

Ordinära differentialekvationer

Sten Bjon

ÅBO 2009

Innehållsförteckning

Inledning	1
Analytisk lösning av differentialekvationer av 1:a ordningen	5
Separerbara variabler	5
Linjära ekvationer	8
Exakta differentialekvationer	10
Variabeltransformationer	14
Geometrisk aspekter på differentialekvationer	17
Clairauts differentialekvation	21
Differentialekvationer av 2:a ordningen	28
Linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter	32
Homogena ekvationer	33
Inhomogena ekvationer	36
Harmoniska oscillatorn	40
Eulers ekvation	44
Allmänna existens- och entydighetssatser	47
Lipschitzvillkor	47
Existens och entydighet	49
Ekvationer av högre ordning	53
System av linjära differentialekvationer	56
Existens och entydighet	56
Homogena system	57
Inhomogena system	59
Tillämpning på linjära ekvationer	61
Linjära differentialekvationer av 2:a ordningen	64
Homogena ekvationer	64
Sturms separations- och jämförelsesats	67
Den inhomogena ekvationen	69
Elementärt om lösningar	70
System av linjära differetialekvationer med konstanta koefficienter	73
Homogena system	73
Exponentialfunktionen e^{tA}	75
Beräkning av e^{tA}	79
Inhomogena system	82
System av andra ordningen	84
Variabla koefficienter	86
Fasporträtt i två dimensioner	87
Laplacetransformationen	95
Laplacetransformer av elementära funktioner	98
Speciella regler	100
System av ekvationer	102

Inledning

Likheten, eller rättare sagt identiteten, $x'(t) = x(t)$ utgör ett enkelt exempel på en differentialekvation. Funktionen $x(t)$ är obekant funktion om vilken vi (av någon anledning) råkar veta att identiteten $x'(t) \equiv x(t)$ gäller. Då man löser en polynomekvation, som t.ex. $x^2 + x - 1 = 0$, så bestämmer man alla värden på x för vilka vänstra ledet i ekvationen har värdet noll. I en differentialekvation som den ovannämnda är det inte ett tal x utan en funktion $x(t)$ som är obekant. Man kan säga att funktionsvärdena $x(t)$ utgör ett oändligt antal obekanta, som vi håller reda på med hjälp av ett tal t : mot varje värde på t svarar ett obekant tal $x(t)$. Att lösa differentialekvationen är att bestämma alla funktioner $x(t)$ för vilka identiteten $x'(t) \equiv x(t)$ gäller.

Differentialekvationer kan indelas i två klasser, klassen av *ordinära differentialekvationer* (förkortat ODE) och klassen av *partiella differentialekvationer* (förkortat PDE).

En ordinär differentialekvation uttrycker ett samband mellan en obekant funktion $x(t)$ med en variabel t och vissa av funktionens derivator. Exempel på ODE är

$$\begin{array}{ll} x' + tx = 2t & \text{eller helt utskrivet} \quad x'(t) + t x(t) = 2t \\ x'' + tx' = x & \text{eller helt utskrivet} \quad x''(t) + t x'(t) = x(t) \end{array}$$

En partiell differentialekvation uttrycker på samma sätt ett samband mellan en funktion av flera variabler och vissa av dess derivator. Ett exempel på en partiell differentialekvation är värmeledningsekvationen i två dimensioner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c \frac{\partial u}{\partial t},$$

där den obekanta funktionen $u(x, y, t)$ har tre variabler x , y och t .

I fortsättningen behandlar vi enbart ordinära differentialekvationer. För det långa ordet "differentialekvation" kommer vi att använda förkortningen DE.

DE:er används som modeller för skeenden i t.ex. fysiken (mekanikens rörelselagar, elektriska kretsar, radioaktivt sönderfall), kemin (lösningar, kemiska processer), biologin (populationers tillväxt och interaktion, epidemier) och ekonomin (företags tillväxt och avkastning). Vi betraktar ett par exempel:

Exempel 0.1. Vertikal fallrörelse under gravitationens inverkan i ett medium, där motståndet är proportionellt mot kvadraten på hastigheten. Om höjden vid tiden t betecknas med $x(t)$, om kroppens massa är m och hastighet $v < 0$, så påverkas den av kraften $kv^2 - mg$, där $k > 0$ och g är tyngdkraftens acceleration. Enligt Newtons lag, som säger att kraften F är likamed massan m gånger accelerationen $x''(t)$, är:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = k \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - mg.$$

Denna DE utgör nu en allmän beskrivning (modell) av varje fallrörelse hos kroppen för vilket utgångsläge och vilken utgångshastighet (< 0) som helst. Varje funktion som satisfierar DE:n beskriver en möjlig fallrörelse. Om vi stipulerar att höjden vid tiden $t = 0$ är 700 m och att utgångshastigheten vid samma tidpunkt är -1 m/s, så har vi fastslagit *begynnelsevillkoren*:

$$x(0) = 700, \quad x'(0) = -1.$$

DE:n tillsammans med begynnelsevillkoren utgör ett *begynnelsevärdesproblem*. Sådana begynnelsevärdesproblem har ofta (t.ex. i vårt fall) precis en lösning.

Exempel 0.2. Låt oss beskriva antalet individer i en population med hjälp av en funktion $P(t)$, som antar godtyckliga reella värden i stället för enbart heltalsvärden. Genom detta får vi möjlighet att beskriva förändringarna i populationen med hjälp av en differentialekvation i stället för en s.k. differensekvation, vilket innebär en betydande fördel. Låt vidare $N(t)$ beteckna antalet personer som föds under en tidsenhet dividerat med totala antalet individer, $M(t)$ antalet som dör per tidsenhet dividerat med totalantalet individer samt $I(t)$ antalet inflyttade per tidsenhet. Antag först att $I(t) \equiv 0$. Då har vi sambandet

$$\frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} = N(t) - M(t)$$

om $P(t) \neq 0$ och sambandet $P'(t) = (N(t) - M(t))P(t)$ om $P(t)$ tillåts vara noll. Då vi dessutom beaktar en immigration $I(t)$ som är olik noll erhåller vi DE:n

$$\frac{dP(t)}{dt} = (N(t) - M(t))P(t) + I(t),$$

som en beskrivning av populationens utveckling i tiden t . Om funktionerna $N(t)$, $M(t)$ och $I(t)$ är kända och om begynnelsepopulationen vid tiden $t = 0$ är känd, t.ex. $P(0) = 300\,000$ (begynnelsevillkoret), så kan funktionen $P(t)$ bestämmas.

Definition 0.1. En DE av (högst) *ordningen* n har den *allmänna formen*

$$(1) \quad F\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) = 0,$$

där $x(t)$ är den sökta funktionen. Om den derivata, som har den högsta ordningen, har lösts ut så att den är framställd som en funktion av t , $x(t)$, $x'(t)$, $\dots$, så är DE:n skriven i *normalform*:

$$(2) \quad x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\right),$$

vilken vi också kan skriva kortare: $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$.

En DE av formen

$$x^{(n)} + f_1(t) x^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(t) x' + f_n(t) x = g(t)$$

sågs vara *linjär*. Den är *homogen* om $g(t) \equiv 0$ och *inhomogen* i motsatt fall. Med en *icke-linjär* DE menas naturligtvis en DE som inte är linjär.

Exempel 0.3. DE:n $x'' + 2x' + 3x = \sin t$ är en DE av 2:a ordningen med *konstanta* koefficienter.

För ett givet intervall I betecknar vi med $\mathcal{C}(I)$ mängden av kontinuerliga funktioner $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ definierade på I och med värden i $\mathbf{R}$ (= mängden av reella tal). Låt $\mathcal{C}^n(I)$ beteckna mängden av alla $f \in \mathcal{C}(I)$ sådana att alla derivator $f^{(k)}(x)$ av ordningarna $k = 1, \dots, n$ existerar och är kontinuerliga. Då inget bestämt intervall avses skriver vi $\mathcal{C}, \mathcal{C}^1, \dots, \mathcal{C}^n$. Dessa senare beteckningar använder vi också för funktioner av flera variabler. För en funktion $f(x, y)$ betyder således $f \in \mathcal{C}^2$ att f är kontinuerlig och att dess partiella derivator $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ existerar och är kontinuerliga.

Definition 0.2. En *lösning* till (1) i ett intervall I är en funktion $x(t)$, definierad på I , sådan att

$$F\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) \equiv 0$$

i hela I . En funktion $x(t)$ är en lösning till (1) om den är en lösning till (1) i något intervall I . Två DE:r är *ekvivalenta* om de har samma lösningar.

Exempel 0.4. DE:na $(x'')^3 + (x')^2 + x = 0$ och $x'' = -\sqrt[3]{x + (x')^2}$ är ekvivalenta. Däremot är DE:na $(x'')^2 - t^2 = 0$ och $x'' = t$ inte ekvivalenta.

Märk, att om $x(t)$ är en lösning till (2) i I , så är (enligt definitionen) $x(\cdot) \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$. Om funktionen f i (2) är kontinuerlig, så är $x(\cdot) \in \mathcal{C}^n(I)$.

Låt I och J vara intervall, sådana att $J \subseteq I$. Om $\phi : I \rightarrow \mathbf{R}$ och $\psi : J \rightarrow \mathbf{R}$ är funktioner definierade på I respektive J och om $\phi(t) = \psi(t)$ för varje $t \in J$, så säger vi att ψ är *restriktionen* av ϕ till J och betecknar detta med $\psi = \phi|_J$. Det är klart att om en funktion ϕ är en lösning till en DE i intervallet I , så är $\phi|_J$ en lösning till samma DE i intervallet J .

Exempel 0.5. Betrakta DE:n $x' = x$. Antag att $x(t)$ är en lösning i något intervall I . Då är $x'(t) \equiv x(t)$ i hela I . Multiplikation med e^{-t} och derivering ger:

$$\frac{d}{dt}(e^{-t}x(t)) = -e^{-t}x(t) + e^{-t}x'(t) \equiv 0$$

i I , varför $e^{-t}x(t) \equiv C = \text{konst.}$ Således är $x(t) = Ce^t$. På grund av att vi utgått från ett *antagande*, att $x(t)$ är en lösning, bör vi ännu verifiera att lösningar finns. Detta gör man enklast genom att kontrollera att funktionen $x(t) = Ce^t$ satisfierar DE:n: $x'(t) \equiv Ce^t \equiv x(t)$. Varje lösning till DE:n $x' = x$ är alltså en restriktion av $x(t, C) = Ce^t$ för något värde på C .

Historiska notiser. I förtäckt form har DE:r förekommit mycket länge i matematiken: I *geometrisk* form som inversa tangentproblem (vilken är kurvan då alla tangenter är givna?) samt i *kinematisk* form hos t.ex. Galileo Galilei (1564–1642), som i praktiken studerade ekvationen $x'(t) = at$, där a är en konstant acceleration, eller hos John Napier (1550–1617), som vid konstruktionen av sin logaritm i själva verket studerade ekvationen $x'(t) = -x(t)$.

Som medvetet begrepp kom DE:r in i bilden först då differentialkalkylen skapades. Isaac Newton (1642–1727) uppfann åren 1665–6 (i Woolsthorpe som flykting undan pesten) "fluxionskalkylen" för att kunna lösa rörelseproblem i den mekanik, som han samtidigt började skapa. Newton använde sina resultat först 1687 i sitt omfattande och revolutionerande verk *Philosophiae naturalis principia mathematica*, "Naturfilosofins matematiska principer". I detta verk löser Newton DE:r, men gör det geometriskt eller med hjälp av potensserier med obestämda koefficienter.

Oberoende av Newton skapade även Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) differentialkalkylen om än ca tio år senare än denne. Leibniz uppfann de geniala symboler för differentialer och integraler, som vi än i dag använder. Nu först blev DE:r bokstavligen ekvationer mellan differentialer. Leibniz publicerade sin differentialkalkyl år 1684 och sin integralkalkyl år 1686. Leibniz kalkyl blomstrade på kontinenten och kom att användas av mästare som bröderna Johann och Jacob Bernoulli och av Leonhard Euler medan Newtons fluxionskalkyl efter Newton inte skördade lika stora framgångar.

Övningsuppgifter

1. Är följande DE:r ekvivalenta?

