# Inledning

Likheten, eller rättare sagt identiteten, $x'(t) = x(t)$ utgör ett enkelt exempel på en differentialekvation. Funktionen $x(t)$ är obekant funktion om vilken vi (av någon anledning) råkar veta att identiteten $x'(t) \equiv x(t)$ gäller. Då man löser en polynomekvation, som t.ex. $x^2 + x - 1 = 0$, så bestämmer man alla värden på $x$ för vilka vänstra ledet i ekvationen har värdet noll. I en differentialekvation som den ovannämnda är det inte ett tal $x$ utan en funktion $x(t)$ som är obekant. Man kan säga att funktionsvärdena $x(t)$ utgör ett oändligt antal obekanta, som vi håller reda på med hjälp av ett tal $t$: mot varje värde på $t$ svarar ett obekant tal $x(t)$. Att lösa differentialekvationen är att bestämma alla funktioner $x(t)$ för vilka identiteten $x'(t) \equiv x(t)$ gäller.

Differentialekvationer kan indelas i två klasser, klassen av *ordinära differentialekvationer* (förkortat ODE) och klassen av *partiella differentialekvationer* (förkortat PDE).

En ordinär differentialekvation uttrycker ett samband mellan en obekant funktion $x(t)$ med *en* variabel $t$ och vissa av funktionens derivator. Exempel på ODE är

$$\begin{array}{lll} x' + tx = 2t & \text{eller helt utskrivet} & x'(t) + t\,x(t) = 2t \\ x'' + tx' = x & \text{eller helt utskrivet} & x''(t) + t\,x'(t) = x(t) \end{array}$$

En partiell differentialekvation uttrycker på samma sätt ett samband mellan en funktion av flera variabler och vissa av dess derivator. Ett exempel på en partiell differentialekvation är värmeledningsekvationen i två dimensioner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c\frac{\partial u}{\partial t}\,,$$

där den obekanta funktionen $u(x, y, t)$ har tre variabler $x$, $y$ och $t$.

I fortsättningen behandlar vi enbart ordinära differentialekvationer. För det långa ordet "differentialekvation" kommer vi att använda förkortningen DE.

DE:r används som modeller för skeenden i t.ex. fysiken (mekanikens rörelselagar, elektriska kretsar, radioaktivt sönderfall), kemin (lösningar, kemiska processer), biologin (populationers tillväxt och interaktion, epidemier) och ekonomin (företags tillväxt och avkastning). Vi betraktar ett par exempel:

**Exempel 0.1.** Vertikal fallrörelse under gravitationens inverkan i ett medium, där motståndet är proportionellt mot kvadraten på hastigheten. Om höjden vid tiden $t$ betecknas med $x(t)$, om kroppens massa är $m$ och hastighet $v < 0$, så påverkas den av kraften $kv^2 - mg$, där $k > 0$ och $g$ är tyngdkraftens acceleration. Enligt Newtons lag, som säger att kraften $F$ är likamed massan $m$ gånger accelerationen $x''(t)$, är:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = k\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 - mg\,.$$

Denna DE utgör nu en allmän beskrivning (modell) av varje fallrörelse hos kroppen för vilket utgångsläge och vilken utgångshastighet ($< 0$) som helst. Varje funktion som satisfierar DE:n beskriver en möjlig fallrörelse. Om vi stipulerar att höjden vid tiden $t = 0$ är 700 m och att utgångshastigheten vid samma tidpunkt är $-1$ m/s, så har vi fastslagit *begynnelsevillkoren*:

$$x(0) = 700, \quad x'(0) = -1.$$

DE:n tillsammans med begynnelsevillkoren utgör ett *begynnelsevärdesproblem*. Sådana begynnelsevärdesproblem har ofta (t.ex. i vårt fall) precis en lösning.

