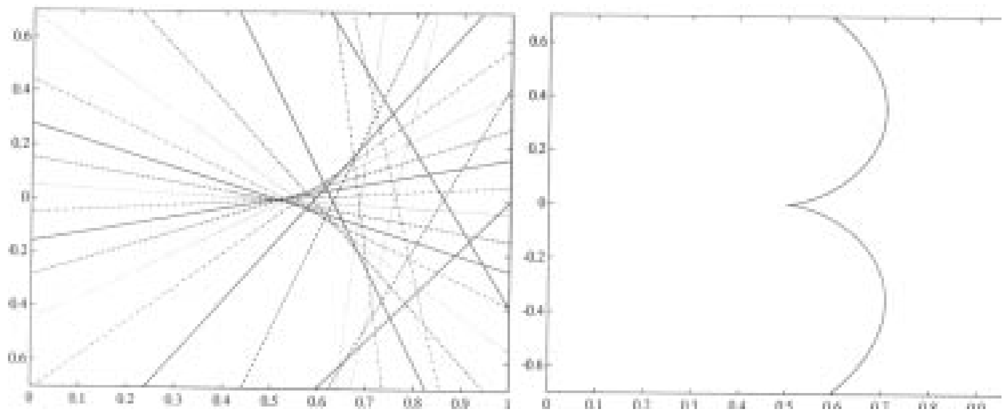

fig. 6

En vridning med vinkeln $2\phi$ åt motsatt håll resulterar i

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \frac{1}{2}\cos\phi \end{pmatrix},$$

ur vilket kaustikans ekvation (i parameterform) följer efter en stunds exercis med trigonometriska formler:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}(3\sin\phi - \sin 3\phi) = \sin^3\phi \\ x = \frac{1}{4}(3\cos\phi - \cos 3\phi)\,. \end{cases}$$

Derivering av (1) med avseende på $x$ ger $y' = \tan 2\phi$. Då vi med hjälp av denna likhet eliminerar $\phi$ ur (1) får vi fram en DE, som har både de reflekterade strålarna och kaustikan som lösningar: Vi utnyttjar formlerna $\sin u = \tan u/\sqrt{1+\tan^2 u}$, $\cos u = 1/\sqrt{1+\tan^2 u}$ och $\sin u = \sqrt{(1-\cos 2u)/2}\quad (u>0)$ och erhåller

$$y\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - x\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)},$$

vilket är en DE av Clairauts typ:

$$y = xp - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+p^2-\sqrt{1+p^2}}, \qquad p = y'\,.$$

**Historiska notiser**. Alexis Claude Clairaut (1713–1765) undersökte matematiskt månens rörelser i sitt verk *Théorie de la lune* (1753), i vilket han också använde metoder att få fram singulära lösningar till differentialekvationer. För övrigt kan nämnas att Clairaut åren 1736–37 deltog i P.L. Maupertuis expedition till Lappland för att experimentellt verifiera om jorden faktiskt är tillplattad vid polerna. Han lyckades även beräkna och förutspå Halleys komets återkomst år 1759 med en månads noggrannhet.