(a) $x' = 1 + (x')^2$ och $x'x = x + x(x')^2$;

(b) $x' + x^2 = 0$ och $x'' + 2xx' = 0$;

(c) $x' + x = \sin t$ och $0x'' + x' + x = \sin t$.

2. Verifiera att funktionen $x(t) = t|t|$ är en lösning till DE:n $x' = 2\sqrt{|x|}$.

3. Verifiera att funktionen

$$x(t) = \begin{cases} -t^2, & \text{för } t < 0, \\ t^2, & \text{för } t \geq 0, \end{cases}$$

är en lösning till DE:n $tx' - 2x = 0$.

4. Verifiera att funktionerna

$$x(t) = \frac{1 + Ce^{2t}}{1 - Ce^{2t}}, \quad C \in \mathbf{R},$$

är lösningar till DE:n $x' = x^2 - 1$. Finn genom att se på ekvationen (= okulär besiktning) en partikulärlösning som inte finns med i denna familj av lösningar för något reellt C .

5. Bestäm m så att

a) $x(t) = e^{mt}$ är en lösning till DE:n $x'' - 5x' + 6x = 0$;

b) $x(t) = t^m$ är en lösning till DE:n $t^2x'' + 6tx' + 4x = 0$.

6. Bestäm alla lösningar till $x''(t) - \cos t = 3$ samt lös begynnelsevärdesproblemet för denna DE:n då begynnelsevillkoren är $x(0) = 1 = x'(0)$.

Analytisk lösning av differentialekvationer av 1:a ordningen

Vissa DE:er av 1:a ordningen kan lösas med speciella metoder. Vi skall se närmare på några av dessa.

Separerbara variabler

Definition 1.1. En DE har *separerbara variabler* om den kan fås på formen

$$(1) \quad x'(t) g(x) = f(t),$$

där f och g är kontinuerliga funktioner, definierade på intervall I resp. J .

Antag, att $x(t)$ är en lösning till (1) i något intervall I' med $I' \subseteq I$. Då är

$$x'(t) g(x(t)) \equiv f(t)$$

för varje $t \in I'$. Låt F och G vara primitiva funktioner till f och g . Eftersom $\frac{d}{dt}G(x(t)) = g(x(t)) x'(t)$, så gäller nu

$$(2) \quad G(x(t)) \equiv F(t) + C$$

för en lämplig reell konstant C . Då $G(x)$ är deriverbar med derivatan $g(x)$, så har G en deriverbar invers funktion i en omgivning av ett givet x_0 om $g(x_0) \neq 0$. Lokalt i en omgivning av en punkt x_0 med $g(x_0) \neq 0$ kan lösningen alltså skrivas ut explicit:

$$(3) \quad x(t) = G^{-1}(F(t) + C).$$

Omvänt är det lätt att se, att om funktionerna F och G definieras som ovan, om G^{-1} är deriverbar i ett visst intervall och om sammansättningen i ekvation (3) är definierad i detta intervall, så ger (3) en lösning till (1). Vi har nämligen då att

$$G'(x(t)) x'(t) \equiv F'(t),$$

varur (1) följer.

Sats 1.1. Ekvation (2) ger alla lösningar till (1) i implicit form, lokalt i en omgivning kring varje punkt (t_0, x_0) , där $g(x_0) \neq 0$.

Exempel 1.1. Betrakta DE:n $x' = tx^2$. Insättning visar direkt att funktionen $x(t) \equiv 0$ är en lösning. Antag att $x(\cdot)$ är en lösning sådan att $x(t_0) \neq 0$ i någon punkt t_0 . Då är $x(t) \neq 0$ för varje t i något intervall I , som innehåller t_0 , och där är

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)^2} dt \equiv \int t dt + \frac{1}{2}C.$$

dvs. $x = -2/(t^2 + C)$ är en lösning i I . Andra lösningar finns inte. Om $C < 0$ så representerar uttrycket $-2/(t^2 + C)$ egentligen *tre* lösningar: en i intervallet $] -\infty, -\sqrt{-C}[$, en i $] -\sqrt{-C}, \sqrt{-C}[$ och en i $] \sqrt{-C}, \infty[$. På motsvarande sätt representerar uttrycket två lösningar om $C = 0$: en på den positiva halvaxeln och en på den negativa. Om $C > 0$ ger uttrycket en enda lösning (se fig. 1)

Definition 1.2. En mängd S av lösningar till en DE sägs utgöra en *fullständig lösning* om varje lösning är en restriktion av någon lösning som finns i S . Med den *allmänna lösningen* avses en lösning som beror av ett antal parametrar (som t.ex. $x(t, C_1, C_2, C_3)$) och som ger en fullständig lösning då parametrarna varierar. En enskild lösning till en DE:n kallas *partikulärlösning* (en fullständig lösning är alltså en mängd av partikulärlösningar).

I exempel 1.1 ovan kan vi som en fullständig lösning till DE:n $x' = tx^2$ ta mängden av alla funktioner definierade av uttrycket $x(t) = -2/(t^2 + C)$, vilket för varje $C < 0$ i själva verket representerar tre funktioner med olika definitionsmängder, för $C = 0$ två funktioner samt för varje $C > 0$ en enda funktion. I exempel 0.5 är $x(t) = Ce^t$, $C \in \mathbf{R}$, den allmänna lösningen till DE:n $x' = x$.

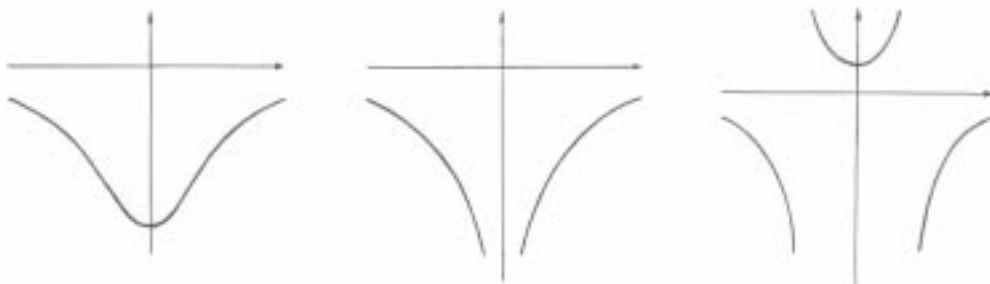


fig. 1

Enkla populationsmodeller. I exempel 2 i inledningen ställde vi upp DE:n $P' = (N - M)P + I$ som en modell för tidsutvecklingen hos en population P , då nativiteten är N , mortaliteten är M och immigrationen är I . Om vi antar att $I \equiv 0$ och $N - M \equiv a$, där a är en konstant, så erhåller vi DE:n

$$\frac{dP}{dt} = aP$$

(jfr. med exempel 0.5 i inledningen). Först kan vi konstatera att funktionen $P(t) \equiv 0$ är en lösning till denna DE:n. Antag att $P(t)$ är en godtycklig lösning, som är olik noll, i något intervall J . Genom separation av variablerna fås att

$$\int \frac{dP(t)}{P(t)} = \int a dt$$

och vidare att $\ln |P(t)| = at + \ln C_1$, där C_1 är en godtycklig positiv konstant (då C_1 genomlöper alla positiva tal, kommer $\ln C_1$ att genomlöpa alla reella tal). I intervallet J

måste således $P(t)$ ha formen $P(t) = \pm C_1 e^{at}$. Varje lösning i J är alltså en restriktion av en funktion av formen $P(t) = Ce^{at}$, där C är ett godtyckligt reellt tal. Att funktioner av denna form faktiskt är lösningar i hela $\mathbf{R}$, visas genom insättning i DE:n:

$$P'(t) = aCe^{at} = aP(t).$$

Om populationens storlek vid tiden noll kallas P_0 , så är $C = P_0$, dvs.

$$P(t) = P_0 e^{at}.$$

Detta är *Malthus lag*, uppkallad efter den brittiske nationalekonomen Thomas Malthus (1766-1834). Vi kan konstatera att enligt denna populationsmodell är den tomma populationen $P(t) \equiv 0$ den enda som är i jämvikt ($P = 0$ är en *jämviktspunkt*). Denna jämvikt sägs vara *instabil* eftersom minsta lilla ändring av utgångspopulationen (till minst två individer) leder till en population "långt från" den tomma populationen.

Om vi fortsättningsvis antar att $M - N \equiv a$ men att immigrationen I har ett konstant värde d (som kan vara olika noll), så erhåller vi DE:n

$$P' = aP + d.$$

Nu är tydligen $P(t) = -d/a$ en lösning ($P = -d/a$ är en *jämviktspunkt*). Om vi antar att i något intervall J gäller att $P(t)$ är en lösning med $P(t) \neq -d/a$ för $t \in J$, så finner vi genom separation av variablerna att $|aP(t) + d| = C_1 e^{at}$, varför $P(t)$ måste ha formen $P(t) = Ce^{at} - d/a$ (se övningsuppgift 7). Omvänt finner man genom direkt insättning att alla funktioner av denna form är lösningar på hela reella axeln. Om populationens storlek vid tiden noll kallas P_0 , är $C = P_0 + d/a$ och

$$P(t) = \left(P_0 + \frac{d}{a}\right) e^{at} - \frac{d}{a}.$$

Den *logistiska lagen* introducerades av den belgiske matematikern Pierre F. Verhulst 1838. Antag att den relativa tillväxttakten är

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = a - bP,$$

så att den för små populationen är ungefär a , som i Malthus lag, men så att den avtar mot noll då P närmar sig värdet a/b (t.ex. beroende på brist på föda). Vi har då DE:n

$$P' = P(a - bP),$$

den *logistiska differentialekvationen*. Först noterar vi att $P(t) \equiv 0$ och $P(t) \equiv a/b$ är lösningar (dessa populationer är i jämvikt). Om vi nu antar att $P(t)$ är en godtycklig lösning i något intervall J med $P(t) \neq 0$ och $P(t) \neq a/b$ i J , så kan variablerna separeras (se övningsuppgift 8). Man finner att

$$\frac{P}{a - bP} = Ce^{at},$$

där $C \neq 0$. Om P_0 betecknar populationens storlek vid tiden noll, så är

$$\frac{P_0}{a - bP_0} = C$$

och vi kommer till att

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}.$$

Insättning i DE:n visar att detta faktiskt är en lösning. Av uttrycket framgår att jämviktpunkten $P = a/b$ är *stabil* i den meningen att en positiv population mindre än a/b asymptotiskt växer mot jämviktsvärdet a/b medan en population större än jämviktsvärdet asymptotiskt avtar mot jämviktsvärdet. Jämviktpunkten $P = 0$ är liksom i Malthus modell instabil.

Linjära ekvationer

En linjär differentialekvation av första ordningen har den allmänna formen

$$(4) \quad x' = f(t)x + g(t),$$

där f och g antas vara kontinuerliga funktioner. Om $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är två lösningar till (4), så är

$$\frac{d}{dt}[x_1(t) - x_2(t)] = f(t)[x_1(t) - x_2(t)]$$

dvs. $\bar{x}(t) = x_1(t) - x_2(t)$ är en lösning till den *homogena linjära differentialekvationen*

$$(5) \quad x' = f(t)x.$$

Sats 1.2. *Funktionerna*

$$x_0(t, C) = Ce^{\int f(t) dt} \quad (C \in \mathbf{R})$$

utgör den allmänna lösningen till (5) och om $x_1(t)$ är en partikulärlösning till (4), så är $x_1(t) + x_0(t, C)$ den allmänna lösningen till (4).

Är nämligen $x(t)$ en godtycklig lösning till (4) så är som vi sett $x(t) - x_1(t)$ en lösning till (5), dvs. det finns ett tal C sådant att $x(t) - x_1(t) = x_0(t, C)$.