**Exempel 0.2.** Låt oss beskriva antalet individer i en population med hjälp av en funktion $P(t)$, som antar godtyckliga reella värden i stället för enbart heltalsvärden. Genom detta får vi möjlighet att beskriva förändringarna i populationen med hjälp av en differentialekvation i stället för en s.k. differensekvation, vilket innebär en betydande fördel. Låt vidare $N(t)$ beteckna antalet personer som föds under en tidsenhet dividerat med totala antalet individer, $M(t)$ antalet som dör per tidsenhet dividerat med totalantalet individer samt $I(t)$ antalet inflyttade per tidsenhet. Antag först att $I(t) \equiv 0$. Då har vi sambandet

$$\frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} = N(t) - M(t)$$

om $P(t) \neq 0$ och sambandet $P'(t) = (N(t) - M(t))P(t)$ om $P(t)$ tillåts vara noll. Då vi dessutom beaktar en immigration $I(t)$ som är olik noll erhåller vi DE:n

$$\frac{dP(t)}{dt} = (N(t) - M(t))\, P(t) + I(t)\,,$$

som en beskrivning av populationens utveckling i tiden $t$. Om funktionerna $N(t)$, $M(t)$ och $I(t)$ är kända och om begynnelsepopulationen vid tiden $t = 0$ är känd, t.ex. $P(0) = 300\,000$ (begynnelsevillkoret), så kan funktionen $P(t)$ bestämmas.

**Definition 0.1.** En DE av (högst) *ordningen* $n$ har den *allmänna formen*

$$F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = 0\,, \tag{1}$$

där $x(t)$ är den sökta funktionen. Om den derivata, som har den högsta ordningen, har lösts ut så att den är framställd som en funktion av $t$, $x(t)$, $x'(t)$,..., så är DE:n skriven i *normalform*:

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right)\,, \tag{2}$$

vilken vi också kan skriva kortare: $x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$.

En DE av formen

$$x^{(n)} + f_1(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(t)\, x' + f_n(t)\, x = g(t)$$

sägs vara *linjär*. Den är *homogen* om $g(t) \equiv 0$ och *inhomogen* i motsatt fall. Med en *icke-linjär* DE menas naturligtvis en DE som inte är linjär.

**Exempel 0.3.** DE:n $x''+2x'+3x = \sin t$ är en DE av 2:a ordningen med *konstanta* koefficienter.

För ett givet intervall $I$ betecknar vi med $\mathcal{C}(I)$ mängden av kontinuerliga funktioner $f : I \to \mathbf{R}$ definierade på $I$ och med värden i $\mathbf{R}$ (= mängden av reella tal). Låt $\mathcal{C}^n(I)$ beteckna mängden av av alla $f \in \mathcal{C}(I)$ sådana att alla derivator $f^{(k)}(x)$ av ordningarna $k = 1, \dots, n$ existerar och är kontinuerliga. Då inget bestämt intervall avses skriver vi $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^1, \dots, \mathcal{C}^n$. Dessa senare beteckningar använder vi också för funktioner av flera variabler. För en funktion $f(x, y)$ betyder således $f \in \mathcal{C}^2$ att $f$ är kontinuerlig och att dess partiella derivator $f'_x$, $f'_y$, $f''_{xx}$, $f''_{xy}$, $f''_{yx}$, $f''_{yy}$ existerar och är kontinuerliga.

**Definition 0.2.** En *lösning* till (1) i ett intervall $I$ är en funktion $x(t)$, definierad på $I$, sådan att

$$F\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) \equiv 0$$

i hela $I$. En funktion $x(t)$ är en lösning till (1) om den är en lösning till (1) i något intervall $I$. Två DE:r är *ekvivalenta* om de har samma lösningar.

**Exempel 0.4.** DE:na $(x'')^3 + (x')^2 + x = 0$ och $x'' = -\sqrt[3]{x + (x')^2}$ är ekvivalenta. Däremot är DE:na $(x'')^2 - t^2 = 0$ och $x'' = t$ inte ekvivalenta.

Märk, att om $x(t)$ är en lösning till (2) i $I$, så är (enligt definitionen) $x(\cdot) \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$. Om funktionen $f$ i (2) är kontinuerlig, så är $x(\cdot) \in \mathcal{C}^n(I)$.

Låt $I$ och $J$ vara intervall, sådana att $J \subseteq I$. Om $\phi : I \to \mathbf{R}$ och $\psi : J \to \mathbf{R}$ är funktioner definierade på $I$ respektive $J$ och om $\phi(t) = \psi(t)$ för varje $t \in J$, så säger vi att $\psi$ är *restriktionen* av $\phi$ till $J$ och betecknar detta med $\psi = \phi|_J$. Det är klart att om en funktion $\phi$ är en lösning till en DE i intervallet $I$, så är $\phi|_J$ en lösning till samma DE i intervallet $J$.