### Övningsuppgifter

1. Lös DE:n $2x' + x = 0$ (dvs. bestäm alla lösningar till den).
2. Lös DE:n $x' = \sqrt{x/t}$.
3. En drog upptas i blodströmmen så att för koncentrationen $x(t)$ vid tidpunkten $t$ gäller att $x'(t) = a - bx(t)$, där $a$ och $b$ är positiva konstanter. Lös begynnelsevärdesproblemet då $x(0) = 0$. Bestäm gränsvärdet för $x(t)$, då $t \to \infty$. Vid vilken tidpunkt är koncentrationen hälften av detta gränsvärde?
4. Enligt Stefans strålningslag förändras den absoluta temperaturen $T$ hos en kropp så att $T' = k(T^4 - T_m^4)$, där $T_m$ är den konstanta absoluta temperaturen hos det omgivande mediet. Lös DE:n.
5. Om luftmotståndet är proportionellt mot hastighetens kvadrat beskrivs vertikal nedåtriktad fallrörelse (hastigheten $v$ är $< 0$) av DE:n $mv' = kv^2 - mg$, där $m$, $k$ och $g$ är positiva konstanter. Lös denna.
6. En cylinderformig vattentank med vertikal symmetriaxel och med tvärsnittsarean $A$ har i sin botten ett hål med arean $A_0$. Den hastighet med vilken vattnet sprutar ut ur hålet är $v = \sqrt{2gh}$, där $h$ är vattendjupet i tanken. Om $V(t)$ är vattnets volym vid tiden $t$, så är därför $V'(t) = -A_0\sqrt{2gh}$ (friktion och dylikt ignoreras). Bestäm $h$ som funktion av $t$.
7. Bestäm alla lösningar till populationsmodellen $P' = aP + d$, som behandlades kortfattat i texten.
8. Bestäm alla lösningar till den logistiska DE:n $P' = P(a - bP)$, som behandlades kortfattat i texten.
9. En population, som normalt kan beskrivas med hjälp av den logistiska DE:n, är föremål för en konstant "skörd" $s$ ($s$ individer skördas per tidsenhet), varvid vi får modellen $P' = aP - bP^2 - s$, där $a$, $b$ är $s$ är positiva. Lös DE:n. Visa även att om en jämviktspunkt existerar (dvs. om polynomet i högra ledet har ett reellt nollställe) så kan DE:n återföras på den logistiska genom att man förskjuter $P$-axelns nollpunkt (dvs. genom en transformation av formen $P - P_0 = Q$).
10. En population, som normalt kan beskrivas med hjälp av den logistiska DE:n, är föremål för "skörd", så att $kP$ ($k > 0$) individer skördas per tidsenhet (jfr. med förgående uppgift). Uppställ en populationsmodell och diskutera denna.
11. Ett snöre med längden $s$ och med ena ändan i origo är utlagd längs den positiva $y$-axeln. I den övre ändan har vi fäst en liten vikt. Då den nedre ändan av snöret förs längs den positiva $x$-axeln, kommer vikten att släpa längs den s.k. släpkurvan, *traktrix*. Ställ upp en DE och lös denna för att få fram ekvationen för traktrix.
12. Lös DE:na
    (a) $x' = x + e^{2t}$;
    (b) $tx' + x = 1/(1 + t^2)$;
    (c) $x' - x\cos t = \sin 2t$.
13. Genom en godtycklig punkt $P$ på en kurva $C$ med tangent (i $xy$-planet) dras en rät linje parallell med $y$-axeln, och genom origo dras en rät linje parallell med kurvtangenten i $P$. Låt $Q$ vara den punkt där dessa linjer skär varann, och låt $M$ vara mittpunkten på sträckan $PQ$. Bestäm kurvan $C$ så att orten för $M$ (dvs.

mängden av alla $M$ då $P$ varierar) blir en given kurva $y = f(x)$, där $f(x)$ är en kontinuerlig funktion.

14. Lös DE:n $(1 + e^t)x' + e^t x = 0$.

15. Antag att $M$ är den totala mängden kunskap som du skall memorera. Låt $A(t)$ beteckna den kunskap som du hunnit inhämta vid tiden $t$. För en person med gott minne är $A'(t)$ proportionellt mot den kunskap som ännu inte memorerats. Men *du* är glömsk och glömmer per tidsenhet en viss procent av det du redan proppat in i huvudet. Därför är DE:n

$$\frac{dA(t)}{dt} = a(M - A(t)) - bA(t)$$

en modell för din memoreringsprocess. Bestäm $A(t)$ då vi antar att $A(0) = 0$.

16. Visa att DE:n $3t^2x + 2tx + (t^3 + t^2 + 2x)x' = 0$ är exakt och bestäm den lösning, som uppfyller begynnelsevillkoret $x(1) = 3$.