Vi bestämmer först alla lösningar till (5). Det är uppenbart att funktionen $x(t) \equiv 0$ är en lösning. På grund av detta kan vi rikta in oss på att bestämma sådana lösningar $x(t)$, som går genom en given punkt (t, x) med $x \neq 0$. För en sådan fås (åtminstone i en omgivning av (t, x)), eftersom variablerna kan separeras,

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int f(t) dt + \ln C_1 \quad (C_1 = \text{konst.}, C_1 > 0).$$

Alltså är

$$|x(t)| = C_1 e^{\int f(t) dt}, \quad \text{dvs.} \quad x(t) = C e^{\int f(t) dt}.$$

(Värdet på konstanten C kan bestämmas då vi vet att lösningen skall gå genom (t, x) men just nu är vi inte intresserade av detta.) Omvänt är en funktion av ovannämnda form alltid en lösning till (5), eftersom kedjeregeln ger att

$$x'(t) = C \exp\left(\int f(t) dt\right) f(t) = x(t) f(t).$$

Om $C \neq 0$ så är $x(t) \neq 0$ för varje t . Vi har alltså för varje $C \neq 0$ en *global* lösning, inte bara en lösning i en omgivning av (t, x) . För $C = 0$ återfår vi den globala lösningen $x(t) \equiv 0$. Vi har därmed bevisat att den allmänna lösningen till den homogena DE:n (5) ges av funktionsskaran

$$x(t) = C e^{\int f(t) dt} \quad (C \in \mathbf{R}).$$

Konstantens variation, är en metod att få fram en partikulärlösning till den inhomogena DE:n (4) genom att göra en ansats av formen

$$x(t) = C(t) e^{\int f(t) dt},$$

där konstanten C i lösningen till den homogena ekvationen har ersatts med en funktion $C(t)$. Eftersom $x'(t) = C'(t) \exp(\int f(t) dt) + C(t) \exp(\int f(t) dt) f(t) = f(t)x(t) + C'(t) \exp(\int f(t) dt)$, är $x(t)$ en lösning till (4) om och endast om $C'(t) \exp(\int f(t) dt) \equiv g(t)$. Således är

$$\begin{aligned} C(t) &= \int g(t) e^{-\int f(t) dt} dt \\ &= \int^t g(s) e^{-\int^s f(u) du} ds \end{aligned}$$

plus en godtycklig konstant, som vi emellertid nu kan ge värdet noll, eftersom vi bara behöver få fram *en* partikulärlösning. Funktionen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\int^t f(u) du} \int^t g(s) e^{-\int^s f(u) du} ds \\ &= \int^t g(s) e^{\int_s^t f(u) du} ds \end{aligned}$$

är alltså en partikulärlösning till (4). Enligt Sats 1.2 är

$$x(t) = C \exp\left(\int^t f(s) ds\right) + \int^t g(s) e^{\int_s^t f(u) du} ds$$

den allmänna lösningen till DE:n (4).

Exempel 1.2. Vi söker en lösning $x(t)$ till $x' = tx + \sin t$, för vilken $x(0) = 1$. Den homogena ekvationen $x' = tx$ integreras genom separation av variablerna:

$$\int \frac{dx}{x} = \int t dt \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \frac{1}{2}t^2 + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad x = C e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

För att få fram en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen gör vi ansatsen $x(t) = C(t) \exp(\frac{1}{2}t^2)$. Eftersom

$$x'(t) = C(t)e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot t + C'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} = tx(t) + C'(t)e^{\frac{1}{2}t^2},$$

bör $C(t)$ uppfylla $C'(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \sin t$. Vi kan därför välja

$$C(t) = \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}} \sin s \, ds.$$

Alltså är funktionen

$$x_1(t) = \int_0^t e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \sin s \, ds,$$

en partikulärlösning, varför den allmänna lösningen har formen

$$x(t) = Ce^{\frac{1}{2}t^2} + \int_0^t e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \sin s \, ds.$$

Genom att utnyttja begynnelsevillkoret $x(0) = 1$ finner vi att $C = 1$.

Exakta differentialekvationer

Antag att funktionen $u(t, x)$ tillhör klassen $\mathcal{C}^1$. Om $u'_x(t_0, x_0) \neq 0$ och $u(t_0, x_0) = C$, där C är en konstant, så definierar (enligt satsen om implicit definierade funktioner; se kursen "Flerdimensionell analys") ekvationen $u(t, x) = C$ en funktion $x(t)$ i $\mathcal{C}^1$, åtminstone i en liten omgivning av (t_0, x_0) . Då är $u(t, x(t)) \equiv C$ för alla t i en omgivning av t_0 . Derivering ger att

$$0 \equiv \frac{d}{dt}u(t, x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}x'(t) = P(t, x(t)) + Q(t, x(t))x'(t),$$

där vi har satt

$$(6) \quad P(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{och} \quad Q(t, x) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Funktionen $x(t)$ satisfierar alltså differentialekvationen

$$(7) \quad P(t, x) + Q(t, x)x' = 0.$$

Definition 1.3. En DE av formen (7) är *exakt* om det finns en funktion $u(t, x)$ i klassen $\mathcal{C}^1$ sådan att (6) gäller.

Sats 1.3. I en rektangel $V =]a, b[\times]u, v[$, där $Q(t, x) \neq 0$, fås alla lösningar till den exakta DE:n (7) genom att man ur ekvationen $u(t, x) = C$, där C är en godtycklig konstant, löser ut variabeln x som en funktion av t .

Bevis. Om (7) är exakt, så kan denna DE skrivas $\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = 0$, varvid $u(t, x(t)) = C = \text{konst.}$

På grund av Sats 1.3 inställer sig följande frågor:

- 1) Hur vet man om en DE av formen (7) är exakt eller inte?
- 2) Om den är exakt, hur får man då fram funktionen $u(t, x)$?

Svaret på den första frågan ges av följande sats, som också bevisas i kursen Flerdimensionell analys, medan svaret på den andra frågan ges av satsens bevis.

Sats 1.4. *Antag att funktionerna $P(t, x)$ och $Q(t, x)$ tillhör C^1 i en axelriktad rektangel V i tx -planet. Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att det skall existera en funktion $u(t, x)$ i C^1 , sådan att*

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = P(t, x) \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = Q(t, x)$$

är att

$$(9) \quad \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) \equiv \frac{\partial P}{\partial x}(t, x)$$

i rektangeln V .

Bevis. Nödvändigheten: Antag att en sådan funktion $u(t, x)$ existerar att (8) gäller. Då u ju är i C^2 , så är de blandade derivatorna av andra ordningen lika, varför

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Tillräckligheten: Vi antar nu att (9) gäller i V och skall konstruera en funktion $u(t, x)$ så att (8) gäller. Varje lösning u i C^1 till den partiella differentialekvationen $\partial u / \partial t = P(t, x)$ måste vara av formen

$$u(t, x) = \int P(t, x) dt + C(x),$$

där vi för varje x har en "integrationskonstant" $C(x)$, dvs. en funktion av x . Vi söker en funktion $C(x)$ sådan att för funktionen $u(t, x)$ dessutom gäller att $Q(t, x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int P(t, x) dt + C'(x)$, dvs. sådan att

$$C'(x) = Q(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int P(t, x) dt.$$

Högra ledet i denna likhet är oberoende av t , ty

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(Q(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int P(t, x) dt \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int P(t, x) dt = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x} \equiv 0.$$

Genom att integrera får vi funktionen $C(x)$ bestämd och därmed har vi också fått fram en funktion $u(t, x)$ för vilken (8) gäller. $\diamond$

Anmärkning 1. Varje DE $f(x) - g(y) y' = 0$ med separerbara variabler är exakt, ty $\frac{\partial}{\partial x}(-g(y)) \equiv 0 \equiv \frac{\partial}{\partial y}f(x)$.

Exempel 1.3. DE:n $(x - t^2) + (t + x^2)x' = 0$ är exakt, eftersom

$$\frac{\partial}{\partial x}(x - t^2) \equiv 1 \equiv \frac{\partial}{\partial t}(t + x^2).$$

Vi bestämmer en funktion $u(t, x)$ genom att integrera ekvationen $\partial u / \partial t = x - t^2$ och får:

$$u(t, x) = \int (x - t^2) dt = xt - \frac{1}{3}t^3 + C(x).$$

Funktionen $C(x)$ bestäms då man kräver att även relationen $\partial u / \partial x = t + x^2$, dvs. $t + C'(x) = t + x^2$, bör gälla. Detta ger att $C(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, där C är en godtycklig konstant för vilken vi t.ex. kan välja värdet 0. Således är

$$u(t, x) = tx - \frac{1}{3}(t^3 - x^3)$$

och lösningarna till DE:n ges implicit av ekvationer av formen $u(t, x) = \text{konstant}$.

Potential. I kurser i flerdimensionell analys brukar visas att om $P(x, y)$ och $Q(x, y)$ är två funktioner i C^∞ , så är kurvintegralen

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

från en fast punkt (x_0, y_0) till en variabel punkt (x, y) i någon rektangel R i xy -planet "oberoende av vägen" (dvs. oberoende av integrationskurva mellan dessa punkter) om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Integralens värde $u(x, y)$ är då en funktion, för vilken $\partial u / \partial x = P$ och $\partial u / \partial y = Q$. och funktionen u sägs utgöra en *potentialfunktion* till vektorfältet $(P(x, y), Q(x, y))$. Lösningsskurvorna (dvs. graferna till lösningarna) till differentialekvationen $P(x, y) + Q(x, y)y'(x) = 0$ är härvid *ekvipotentialkurvor*, dvs. kurvor där potentialen $u(x, y)$ är konstant.

Begreppet potential i fysiken är en motsvarighet i tre dimensioner. Om $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ är ett kraftfält med komponenterna $F_1(\mathbf{x})$, $F_2(\mathbf{x})$ och $F_3(\mathbf{x})$, för vilket rotationen är noll, dvs. är sådant att

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \equiv 0,$$

så är kurvintegralen

$$V(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$$

oberoende av vägen mellan en fast punkt $\mathbf{x}_0$ och en variabel punkt $\mathbf{x}$. Funktionen $V(\mathbf{x})$ är den potentiella energin för en masspartikel som befinner sig i punkten $\mathbf{x}$.

Integrerande faktor

Betrakta på nytt DE:n

$$(7) \quad P(t, x) + Q(t, x)x' = 0 \quad (P, Q \in \mathcal{C}^1).$$

Definition 1.4. En funktion $\mu(t, x)$ sägs vara en *integrerande faktor* till (7) om $\mu \in \mathcal{C}^1$ och DE:n

$$(10) \quad \mu P + \mu Q x' = 0$$

är exakt.

Anmärkning 2. Observera att falska lösningar kan introduceras då man multiplicerar med en integrerande faktor μ : Varje funktion $x(t)$ i $\mathcal{C}^1$ sådan att $\mu(t, x(t)) \equiv 0$ kommer att vara en lösning till (10) men behöver inte vara en lösning till (7). På samma sätt kan lösningar även försvinna: Då DE:n $tx^2 + x - tx' = 0$ multipliceras med den integrerande faktorn $1/x^2$ utesluts den triviala lösningen $x(t) \equiv 0$.

En funktion μ är en integrerande faktor till (7) om och endast om

$$(11) \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial x}.$$

Då vi utför deriveringarna får vi $\frac{\partial \mu}{\partial t} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial x} P + \mu \frac{\partial P}{\partial x}$. Kring punkter (t, x) , där $\mu(t, x) \neq 0$ är alltså μ en integrerande faktor om och endast om (dividera med μ)

$$(12) \quad \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial t} Q - \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} P = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Exempel 1.4. Ekvationen $(t^2 x^4 + t^6) - t^3 x^3 x' = 0$ är inte exakt, eftersom

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(t^2 x^4 + t^6) = 4t^2 x^3 \quad \text{och} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(-t^3 x^3) = -3t^2 x^3.$$

Att bestämma en integrerande faktor kan vara svårt men om man gissar att det finns en integrerande faktor av någon viss enkel form – i vårt fall gissar vi att $\mu = \mu(t)$ – så kan μ fås relativt enkelt (om man gissat rätt!). Vi sätter in ansatsen $\mu(t)$ i (12) (eller (11)) och får efter hyfsning den ordinära DE:n

$$\frac{d(\ln \mu)}{dt} = -\frac{7}{t},$$

vilken har lösningen $\mu = 1/t^7$ (eftersom vi bara är ute efter *en* integrerande faktor, behöver vi inte använda oss av någon godtycklig integrationskonstant). Vår ursprungliga DE är således ekvivalent med den exakta DE:n

$$\frac{x^4}{t^5} + \frac{1}{t} - \frac{x^3}{t^4} x' = 0,$$

för vilken vi som i exempel 3 får fram potentialfunktionen

$$u(t, x) = -\frac{x^4}{4t^4} + \ln t.$$

Alla lösningar $x(t)$ satisfierar alltså $x(t)^4 = 4t^4(\ln t + C)$, där C är konstant.