**Exempel 0.5.** Betrakta DE:n $x' = x$. Antag att $x(t)$ är en lösning i något intervall $I$. Då är $x'(t) \equiv x(t)$ i hela $I$. Multiplikation med $e^{-t}$ och derivering ger:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t}x(t)\right) = -e^{-t}x(t) + e^{-t}x'(t) \equiv 0$$

i $I$, varför $e^{-t}x(t) \equiv C =$ konst. Således är $x(t) = Ce^t$. På grund av att vi utgått från ett *antagande*, att $x(t)$ är en lösning, bör vi ännu verifiera att lösningar finns. Detta gör man enklast genom att kontrollera att funktionen $x(t) = Ce^t$ satisfierar DE:n: $x'(t) \equiv Ce^t \equiv x(t)$. Varje lösning till DE:n $x' = x$ är alltså en restriktion av $x(t, C) = Ce^t$ för något värde på $C$.

**Historiska notiser**. I förtäckt form har DE:r förekommit mycket länge i matematiken: I *geometrisk* form som inversa tangentproblem (vilken är kurvan då alla tangenter är givna?) samt i *kinematisk* form hos t.ex. Galileo Galilei (1564–1642), som i praktiken studerade ekvationen $x'(t) = at$, där $a$ är en konstant acceleration, eller hos John Napier (1550–1617), som vid konstruktionen av sin logaritm i själva verket studerade ekvationen $x'(t) = -x(t)$.

Som medvetet begrepp kom DE:r in i bilden först då differentialkalkylen skapades. Isaac Newton (1642–1727) uppfann åren 1665–6 (i Woolsthorpe som flykting undan pesten) "fluxionskalkylen" för att kunna lösa rörelseproblem i den mekanik, som han samtidigt började skapa. Newton använde sina resultat först 1687 i sitt omfattande och revolutionerande verk *Philosophiae naturalis principia matematica*, "Naturfilosofins matematiska principer". I detta verk löser Newton DE:r, men gör det geometriskt eller med hjälp av potensserier med obestämda koefficienter.

Oberoende av Newton skapade även Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) differentialkalkylen om än ca tio år senare än denne. Leibniz uppfann de geniala symboler för differentialer och integraler, som vi än i dag använder. Nu först blev DE:r bokstavligen ekvationer mellan differentialer. Leibniz publicerade sin differentialkalkyl år 1684 och sin integralkalkyl år 1686. Leibniz kalkyl blomstrade på kontinenten och kom att användas av mästare som bröderna Johann och Jacob Bernoulli och av Leonhard Euler medan Newtons fluxionskalkyl efter Newton inte skördade lika stora framgångar.

## Övningsuppgifter

1. Är följande DE:r ekvivalenta?
   (a) $x' = 1 + (x')^2$ och $x'x = x + x(x')^2$;
   (b) $x' + x^2 = 0$ och $x'' + 2xx' = 0$;
   (c) $x' + x = \sin t$ och $0x'' + x' + x = \sin t$.
2. Verifiera att funktionen $x(t) = t|t|$ är en lösning till DE:n $x' = 2\sqrt{|x|}$.
3. Verifiera att funktionen
$$x(t) = \begin{cases} -t^2, & \text{för } t < 0, \\ t^2, & \text{för } t \geq 0, \end{cases}$$
   är en lösning till DE:n $tx' - 2x = 0$.
4. Verifiera att funktionerna
$$x(t) = \frac{1 + Ce^{2t}}{1 - Ce^{2t}}, \quad C \in \mathbf{R},$$
   är lösningar till DE:n $x' = x^2 - 1$. Finn genom att se på ekvationen (= okulär besiktning) en partikulärlösning som inte finns med i denna familj av lösningar för något reellt $C$.
5. Bestäm $m$ så att
   a) $x(t) = e^{mt}$ är en lösning till DE:n $x'' - 5x' + 6x = 0$;
   b) $x(t) = t^m$ är en lösning till DE:n $t^2x'' + 6tx' + 4x = 0$.
6. Bestäm alla lösningar till $x''(t) - \cos t = 3$ samt lös begynnelsevärdesproblemet för denna DE:n då begynnelsevillkoren är $x(0) = 1 = x'(0)$.