17. Lös DE:n med hjälp av en integrerande faktor av den angivna formen:
    (a) $(t + x) + t \ln t\, x' = 0, \quad \mu(t)$;
    (b) $6tx + (4x + 9t^2)x' = 0, \quad \mu(x)$.

18. Lös DE:n $x' = \sin(t + x)$. Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

19. Bestäm en integrerande faktor till DE:n i förgående uppgift (som löses enklare utan användning av integrerande faktor).

20. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$x' = \frac{x^2 - 2tx - t^2}{x^2 + 2tx - t^2} \qquad x(1) = -1\,.$$

21. Lös DE:n

$$x' = \frac{4t - x + 7}{2t + x - 1}$$

samt bestäm speciellt den lösning, som uppfyller begynnelsevillkoret $x(0) = 0$.

22. Lös följande DE:r av Bernoulli-, Riccati- resp. Clairaut-typ:
    (a) $x' + (1/t)x = tx^2$;
    (b) $x' = -2 - x + x^2$;
    (c) $x = tx' + 1 - \ln x'$.

23. I en full 100 liters behållare har man löst 1 kg salt. Man börjar pumpa in en lösning innehållande 5 g salt per liter med en hastighet av 10 liter per minut. Fullständigt blandad lösning rinner samtidigt ut med samma hastighet. Hur mycket salt finns i behållaren efter 20 minuter? Ledning: Om $Q(t)$ betecknar mängden salt i behållaren vid tiden $t$ så leder ovanstående problem till DE:n $Q'(t) = 50 - (Q(t)/100)10$ [g/min.].

24. Bestäm de ortogonala trajektorierna till kurvskaran $y = cx/(1 + x)$, $c \in \mathbf{R}$.

25. Visa att kurvskaran

$$\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c - 1} = 1, \quad c > 0,\ c \neq 1,$$

är ortogonal mot sig själv.

26. Bestäm enveloppen till kurvskaran $y = a^{-4}x(x^2 - a^2)$, $a > 0$. Bestäm en DE som har kurvorna i skaran som lösningskurvor.

27. Bestäm enveloppen till alla sträckor i den första kvadranten med längden $a$ och med den ena ändan på $x$-axeln och den andra på $y$-axeln.

28. En tank innehåller ursprungligen 400 l öl med en alkoholhalt på 3 %. Med takten 3 l/min. pumpas 6 %:igt öl in i tanken och samtidigt pumpas en fullständigt omrörd blandning ut med takten 4 l/min. Bestäm mängden alkohol $A(t)$ i tanken efter $t$ minuter. Hur många procent alkohol finns det i blandningen just innan tanken töms?

29. Lös DE:na
   (a) $tx^2x' = t^3 + x^3$;
   (b) $(3t + 2x - 5)x' = 2t + x$.

30. En roddare ror från en punkt $A$ på stranden av en flod till den rakt motsatta punkten $B$ på andra stranden, dit avståndet är $a$. Han ror ständigt rakt mot $B$ och med konstant hastighet relativt vattnet. Strömmens hastighet antas vara konstant. Ange den väg båten beskriver. Ange också villkoret för att båten skall kunna nå punkten $B$.

31. Visa att om $x(t)$ uppfyller DE:n $x' + 2tx = 1/t$, så gäller att $x(t) \to 0$, då $t \to +\infty$.

32. Lös integralekvationen
$$x(t) = t + \int_0^t \frac{2s\,x(s)}{1+s^2}\,ds\,.$$

33. Låt $h_N(t)$ vara den funktion som antar värdet $N$ för $|t-1| < 1/(2N)$ men värdet 0 för övriga argument. Bestäm den *generaliserade* lösningen till begynnelsevärdesproblemet $x' = x + h_N(t)$, $x(0) = 0$, dvs. den kontinuerliga funktion $x_N(t)$ som uppfyller begynnelsevillkoret samt satisfierar DE:n i de tre öppna intervall som uppstår då talen $1 \pm 1/(2N)$ avlägsnas från tallinjen. Bestäm $\lim_{N\to\infty} x_N(t)$.