Anmärkning 3. Den linjära ekvationen $x' = f(t)x + g(t)$ har den integrerande faktorn $\mu = \exp(-\int f(t) dt)$, ty om $P = -f(t)x - g(t)$ och $Q \equiv 1$, så är

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-f(t)x e^{-\int f(t) dt} \right) = -f(t) e^{-\int f(t) dt} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mu Q) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\int f(t) dt} \right) = -f(t) e^{-\int f(t) dt}.\end{aligned}$$

Efter multiplikation med μ kan ekvationen därför skrivas

$$\frac{d}{dt} \left(x e^{-\int f(t) dt} - \int g(t) e^{-\int f(s) ds} dt \right) = 0,$$

varför funktionen $u(t, x)$ inom parentesen måste vara konstant på lösningskurvorna.

Variabeltransformationer

Med hjälp av en substitution $t = g(\xi, \eta)$, $x = h(\xi, \eta)$ kan man ofta — om man väljer den rätt — transformera en DE så att den blir *enklare att lösa*. Genom substitutionen ersätter vi de vanliga koordinaterna t och x med (i.a.) kurvlinjiga koordinater ξ och η . En lösningskurva $x = x(t)$ till en DE övergår då i en lösningskurva $\eta = \eta(\xi)$ till den transformerade DE:n.

Om vi utgår från DE:n $x' = f(t, x)$ och gör substitutionen ovan, så transformeras funktionen f och antar formen $\bar{f}(\xi, \eta) = f(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta))$. Genom att derivera $g(\xi, \eta)$ och $h(\xi, \eta)$ med avseende på ξ (varvid η betraktas som en funktion av ξ) fås

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\xi} &= g'_\xi + g'_\eta \frac{d\eta}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\xi} &= h'_\xi + h'_\eta \frac{d\eta}{d\xi}.\end{aligned}$$

Eftersom $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\xi} / \frac{dt}{d\xi}$, får den transformerade DE:n därmed utseendet

$$\frac{h'_\xi + h'_\eta \frac{d\eta}{d\xi}}{g'_\xi + g'_\eta \frac{d\eta}{d\xi}} = \bar{f}(\xi, \eta).$$

Exempel 1.5. DE:n $tx' + x - (2t + 1) = 0$ kan skrivas $(tx)' = 2t + 1$. Vi försöker därför med nya variabler $\xi = t$, och $\eta = tx$ och får

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2\xi + 1.$$

Denna DE har lösningarna $\eta = \xi^2 + \xi + C$ i $\xi\eta$ -planet, varför lösningarna i tx -planet ges av $tx = t^2 + t + C$.

Vi skall nu studera några olika typer av DE:r och lära oss de transformationer som är lämpliga vid deras lösning:

Differentialiekvationer av typen

$$x' = f(at + bx + c).$$

Sätt $\eta = at + bx + c$ och låt t stå kvar som den andra variabeln (naturligtvis kan man också sätta $\xi = t$). Nu är

$$\frac{d\eta}{dt} = a + b \frac{dx}{dt}.$$

DE:n övergår alltså i $\frac{d\eta}{dt} = bf(\eta) + a$, där variablerna kan separeras.

Exempel 1.6. I DE:n $x' = e^{t+x}(t+x)$ inför vi variabeln $\eta = t+x$ och får $\eta' - 1 = e^\eta \eta$, där variablerna kan separeras. Genom integration fås $\int d\eta/(\eta e^\eta + 1) = t + C$, vilket ger t som en funktion av parametern η . Med hjälp av likheten $\eta = t+x$ får vi skaran av lösningar i parameterform:

$$\begin{cases} t = \int \frac{d\eta}{\eta e^\eta + 1} - C \\ x = \eta - \int \frac{d\eta}{\eta e^\eta + 1} + C. \end{cases}$$

Ekvationer av typen

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

DE:r av detta slag brukar sägas vara av *homogen* typ. Sätt $\eta = x/t$. Då är $x = t\eta$ och $x' = \eta + t\eta'$, vilket leder till ekvationen $t\eta' = f(\eta) - \eta$ där variablerna kan separeras.

Exempel 1.7. DE:n $txx' = t^2 + x^2$ kan (för $t \neq 0$ och $x \neq 0$) skrivas

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx} = \frac{t}{x} + \frac{x}{t}.$$

Den är alltså av homogen typ. Då vi sätter $\eta = x/t$ antar den den enkla formen $\eta\eta' = 1/t$, vilket ger att $\frac{1}{2}\eta^2 = \ln(C_1|t|)$ och vidare att

$$x^2 = 2t^2 \ln(Ct).$$

Ekvationer av typen

$$x' = f\left(\frac{at + bx + c}{a_1t + b_1x + c_1}\right), \quad (a, b) \neq (0, 0), \quad (a_1, b_1) \neq (0, 0).$$

a) Om $c = 0 = c_1$ så är ekvationen homogen (förläng bråket med $1/t!$). b) Om de räta linjerna $at + bx + c = 0$ och $a_1t + b_1x + c_1 = 0$ är *parallella*, sätt $\eta = a_1t + b_1x + c_1$,

varefter variablerna kan separeras. c) Om de räta linjerna *skär varandra* i en punkt (t_0, x_0) , sätt

$$\begin{cases} t = t_0 + \xi \\ x = x_0 + \eta, \end{cases}$$

dvs. flytta origo till (t_0, x_0) . Då antar DE:n formen

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right) = f\left(\frac{a + b(\eta/\xi)}{a_1 + b_1(\eta/\xi)}\right),$$

dvs. den är homogen (t.ex. $at + bx + c$ kan ju skrivas $a(t - t_0) + b(x - x_0) + at_0 + bx_0 + c = a\xi + b\eta$, eftersom $at_0 + bx_0 + c = 0$).

Bernoullis differentialekvation

$$x' = f(t)x + g(t)x^m.$$

Märk, att om $m \geq 1$ så är $x(t) \equiv 0$ en lösning. Om $m = 1$ så är DE:n linjär. Vi antar därför att $m \neq 1$. Bernoullis DE kan skrivas

$$x^{-m}x' - f(t)x^{1-m} = g(t).$$

Genom att sätta $\eta = x^{1-m}$, $\eta' = (1-m)x^{-m}x'$, fås den linjära DE:n $\eta' = (1-m)f(t)\eta + (1-m)g(t)$.

Exempel 1.8. Ekvationen $x' + x = tx^2$ är av Bernoulli-typ och har den triviala lösningen $x(t) \equiv 0$. Division med x^2 ger

$$\frac{x'}{x^2} + \frac{1}{x} = t.$$

Vi sätter $\eta = \frac{1}{x}$, varvid $\eta' = -\frac{1}{x^2}x'$, och får då den linjära ekvationen $\eta' = \eta - t$, vilken har den allmänna lösningen $\eta(t) = Ce^t + t + 1$. Vår ursprungliga DE har alltså den allmänna lösningen

$$x(t) = \frac{1}{Ce^t + t + 1} \quad (C \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}).$$

Riccatis differentialekvation

$$x' = f(t)x + g(t)x^2 + h(t).$$

Antag att vi på ett eller annat sätt lyckats finna en partikulärlösning $x_1(t)$. Sätt $x = x_1 + z$, vilket ger:

$$x'_1 + z' = f(t)(x_1 + z) + g(t)(x_1^2 + 2x_1z + z^2) + h(t),$$

och vidare (eftersom $x'_1 = f(t)x_1 + g(t)x_1^2 + h(t)$)

$$z' = (f(t) + 2g(t)x_1(t))z + g(t)z^2,$$

vilket är en ekvation av Bernoulli-typ.

Exempel 1.9. DE:n $x' = 2 - 2tx + x^2$ har partikulärlösningen $x_1 = 2t$. Då man sätter $x = 2t + z$, får man:

$$2 + z' = 2 - 4t^2 - 2tz + 4t^2 + 4tz + z^2$$

och efter hyfsning: $z' = 2tz + z^2$. Denna DE är av Bernoulli-typ och förenklas till en linjär DE med hjälp av transformationen $\eta = 1/z$.

Historiska notiser. Bernoullis DE studerades av Jacob (Jacques) Bernoulli (1654–1705). Den löstes av Leibniz och brodern Johann (Jean) Bernoulli (1657–1748). En DE av Riccati-typ uppträder första gången 1694 i en studie av Johann Bernoulli i tidskriften *Acta eruditorum*. Sitt namn fick denna DE av den venetianske greven Jacopo Francesco Riccati (1674–54), som 1724 i samma tidskrift studerade (men inte löste) en DE av Riccati-typ. Det var Leonhard Euler (1707–83) som reducerade Riccatis DE till Bernoullis DE på det ovan beskrivna sättet (publicerat 1764). Euler klargjorde begreppen exakt DE och integrerande faktor år 1734.

Geometriska aspekter på differentialekvationer

En DE $x' = f(t, x)$ definierar ett *riktningsfält* där f är definierad: I varje punkt (t, x) har vi en vektor $(1, f(t, x))$. Lösningskurvorna till DE:n är kurvor som i varje punkt tangerar vektorer i riktningfältet.

Exempel 1.10. För DE:n $x' = x$ får vi vektorfältet i den vänstra bilden i fig. 2, medan några Lösningskurvor, dvs. grafer för funktioner av formen $x(t) = Ce^t$, är utritade på den högra bilden.

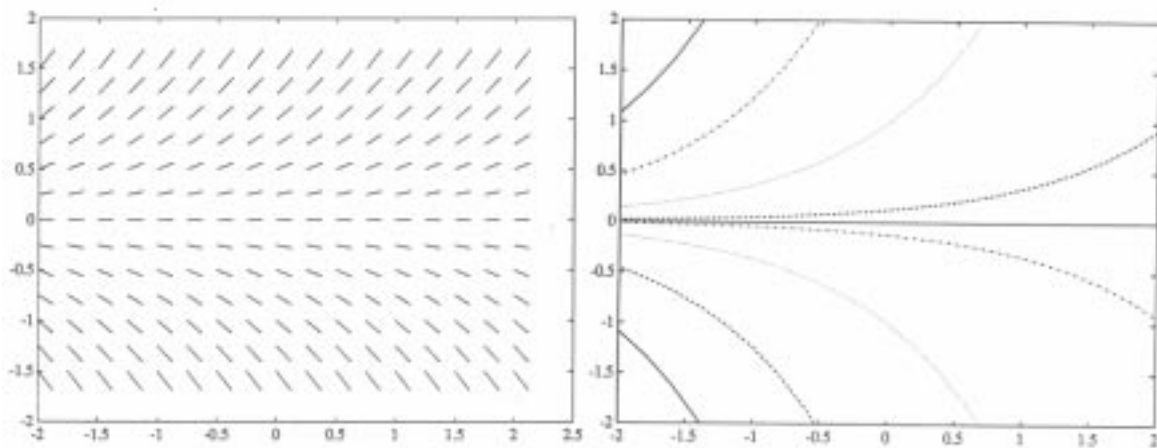


fig. 2

Betrakta DE:n $F(t, x, x') = 0$.

Definition 1.5. Varje trippel (t, x, p) av tal sådana att $F(t, x, p) = 0$ kallas ett *linje-element* eller ett *kurvelement* (till lösningskurvorna).

Om $x(t)$ är en lösning till en DE så är $(t, x, x'(t))$ ett linjeelement till kurvan $x = x(t)$.

Exempel 1.11. Det kan finnas flera linje-element i samma punkt (t, x) . För t.ex. DE:n $x'^2 + t^2 = 1$ har vi i varje punkt (t, x) med $|t| < 1$ två riktningar, nämligen $p = \sqrt{1 - t^2}$ och $p = -\sqrt{1 - t^2}$.

Den allmänna lösningen till DE:n $x' = f(t, x)$ innehåller en godtycklig parameter C , dvs. den är av formen $x = x(t, C)$. För varje värde på C har vi en speciell lösningskurva. Mängden av alla sådana lösningskurvor utgör en kurvskara av lösningar till DE:n.

Om vi *omvänt* utgår från en kurvskara, som är given implicit genom $F(t, x, C) = 0$ ($C \in I = \text{intervall}$), så kan vi i allmänhet på följande sätt få fram en DE med den givna kurvskaran som lösningskurvor: Genom att derivera identiteten $F(t, x(t), C) \equiv 0$ får vi ett ekvationssystem

$$\begin{cases} F(t, x, C) = 0 \\ F'_t + F'_x x' = 0, \end{cases}$$

ur vilket vi (i allmänhet) kan eliminera C , varvid en DE uppstår, vilken har kurvorna i kurvskaran som lösningskurvor.

Exempel 1.12. Betrakta kurvskaran $x = 1/(t + C)$, $C \in \mathbf{R}$. Derivering ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t + C} \\ x' &= -\frac{1}{(t + C)^2}. \end{aligned}$$

Då C elimineras fås DE:n $x' = -x^2$.

Exempel 1.13. Deriverar vi $x = C/t$, så får vi $x' = -C/t^2$. Då vi eliminerar C så får vi DE:n $x' = -x/t$.

Ortogonaltrajektorier. Antag att ekvationen $G(x, y, C) = 0$ beskriver en kurvskara K då parametern C varierar.

Definition 1.6. En kurva, som skär varje kurva i K ortogonalt, kallas en *ortogonaltrajektorie* till K (se fig. 3).

Om $F(x, y, y') = 0$, där y är en funktion av x , är DE:n svarande mot kurvskaran K , så är

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

DE:n svarande mot K :s ortogonaltrajektorier.

Exempel 1.14. I exempel 1.12 såg vi att kurvorna i kurvskaran $y = 1/(x + C)$ är lösningar till DE:n $y' = -y^2$. DE:n svarande mot de ortogonaltrajektorierna är således

$$-\frac{1}{y'} = -y^2,$$

vilken har den allmänna lösningen $3x - y^3 = C_1$. Denna kurvskara består alltså av de ortogonala trajektorierna till kurvskaran $y = 1/(x + C)$ (se fig. 3).

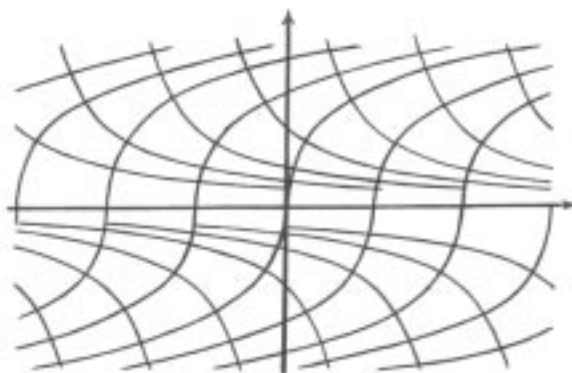


fig. 3

Singulära lösningar

Betrakta en allmän DE av formen

$$(13) \quad F(t, x, x') = 0 \quad (F \in C^1).$$

Definition 1.7. Ett linjeelement (t, x, p) är *singulärt* om $F'_p(t, x, p) = 0$ (motsats: *regulärt* linjeelement). En lösning $x(t)$ till (13) är *singulär* om alla dess linjeelement är singulära, dvs. om

$$\begin{cases} F(t, x(t), x'(t)) \equiv 0 \\ F'_p(t, x(t), x'(t)) \equiv 0 \end{cases}$$

(motsats: *regulär*).

Följande exempel visar att en lösning kan vara singulär då DE:n skrivs på ett sätt medan den är regulär då DE:n skrivs på ett annat sätt:

Exempel 1.15. DE:n $x' = t\sqrt[3]{x}$ har inga singulära lösningar, eftersom $F'_p(t, x, p) \equiv 1$ då F är definierat genom $F(t, x, p) = p - t\sqrt[3]{x}$. Betraktar vi däremot DE:n $x'^3 - t^3x = 0$ och sätter $G(t, x, p) = p^3 - t^3x$ så är $G'_p(t, x, p) = 3p^2$. Lösningen $x(t) \equiv 0$ är alltså nu en singulär lösning.

Låt S vara den kurvskara som ekvationen $g(t, x, C) = 0$ ($g \in C^1$) definierar i tx -planet.

Definition 1.8. En kurva som tangerar varje kurva i S kallas en *envelopp* till S .

Betrakta två kurvor i S svarande mot närliggande parametervärden C och $C + \Delta C$. Eventuella skärningspunkter mellan dessa kurvor svarar då mot lösningar till ekvationssystemet (se fig. 4)

$$\begin{cases} g(t, x, C) = 0 \\ g(t, x, C + \Delta C) = 0, \end{cases}$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{cases} g(t, x, C) = 0 \\ \frac{1}{\Delta C}[g(t, x, C + \Delta C) - g(t, x, C)] = 0. \end{cases}$$

Punkterna på en envelopp till S kommer således att satisfiera ekvationssystemet

$$\begin{cases} g(t, x, C) = 0 \\ g'_C(t, x, C) = 0, \end{cases}$$

vilket vi får då $\Delta C \rightarrow 0$. Ekvationen för enveloppen fås genom elimination av C .

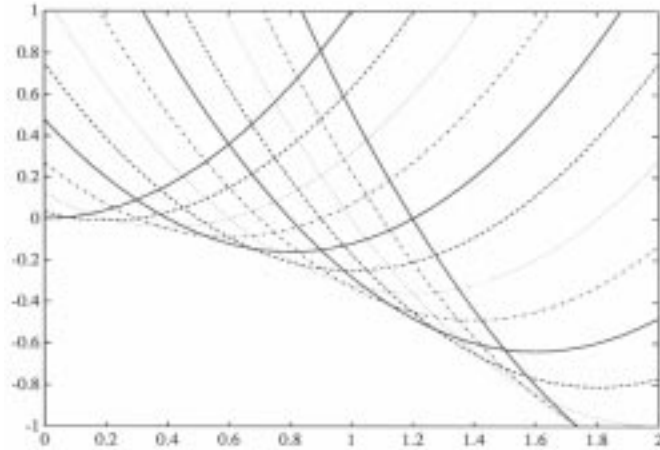


fig. 4

Antag nu att kurvorna i kurvskaran $x = g(t, C)$ är lösningar till en DE $F(t, x, x') = 0$ samt att $g \in C^2$. Enligt ovanstående satisfierar punkterna på någon envelopp till kurvskaran ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = g(t, C) \\ g'_C(t, C) = 0. \end{cases}$$

Om $g''_{CC} \neq 0$ kan man ur den andra av dessa likheter lösa ut parametern C som en funktion av t , varigenom man får enveloppens ekvation $x = g(t, C(t))$. Varje kurva i kurvskaran satisfierar DE:n $F(t, x, x') = 0$. Likheten

$$(14) \quad F(t, g(t, C), g'_t(t, C)) = 0$$

gäller därför identiskt för varje t och C . Men då är ju $F(t, g(t, C(t)), g'_t(t, C(t))) \equiv 0$, dvs. *enveloppen till kurvskaran är en lösning* till DE:n. Detta inser man även genom att betrakta fig. 4, eftersom en kurva är en lösning till en DE om och endast om kurvans alla linjeelement satisfierar DE:n.

Genom att derivera (14) med avseende på C får vi identiteten $F'_x g'_C + F'_p g''_{Ct} \equiv 0$. Då vi i denna sätter in $C(t)$ på C :s plats och beaktar att $g'_C(t, C(t)) \equiv 0$, finner vi att i punkter där $g''_{Ct} \neq 0$ är $F'_p(t, g(t, C(t)), g'_t(t, C(t))) = 0$. Men

$$\frac{d}{dt}g(t, C(t)) = g'_t + g'_C C'(t) = g'_t(t, C(t)),$$

eftersom $g'_C(t, C(t)) \equiv 0$. Insättning ger nu att

$$F'_p \left(t, g(t, C(t)), \frac{d}{dt} g(t, C(t)) \right) \equiv 0.$$

Vi har därmed visat att vilken som helst *envelopp till kurvskaran av lösningskurvor är en singulär lösning* i de punkter där g''_{Ct} är olik noll.

Clairauts differentialekvation

$$x = pt + \phi(p), \quad \text{där} \quad p = x'$$

och $\phi \in C^1$ är en godtycklig funktion, är ett klassiskt exempel på en typ av DE, som ofta har en singulär lösning.

Exempel 1.16. Vi härleder först en DE av Clairauts typ genom att lösa följande problem: *Vilken DE har tangenterna till kurvan $x = t^2$ som lösningskurvor?* Kurvskaran av tangenter ges av $x - t_0^2 = 2t_0(t - t_0)$, där t_0 är parametern. Nu är $x' = 2t_0$, varför vi genom elimination av t_0 får

$$x - \frac{x'^2}{4} = x' \left(t - \frac{x'}{2} \right)$$

och efter hyfsning

$$x = x't - \frac{x'^2}{4}.$$

(Varje kurva $x = g(t)$ som är sådan att g' har en invers funktion ger på motsvarande sätt upphov till en DE av Clairauts typ).

Lösning av Clairauts differentialekvation: För en singulär lösning bör enligt föregående avsnitt gälla:

$$\begin{cases} x = pt + \phi(p) \\ 0 = t + \phi'(p), \end{cases}$$

där den andra likheten erhållits genom derivering med avseende på p . Detta ger omedelbart en parameterframställning av den singulära lösningen:

$$\begin{cases} t = -\phi'(p) \\ x = -p\phi'(p) + \phi(p). \end{cases}$$

Eftersom

$$x' = \frac{\frac{dx}{dp}}{\frac{dt}{dp}} = \frac{-\phi'(p) - p\phi''(p) + \phi'(p)}{-\phi''(p)} = p,$$

är kurvan faktiskt en lösningskurva överallt där $\phi''(p) \neq 0$. De regulära lösningarna får man fram på följande sätt: Derivering av $x = pt + \phi(p)$ ger, då man beaktar att $p = x'(t)$ är en funktion av t :

$$0 = p'(t) \cdot (t + \phi'(p)).$$

Eftersom $t + \phi'(p) \neq 0$ för regulära linjeelement är $p' = 0$ och därmed $x' = p = C$ (= konst.). Insättning i Clairauts DE ger en skara av rätta linjer

$$x = Ct + \phi(C)$$

som lösningskurvor. Man kan lätt visa att denna kurvskara har den singulära lösningen som envelopp.

Brännlinjen i en kaffekopp. Då solen lyser snett mot en kaffekopp ser man på kaffeytan en ljus spetsig geometrisk figur. Denna figur är ljusast vid sin rand, den s.k. brännlinjen eller *kaustikan*. Solens strålar reflekteras av det blanka porslinet i koppen. De reflekterade strålarna tangerar kaustikan, som således är enveloppen till kurvskaran av reflekterade strålar (se fig. 6). Dylika brännlinjer (eller brännnytor) uppstår ofta då ljusstrålar reflekteras mot buktiga ytor.