34. En raketmotordysa med formen av en lång cylinder, vilken är öppen den ena ändan och sluten i den andra, förbränner raketbränsle i den slutna ändan. Förbränningsgasernas hastighet $v$, tryck $p$ och densitet $\varrho$ antas bero enbart av lägeskoordinaten $x$, som växer i riktning mot dysans öppning. Man kan visa att dessa storheter uppfyller
$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}\,.$$
Vidare gäller att $p = k\varrho^\kappa$ ($k > 0$, $\kappa > 1$), eftersom de heta gaserna kan anses expandera adiabatiskt. Dessutom gäller att $\varrho v = \alpha$, eftersom gaser varken uppstår eller försvinner på vägen ut ($k$, $\kappa$ och $\alpha$ är konstanter). Visa att utblåsningshastigheten vid dysans mynning är
$$w = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\left(\frac{p_0}{\varrho_0} - \frac{p}{\varrho}\right)}\,,$$
där $p_0$ och $\varrho_0$ är tryck och densitet vid dysans slutna ända medan $p$ och $\varrho$ är dessa storheters värden vid dysans mynning.

35. En raket, som inte påverkas av några yttre krafter, förbränner sitt bränsle så att raketens totala massa vid tiden $t$ är $m(t) = m_0 - kt$ $(k > 0)$. Om utblåsningshastigheten för förbränningsgaserna är $w$ (jfr. föregående uppgift), påverkas raketen av den konstanta framdrivande kraften $F = -w\frac{dm}{dt}$. Visa att den totala hastighetsökningen, då bränslet vid tiden $T$ tagit slut, är

$$\Delta v = w \ln \mu \,,$$

där $\mu = m(0)/m(T)$ (raketens *massförhållande*). En tvåstegsraket, hos vilken steg två har massförhållandet $\mu_2$ och steg ett – med steg två som last – har massförhållandet $\mu_1$, erhåller således den totala hastighetsökningen $\Delta v = w \ln \mu_1 + w \ln \mu_2 = w \ln(\mu_1 \mu_2)$, där produkten $\mu_1 \mu_2$ är det s.k. *effektiva massförhållandet*. Dra härav slutsatsen att en tvåstegsraket använder en given bränslemängd effektivare än en enstegsraket.

36. Solvinden, vilken består av protoner och elektroner som strömmar ut från solen med stor hastighet, kan förenklat beskrivas av DE:n

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr} - \frac{\gamma}{r^2}\,, \quad (\gamma > 0),$$

där den sista termen representerar summan av strålningstrycket (med riktning utåt) och gravitationen (med riktning inåt). Här betecknar $v$ solvindens hastighet utåt, $r$ avståndet till solens medelpunkt samt $p$ och $\varrho$ "solvindsgasens" tryck resp. densitet. Antag att expansionen är adiabatisk, så att $p = k\varrho^\kappa$ $(k > 0,\ \kappa > 1)$. Antag vidare att solvindspartiklar varken uppkommer eller försvinner på vägen ut, så att $\varrho v r^2 = \alpha$ (= konstant). Visa att en dramatisk hastighetsminskning, en *chockfront*, kan förekomma på ett visst avstånd $r_0$ från solen, där

$$\lim_{r\to r_0} \frac{dv}{dr} \quad \text{och} \quad \lim_{r\to r_0} \frac{dp}{dr}$$

är oändliga. Visa vidare att denna s.k. *slutchock* uppträder där solvinden övergår från överljuds- till underljudshastighet (ljudhastigheten är $\sqrt{\kappa p/\varrho}$). (I verkligheten torde slutchocken uppträda på ett avstånd mellan 70 och 115 jordbaneradier från solen, dvs. långt utanför Plutos bana.)