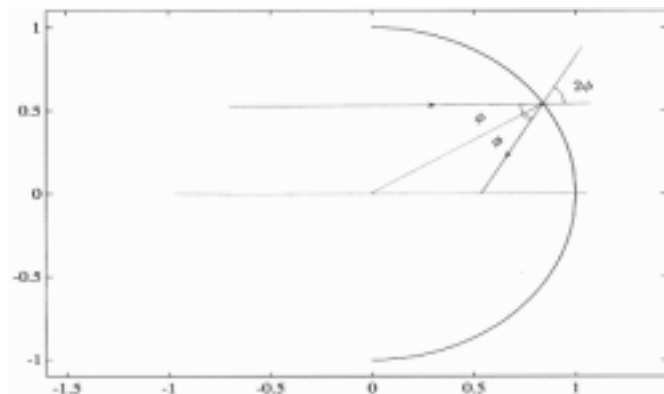


fig. 5

Vi föreställer oss att ljusstrålar kommer in från vänster parallellt med x -axeln och att de reflekteras mot den halva cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, vilken också kan skrivas i parameterform: $x = \cos \phi$, $y = \sin \phi$, där $|\phi| < \pi/2$. Vid reflektion gäller att infallsvinkeln är lika stor som reflektionsvinkeln (se fig. 5). Därför kommer de reflekterade strålarna att bestå av kurvskaran $y - \sin \phi = \tan 2\phi (x - \cos \phi)$, $|\phi| < \pi/2$, som även kan beskrivas med ekvationen

$$(1) \quad y \cos 2\phi - x \sin 2\phi + \sin \phi = 0$$

(vi betraktar nu enbart strålar i ett plan vinkelrätt mot cylinderytan). Genom att derivera med avseende på parametern ϕ får vi ett ekvationssystem för enveloppen

$$\begin{cases} y \cos 2\phi - x \sin 2\phi = -\sin \phi \\ y \sin 2\phi + x \cos 2\phi = \frac{1}{2} \cos \phi, \end{cases}$$

vars matris representerar en vridning med vinkeln 2ϕ :

$$\begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \frac{1}{2} \cos \phi \end{pmatrix}.$$

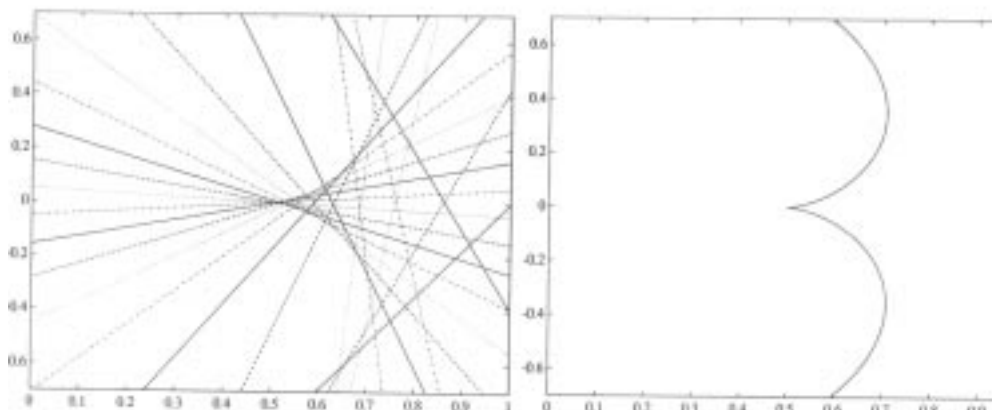


fig. 6

En vridning med vinkeln 2ϕ åt motsatt håll resulterar i

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \frac{1}{2} \cos \phi \end{pmatrix},$$

ur vilket kaustikans ekvation (i parameterform) följer efter en stunds exercis med trigonometriska formler:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}(3 \sin \phi - \sin 3\phi) = \sin^3 \phi \\ x = \frac{1}{4}(3 \cos \phi - \cos 3\phi). \end{cases}$$

Derivering av (1) med avseende på x ger $y' = \tan 2\phi$. Då vi med hjälp av denna likhet eliminerar ϕ ur (1) får vi fram en DE, som har både de reflekterade strålarna och kaustikan som lösningar: Vi utnyttjar formlerna $\sin u = \tan u / \sqrt{1 + \tan^2 u}$, $\cos u = 1 / \sqrt{1 + \tan^2 u}$ och $\sin u = \sqrt{(1 - \cos 2u)/2}$ ($u > 0$) och erhåller

$$y \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} - x \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)},$$

vilket är en DE av Clairauts typ:

$$y = xp - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + p^2 - \sqrt{1 + p^2}}, \quad p = y'.$$

Historiska notiser. Alexis Claude Clairaut (1713–1765) undersökte matematiskt månens rörelser i sitt verk *Théorie de la lune* (1753), i vilket han också använde metoder att få fram singulära lösningar till differentialekvationer. För övrigt kan nämnas att Clairaut åren 1736–37 deltog i P.L. Maupertuis expedition till Lappland för att experimentellt verifiera om jorden faktiskt är tillplattad vid polerna. Han lyckades även beräkna och förutspå Halleys komets återkomst år 1759 med en månads noggrannhet.

Övningsuppgifter

1. Lös DE:n $2x' + x = 0$ (dvs. bestäm alla lösningar till den).
2. Lös DE:n $x' = \sqrt{x/t}$.
3. En drog upptas i blodströmmen så att för koncentrationen $x(t)$ vid tidpunkten t gäller att $x'(t) = a - bx(t)$, där a och b är positiva konstanter. Lös begynnelsevärdesproblemet då $x(0) = 0$. Bestäm gränsvärdet för $x(t)$, då $t \rightarrow \infty$. Vid vilken tidpunkt är koncentrationen hälften av detta gränsvärde?
4. Enligt Stefans strålningslag förändras den absoluta temperaturen T hos en kropp så att $T' = k(T^4 - T_m^4)$, där T_m är den konstanta absoluta temperaturen hos det omgivande mediet. Lös DE:n.
5. Om luftmotståndet är proportionellt mot hastighetens kvadrat beskrivs vertikal nedåtriktad fallrörelse (hastigheten v är < 0) av DE:n $mv' = kv^2 - mg$, där m , k och g är positiva konstanter. Lös denna.
6. En cylinderformig vattentank med vertikal symmetriaxel och med tvärsnittsarean A har i sin botten ett hål med arean A_0 . Den hastighet med vilken vattnet sprutar ut ur hålet är $v = \sqrt{2gh}$, där h är vattendjupet i tanken. Om $V(t)$ är vattnets volym vid tiden t , så är därför $V'(t) = -A_0\sqrt{2gh}$ (friktion och dylikt ignoreras). Bestäm h som funktion av t .
7. Bestäm alla lösningar till populationsmodellen $P' = aP + d$, som behandlades kortfattat i texten.
8. Bestäm alla lösningar till den logistiska DE:n $P' = P(a - bP)$, som behandlades kortfattat i texten.
9. En population, som normalt kan beskrivas med hjälp av den logistiska DE:n, är föremål för en konstant "skörd" s (s individer skördas per tidsenhet), varvid vi får modellen $P' = aP - bP^2 - s$, där a , b och s är positiva. Lös DE:n. Visa även att om en jämviktspunkt existerar (dvs. om polynomet i högra ledet har ett reellt nollställe) så kan DE:n återföras på den logistiska genom att man förskjuter P -axelns nollpunkt (dvs. genom en transformation av formen $P - P_0 = Q$).
10. En population, som normalt kan beskrivas med hjälp av den logistiska DE:n, är föremål för "skörd", så att kP ($k > 0$) individer skördas per tidsenhet (jfr. med förgående uppgift). Uppställ en populationsmodell och diskutera denna.
11. Ett snöre med längden s och med ena ändan i origo är utlagd längs den positiva y -axeln. I den övre ändan har vi fäst en liten vikt. Då den nedre ändan av snöret förs längs den positiva x -axeln, kommer vikten att släpa längs den s.k. släpkurvan, *traktrix*. Ställ upp en DE och lös denna för att få fram ekvationen för traktrix.
12. Lös DE:na
 - (a) $x' = x + e^{2t}$;
 - (b) $tx' + x = 1/(1 + t^2)$;
 - (c) $x' - x \cos t = \sin 2t$.
13. Genom en godtycklig punkt P på en kurva C med tangent (i xy -planet) dras en rät linje parallell med y -axeln, och genom origo dras en rät linje parallell med kurv tangenten i P . Låt Q vara den punkt där dessa linjer skär varann, och låt M vara mittpunkten på sträckan PQ . Bestäm kurvan C så att orten för M (dvs.

mängden av alla M då P varierar) blir en given kurva $y = f(x)$, där $f(x)$ är en kontinuerlig funktion.

14. Lös DE:n $(1 + e^t)x' + e^t x = 0$.
15. Antag att M är den totala mängden kunskap som du skall memorera. Låt $A(t)$ beteckna den kunskap som du hunnit inhämta vid tiden t . För en person med gott minne är $A'(t)$ proportionellt mot den kunskap som ännu inte memorerats. Men du är glömsk och glömmet per tidsenhet en viss procent av det du redan proppat in i huvudet. Därför är DE:n

$$\frac{dA(t)}{dt} = a(M - A(t)) - bA(t)$$

en modell för din memoreringsprocess. Bestäm $A(t)$ då vi antar att $A(0) = 0$.

16. Visa att DE:n $3t^2x + 2tx + (t^3 + t^2 + 2x)x' = 0$ är exakt och bestäm den lösning, som uppfyller begynnelsevillkoret $x(1) = 3$.
17. Lös DE:n med hjälp av en integrerande faktor av den angivna formen:
- (a) $(t + x) + t \ln t x' = 0$, $\mu(t)$;
- (b) $6tx + (4x + 9t^2)x' = 0$, $\mu(x)$.
18. Lös DE:n $x' = \sin(t + x)$. Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.
19. Bestäm en integrerande faktor till DE:n i förgående uppgift (som löses enklare utan användning av integrerande faktor).
20. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$x' = \frac{x^2 - 2tx - t^2}{x^2 + 2tx - t^2} \quad x(1) = -1.$$

21. Lös DE:n

$$x' = \frac{4t - x + 7}{2t + x - 1}$$

samt bestäm speciellt den lösning, som uppfyller begynnelsevillkoret $x(0) = 0$.

22. Lös följande DE:r av Bernoulli-, Riccati- resp. Clairaut-typ:
- (a) $x' + (1/t)x = tx^2$;
- (b) $x' = -2 - x + x^2$;
- (c) $x = tx' + 1 - \ln x'$.
23. I en full 100 liters behållare har man löst 1 kg salt. Man börjar pumpa in en lösning innehållande 5 g salt per liter med en hastighet av 10 liter per minut. Fullständigt blandad lösning rinner samtidigt ut med samma hastighet. Hur mycket salt finns i behållaren efter 20 minuter? Ledning: Om $Q(t)$ betecknar mängden salt i behållaren vid tiden t så leder ovanstående problem till DE:n $Q'(t) = 50 - (Q(t)/100)10$ [g/min.].
24. Bestäm de ortogonala trajektorierna till kurvskaran $y = cx/(1 + x)$, $c \in \mathbf{R}$.
25. Visa att kurvskaran

$$\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c-1} = 1, \quad c > 0, c \neq 1,$$

är ortogonal mot sig själv.

26. Bestäm enveloppen till kurvskaran $y = a^{-4}x(x^2 - a^2)$, $a > 0$. Bestäm en DE som har kurvorna i skaran som lösningskurvor.
27. Bestäm enveloppen till alla sträckor i den första kvadranten med längden a och med den ena ändan på x -axeln och den andra på y -axeln.
28. En tank innehåller ursprungligen 400 l öl med en alkoholhalt på 3 %. Med takten 3 l/min. pumpas 6 %:igt öl in i tanken och samtidigt pumpas en fullständigt omrörd blandning ut med takten 4 l/min. Bestäm mängden alkohol $A(t)$ i tanken efter t minuter. Hur många procent alkohol finns det i blandningen just innan tanken töms?
29. Lös DE:na
 - (a) $tx^2x' = t^3 + x^3$;
 - (b) $(3t + 2x - 5)x' = 2t + x$.
30. En roddare rör från en punkt A på stranden av en flod till den rakt motsatta punkten B på andra stranden, dit avståndet är a . Han rör ständigt rakt mot B och med konstant hastighet relativt vattnet. Strömmens hastighet antas vara konstant. Ange den väg båten beskriver. Ange också villkoret för att båten skall kunna nå punkten B .
31. Visa att om $x(t)$ uppfyller DE:n $x' + 2tx = 1/t$, så gäller att $x(t) \rightarrow 0$, då $t \rightarrow +\infty$.
32. Lös integralekvationen

$$x(t) = t + \int_0^t \frac{2s x(s)}{1 + s^2} ds.$$

33. Låt $h_N(t)$ vara den funktion som antar värdet N för $|t - 1| < 1/(2N)$ men värdet 0 för övriga argument. Bestäm den *generaliserade* lösningen till begynnelsevärdesproblemet $x' = x + h_N(t)$, $x(0) = 0$, dvs. den kontinuerliga funktion $x_N(t)$ som uppfyller begynnelsevillkoret samt satisfierar DE:n i de tre öppna intervall som uppstår då talen $1 \pm 1/(2N)$ avlägsnas från tallinjen. Bestäm $\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t)$.
34. En raketmotordysa med formen av en lång cylinder, vilken är öppen den ena ändan och slutet i den andra, förbränner raketbränsle i den slutna ändan. Förbränningsgasernas hastighet v , tryck p och densitet ρ antas bero enbart av lägeskoordinaten x , som växer i riktning mot dysans öppning. Man kan visa att dessa storheter uppfyller

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}.$$

Vidare gäller att $p = k\rho^\kappa$ ($k > 0$, $\kappa > 1$), eftersom de heta gaserna kan anses expandera adiabatiskt. Dessutom gäller att $\rho v = \alpha$, eftersom gaser varken uppstår eller försvinner på vägen ut (k , κ och α är konstanter). Visa att utblåsningshastigheten vid dysans mynning är

$$w = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right)},$$

där p_0 och ρ_0 är tryck och densitet vid dysans slutna ända medan p och ρ är dessa storheters värden vid dysans mynning.

35. En raket, som inte påverkas av några yttre krafter, förbränner sitt bränsle så att raketens totala massa vid tiden t är $m(t) = m_0 - kt$ ($k > 0$). Om utblåsningshastigheten för förbränningsgaserna är w (jfr. föregående uppgift), påverkas raketerna av den konstanta framdrivande kraften $F = -w \frac{dm}{dt}$. Visa att den totala hastighetsökningen, då bränslet vid tiden T tagit slut, är

$$\Delta v = w \ln \mu,$$

där $\mu = m(0)/m(T)$ (raketens *massförhållande*). En tvåstegsraket, hos vilken steg två har massförhållandet μ_2 och steg ett – med steg två som last – har massförhållandet μ_1 , erhåller således den totala hastighetsökningen $\Delta v = w \ln \mu_1 + w \ln \mu_2 = w \ln(\mu_1 \mu_2)$, där produkten $\mu_1 \mu_2$ är det s.k. *effektiva massförhållandet*. Dra härav slutsatsen att en tvåstegsraket använder en given bränslemängd effektivare än en enstegsraket.

36. Solvinden, vilken består av protoner och elektroner som strömmar ut från solen med stor hastighet, kan förenklat beskrivas av DE:n

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dr} - \frac{\gamma}{r^2}, \quad (\gamma > 0),$$

där den sista termen representerar summan av strålningstrycket (med riktning utåt) och gravitationen (med riktning inåt). Här betecknar v solvindens hastighet utåt, r avståndet till solens medelpunkt samt p och ϱ "solvindsgasens" tryck resp. densitet. Antag att expansionen är adiabatisk, så att $p = k\varrho^\kappa$ ($k > 0$, $\kappa > 1$). Antag vidare att solvindspartiklar varken uppkommer eller försvinner på vägen ut, så att $\varrho v r^2 = \alpha$ (= konstant). Visa att en dramatisk hastighetsminskning, en *chockfront*, kan förekomma på ett visst avstånd r_0 från solen, där

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{dv}{dr} \quad \text{och} \quad \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{dp}{dr}$$

är oändliga. Visa vidare att denna s.k. *slutchock* uppträder där solvinden övergår från överljuds- till underljudshastighet (ljudhastigheten är $\sqrt{\kappa p / \varrho}$). (I verkligheten torde slutchocken uppträda på ett avstånd mellan 70 och 115 jordbaneradier från solen, dvs. långt utanför Plutos bana.)

Differentialekvationer av 2:a ordningen

DE:r av andra ordningen har den allmänna formen $F(t, x, x', x'') = 0$ medan normalformen är $x'' = f(t, x, x')$. Vi behandlar här bara några speciella typer av DE:r av 2:a ordningen, vilka kan återföras på DE:r av 1:a ordningen.

Differentialekvationer av typen

$$x'' = f(t, x').$$

Genom att sätta $u = x'$ får man en DE av 1:a ordningen $u' = f(t, u)$. Om $u(t, C)$ är den allmänna lösningen till denna, så är $x(t) = \int u(t, C) dt + C_1$ den allmänna lösningen till $x'' = f(t, x')$.

Exempel 2.1. Kedjelinjen. Antag att en kedja eller ett (sladdrigt) rep är upphängt mellan två punkter och hänger stilla under tyngdkraftens inverkan. Kedjans krökta förlopp beskrivs av ekvationen $y = y(x)$, där x är den horisontella och y är den vertikala variabeln. Kedjan antas ha konstant täthet ρ (=massa per längdenhet). Betrakta ett litet stycke av kedjan med längden Δs . Detta kommer i vertikal led att påverkas av tyngdkraften $mg = \rho g \Delta s$ och kraftkomponenterna F_{1y} och F_{2y} samt i horisontell led av kraftkomponenterna F_{1x} och F_{2x} (se fig. 1).

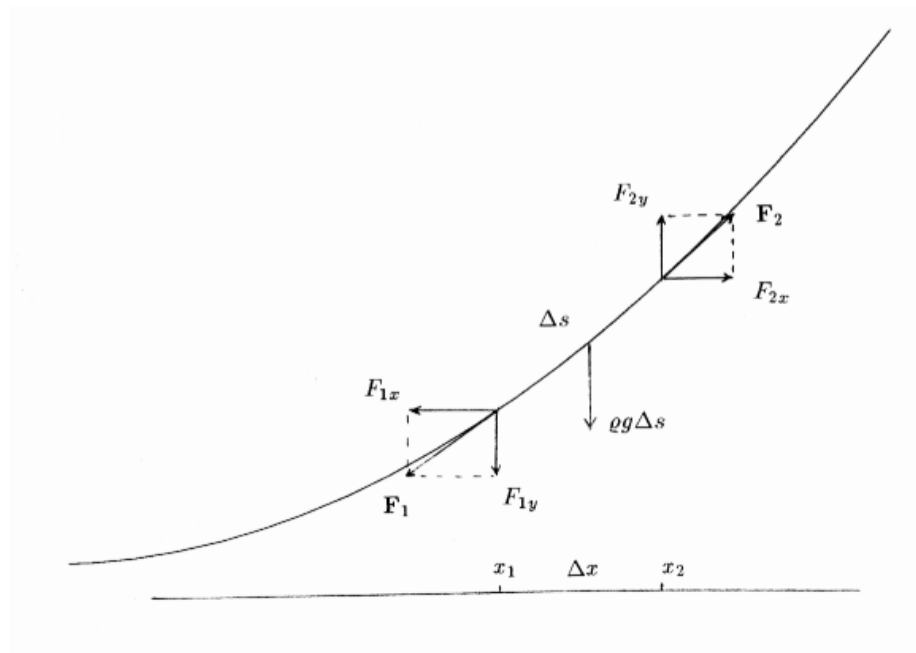


fig. 1

Eftersom kedjestycket befinner sig i vila bör

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} = \varrho g \Delta s. \end{cases}$$

Den första likheten ger att $F_{2x} = K$ är konstant och oberoende av var i kedjan stycket befinner sig. Eftersom $y'(x_2) = F_{2y}/F_{2x} = F_{2y}/K$ och $y'(x_1) = -F_{1y}/K$, så ger den andra likheten att $K(y'(x_2) - y'(x_1)) = \varrho g \Delta s$. Genom att dividera med Δx och låta Δx gå mot noll, finner vi att funktionen $y(x)$ bör satsifiera DE:n

$$y'' = \frac{\varrho g}{K} \sqrt{1 + y'^2},$$

ty $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$. Om vi använder den förenklande beteckningen k för $\varrho g/K$ och sätter $u = y'$, får vi DE:n $u' = k\sqrt{1 + u^2}$, vilken har lösningen $u(x) = \sinh(kx + C)$. Genom integration av u fås $y(x) = (1/k) \cosh(kx + C) + C_1$.

Historiska notiser. Galileo Galilei hade förmodat att kedjelinjen är en parabel men Christiaan Huygens (1629–1695) insåg att detta är fel. År 1690 diskuterade Jacob och Johann Bernoulli problemet med kedjelinjen, vilket Johann Bernoulli därefter löste. Lösningen publicerades år 1691 i tidskriften *Acta eruditorum*. I samma nummer publicerade även Leibniz och Huygens sina lösningar på problemet. Detta var en av de allra första triumferna för problemlösning med hjälp av differentialekvationer inom Leibniz differentialekalkyl.

Differentialiekvationer av typen

$$x'' = f(x, x').$$

Antag att $x(t)$ är en lösning och antag att $x'(t) \neq 0$. Då kommer den inversa funktionen $t(x)$ att existera i något intervall, varför vi där kan övergå till att använda x som fri variabel i stället för t . Sätt $u = x'$. Då är $x'' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dx} u$. Funktionen $u(x) = x'(t(x))$ kommer därför att satsifiera DE:n

$$(1) \quad u \frac{du}{dx} = f(x, u).$$

Omvänt gäller att om $u(x)$ är en lösning till (1), så får man en lösning till den ursprungliga DE:n genom att lösa ekvationen $x' = u(x)$, som har separerbara variabler.

Exempel 2.2. DE:n $x'' = x'e^x$ har åtminstone de triviala lösningarna $x(t) \equiv C$. Antag att $x(t)$ är en lösning sådan att $x'(t) > 0$ (eller $x'(t) < 0$) i något intervall och sätt $u = x'$. Vi får då DE:n $u \frac{du}{dx} = ue^x$, som har de icke-triviala lösningarna $u(x) = e^x + C$. Genom att lösa DE:n $x' = e^x + C$ får vi fram lösningarna

$$x(t) = -\ln \left[\frac{1}{C} \left(\pm e^{-C(t+C_1)} - 1 \right) \right]$$

till $x'' = x'e^x$ (vi utelämnar detaljerna).

Anmärkning 1. DE:n $x'' = f(x)$ är ett specialfall av föregående typ. Genom att sätta $u = x'$ övergår den i $u \frac{du}{dx} = f(x)$, där variablerna kan separeras.

Differentialekvationer av typen

$$F\left(t, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}\right) = 0$$

($x(t)$ förutsätts vara $\neq 0$). Sätt $u = x'/x$. Då är

$$u' = \frac{x''}{x} - \frac{x'^2}{x^2} = \frac{x''}{x} - u^2,$$

dvs. $u(t)$ satisfierar DE:n $F(t, u, u' + u^2) = 0$. Omvänt gäller att om $u(t)$ är en lösning till den sistnämnda DE:n, så är $x(t) = C \exp(\int u(t) dt)$ en lösning till den ursprungliga DE:n.

Exempel 2.3. *Homogena linjära differentialekvationer av 2:a ordningen:*

$$(2) \quad x'' = p(t)x' + q(t)x.$$

DE:n har den triviala lösningen $x(t) \equiv 0$. Antag att $x(t)$ är en lösning som är $\neq 0$ i något intervall. Då kan (2) skrivas

$$\frac{x''}{x} = p(t)\frac{x'}{x} + q(t).$$

Då man sätter $u = x'/x$, varvid $x''/x = u' + u^2$, fås

$$u' = p(t)u - u^2 + q(t),$$

vilket är en DE av Riccati-typ. Antag omvänt att $u(t)$ är en lösning till en DE

$$u' = f(t)u + g(t)u^2 + h(t)$$

av Riccatis typ. Sätt $u = -\frac{1}{g(t)}\frac{x'}{x}$ (dvs. sätt $x(t) = C \exp(-\int g(t)u(t) dt)$). Då är

$$\frac{g'}{g^2}\frac{x'}{x} - \frac{1}{g}\frac{x''}{x} + \frac{1}{g}\frac{x'^2}{x^2} = -\frac{f}{g}\frac{x'}{x} + g\frac{1}{g^2}\frac{x'^2}{x^2} + h,$$

vilket kan hyfsas till en homogen linjär DE

$$x'' = \left(\frac{g'(t)}{g(t)} + f(t)\right)x' - g(t)h(t)x.$$

Övningsuppgifter

1. Lös DE:n $x'' + (x')^2 + 1 = 0$ fullständigt.
2. I en lätt lina, vars bäge ändrar är fastknutna i varsin stolpe, är ett stort antal tunga homogena lika grova kättingar fästade med sin ena ända så, att det horisontella avståndet mellan kättingarna överallt är detsamma. Kättingarnas lösa ända når precis ner till marken (som är plan). Vilken form har linan då jämvikt antas råda? (Ledn.: Eftersom antalet kättingar är stort, betraktar vi gränsfallet då antalet är "oändligt".)
3. Lös DE:n $x'' - \frac{(x')^2}{x} = 0$.
4. Lös begynnelsevärdesproblemet $x'' - e^x x' = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$. (Ledn.: Utnyttja begynnelsevillkoren så tidigt som möjligt.)
5. Vilken form har de två bärande kablarna på en horisontell hängbro, som har konstant vikt per längdenhet? Både de bärande kablarna och de från dessa utgående vertikala kablar, som nedtill är fästa vid bron, antas ha en försumbar vikt. Vidare antas antalet vertikala kablar vara mycket stort, dvs. "oändligt många".
6. Antag att $x(t)$, $t \in I$, är en sådan lösning till DE:n $xx'' + (x')^3 = 0$ för vilken $x'(t) > 0$ för varje $t \in I$. Bestäm den inversa funktionen till $x(t)$.
7. Lös DE:n $xx'' = 2xx' + (x')^2$.
8. Mellan två givna punkter ovanför x -axeln skall en kurva dras så att den rotationsyta, som uppkommer då kurvan roterar kring x -axeln, blir så liten som möjligt. Med hjälp av variationskalkyl kan man visa att den sökta kurvan $y = y(x)$ bör satsifiera DE:n

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = \sqrt{1+y'^2}.$$

Lös denna DE.

9. Då man i polära koordinater r och ϕ (dumt nog!) försöker bestämma den kurva $r = r(\phi)$ som ger det kortaste avståndet mellan två givna punkter finner man (med hjälp av variationskalkyl) att $r(\phi)$ bör satsifiera DE:n

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}, \quad \left(r' = \frac{dr}{d\phi} \right).$$

Lös denna DE.

Linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Redan i inledningen sades att en linjär DE av n :te ordningen är en ekvation av formen

$$(1) \quad x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t).$$

Ekvationen sägs vara *homogen* om $b(t) \equiv 0$ och *inhomogen* i annat fall. I detta kapitel skall vi studera linjära DE:er, hos vilka koefficientfunktionerna $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$ är konstanter:

$$(2) \quad x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = b(t).$$

Definition 3.1. Polynomet

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

kallas det *karakteristiska polynomet* för (2) och ekvationen $L(\lambda) = 0$ kallas den *karakteristiska ekvationen* för (2).

Om man substituerar deriveringsoperatoren $D = \frac{d}{dt}$ på lambdas plats i det karakteristiska polynomet, fås en kompakt beteckning för (2): $L(D)x = b(t)$. Symbolen $L(D)$ kan nu uppfattas som en *differentialoperator* som opererar på funktionen $x(t)$ så att distributionslagen gäller: $L(D)x(t) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0x(t)$.

Genom direktverifiering av axiomen kan man visa att mängden $\mathcal{F}(I)$ av alla funktioner på ett intervall I bildar ett vektorrum, då man definierar vektoraddition som vanlig addition av funktioner och multiplikation med en skalär c som multiplikation av varje funktionsvärde med c :

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)(t) &= x_1(t) + x_2(t), \\ (cx)(t) &= cx(t).\end{aligned}$$

För delmängden $\mathcal{C}^n(I)$ av alla funktioner, som har kontinuerliga derivator av n :te ordningen, gäller att om funktionerna $x_1(t), x_2(t)$ är i $\mathcal{C}^n(I)$ så är också funktionerna $x_1(t) + x_2(t)$ och $cx_1(t)$ i $\mathcal{C}^n(I)$. Således utgör $\mathcal{C}^n(I)$ ett underrum av $\mathcal{F}(I)$ och är därmed självt ett vektorrum.

Differentialoperatoren $L(D)$ kan uppfattas som den funktion (operator), som avbildar en funktion $x(\cdot) \in \mathcal{C}^n(I)$ på funktionen $(L(D)x)(\cdot) \in \mathcal{C}(I)$.

Sats 3.1. *Differentialoperatoren $L(D) : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ är linjär, dvs. för godtyckliga funktioner $x, x_1, x_2 \in \mathcal{C}^n(I)$ och varje konstant c är*

$$\begin{aligned}L(D)(x_1 + x_2) &= L(D)x_1 + L(D)x_2 \\ L(D)(cx) &= cL(D)x.\end{aligned}$$

Bevis. Vi bevisar t.ex. den första av formlerna i satsen. Den andra kan bevisas på liknande sätt. Om $L(D) = \sum_{k=0}^n a_k D^k$, ($a_n = 1$), så är

$$\begin{aligned} L(D)(x_1 + x_2)(t) &= \sum_{k=0}^n a_k D^k (x_1(t) + x_2(t)) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (D^k x_1(t) + D^k x_2(t)) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k D^k x_1(t) + \sum_{k=0}^n a_k D^k x_2(t) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n a_k D^k \right) x_1(t) + \left(\sum_{k=0}^n a_k D^k \right) x_2(t) \\ &= [L(D)x_1](t) + [L(D)x_2](t) = [L(D)x_1 + L(D)x_2](t). \diamond \end{aligned}$$

Homogena ekvationer

Med en lösning till den homogena ekvationen

$$(2)' \quad L(D)x = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0$$

avses normalt en funktion $x(t)$ med reella värden i $\mathcal{C}^n$ sådan att $(L(D)x)(t) \equiv 0$. På grund av att teorin blir enklare och rätlinjigare om man också tillåter lösningar med komplexa värden, skall vi använda oss av sådana:

Definition 3.2. Antag att koefficienterna i (2) är komplexa tal och att funktionen $b(t)$ antar komplexa värden. Då sägs en funktion $x(t) = u(t) + iv(t)$ med komplexa värden vara en *komplex lösning* till ekvation (2) om denna satisfieras av $x(t)$.

Kom ihåg att derivering av $x(t)$ görs termvis så att t.ex. $x''(t) = u''(t) + iv''(t)$. Om koefficienterna i (2)' är reella, är en funktion $x(t)$ därför en komplex lösning till (2)' om och endast om $u(t)$ och $v(t)$ är (reella) lösningar.

Eftersom det karakteristiska polynomet kan faktoriseras i linjära faktorer $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$, där $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ är de olika komplexa rötterna till den karakteristiska ekvationen och $n_1, \dots, n_m$ är deras multipliciteter, så kan operatoren $L(D)$ faktoriseras på motsvarande sätt:

$$L(D) = (D - \lambda_1)^{n_1} \dots (D - \lambda_m)^{n_m}.$$

Operatoren $L(D) = D^2 - 3D + 2$ t.ex. kan skrivas $(D - 1)(D - 2)$. På grund av detta kan ekvation (2)' lösas genom att man löser en linjär ekvation av formen $(D - \lambda)x = b(t)$ n gånger, så att de n faktorerna i $L(D)$ stegvis försvinner. Det både teoretiska och praktiska hjälpmedel, som vi behöver för denna stegvisa reduktion, är den s.k. förskjutningsregeln:

Sats 3.2. (förskjutningsregeln) Om $g \in \mathcal{C}^n$ så gäller

$$L(D)(e^{\lambda t}g(t)) = e^{\lambda t}L(D + \lambda)g(t).$$

Bevis. Enligt deriveringsreglerna är $D(e^{\lambda t}g(t)) = e^{\lambda t}Dg(t) + \lambda e^{\lambda t}g(t) = e^{\lambda t}(D + \lambda)g(t)$. Genom att använda denna likhet k gånger fås allmänt att

$$D^k(e^{\lambda t}g(t)) = e^{\lambda t}(D + \lambda)^k g(t) \quad (k = 0, \dots, n).$$

Eftersom $L(D) = \sum a_k D^k$ fås nu förskjutningsregeln:

$$\begin{aligned} L(D)(e^{\lambda t}g(t)) &= \sum_{k=0}^n a_k D^k(e^{\lambda t}g(t)) = \sum_{k=0}^n a_k e^{\lambda t}(D + \lambda)^k g(t) \\ &= e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^n a_k (D + \lambda)^k \right) g(t) = e^{\lambda t} L(D + \lambda)g(t). \diamond \end{aligned}$$

Exempel 3.1. Låt oss använda förskjutningsregeln till att lösa ekvationen $x'' - 4x' + 4x = 0$, som också kan skrivas $(D - 2)^2 x = 0$. Antag att $x(t)$ är en godtycklig lösning. Eftersom ekvationen $(D - 2)x = 0$ har den allmänna lösningen $C_1 e^{2t}$, så måste det gälla att $(D - 2)x = C_1 e^{2t}$, för något värde på C_1 . Genom att multiplicera med e^{-2t} och använda förskjutningsregeln fås:

$$D(e^{-2t}x) = e^{-2t}(D - 2)x = C_1.$$

Således är $e^{-2t}x = C_1 t + C_2$ för något värde på C_2 , dvs. $x(t)$ måste ha formen $x(t) = C_1 t e^{2t} + C_2 e^{2t}$. Genom insättning finner man omvänt att varje funktion av denna form (dvs. för godtyckliga värden på C_1 och C_2) är en lösning till ekvationen.

Teorem 3.3. Låt $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$, där $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ är olika, vara det karakteristiska polynomet till den homogena linjära DE:n $L(D)x = 0$. Då är

$$x(t) = \sum_{k=1}^m p_k(t) e^{\lambda_k t},$$

där $p_k(t)$ är ett godtyckligt komplext polynom av högst graden $n_k - 1$ ($k = 1, 2, \dots, m$) den allmänna komplexa lösningen till $L(D)x = 0$.

Bevis. Vi visar först att alla funktioner av den beskrivna formen faktiskt är lösningar. På grund av att $L(D)$ är linjär räcker det att visa att varje funktion $p_k(t) e^{\lambda_k t}$ ($k = 1, \dots, m$) är en lösning. Men detta följer direkt ur förskjutningsregeln, ty

$$\begin{aligned} L(D)(e^{\lambda_k t} p_k(t)) &= e^{\lambda_k t} L(D + \lambda_k) p_k(t) \\ &= e^{\lambda_k t} ((D + \lambda_k - \lambda_1)^{n_1} \dots (D + \lambda_k - \lambda_k)^{n_k} \dots) p_k(t) \\ &= e^{\lambda_k t} P(D) D^{n_k} p_k(t) \equiv 0, \end{aligned}$$

där $P(D) = \prod_{i \neq k} (D + \lambda_k - \lambda_i)^{n_i}$. Antag omvänt att $x(t)$ är en godtycklig lösning till $(D - \lambda_1)^{n_1} \dots (D - \lambda_m)^{n_m} x = 0$. På samma sätt som i exempel 3.1 ovan använder vi förskjutningsregeln n_1 gånger till att eliminera operatoren $(D - \lambda_1)^{n_1}$, varvid fås att

$$(D - \lambda_2)^{n_2} \dots (D - \lambda_m)^{n_m} x = P_1(t) e^{\lambda_1 t},$$

där $P_1(t)$ är ett polynom av högst graden $n_1 - 1$. Därefter kan vi använda förskjutningsregeln n_2 gånger för att eliminera operatoren $(D - \lambda_2)^{n_2}$ osv.. Slutligen fås att $x(t)$ med nödvändighet måste ha den form som satsen anger. (Detaljerna i den andra delen av beviset har bortlämnats på grund av att en mycket allmänare sats kommer att bevisas senare.) $\diamond$

Exempel 3.2. För att bestämma den allmänna komplexa lösningen till DE:n $x'' - 3x' + 2x = 0$ löser vi den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ och finner rötterna 1 och 2. Enligt Teorem 3.3 är den allmänna komplexa lösningen $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$, där C_1 och C_2 är godtyckliga komplexa konstanter.

Exempel 3.3. DE:n $x^{(4)} - 2x''' + 2x'' - 2x' + x = 0$ har den karakteristiska ekvationen $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$. Rötterna $\lambda = i$ och $\lambda = -i$ är alltså enkla medan roten $\lambda = 1$ är dubbel. Den allmänna komplexa lösningen är således $x(t) = (C_1 t + C_2) e^t + C_3 e^{it} + C_4 e^{-it}$, där $C_i \in \mathbf{C}$, för $i = 1, \dots, 4$.

Om differentialekvationen är reell är man i allmänhet intresserad av reella lösningar:

Korollarium 3.3.1. Låt γ_k ($k = 1, \dots, l$) vara de olika reella rötterna samt låt $\lambda_k = \gamma_k \pm i\omega_k$ ($k = l + 1, \dots, m$) vara de olika komplexa rötterna till en homogen, linjär DE med konstanta koefficienter. Låt vidare n_k ($k = 1, \dots, m$) beteckna dessa rötters multipliciteter. Den allmänna reella lösningen är då en summa av termer av formen

$$q_k(t) e^{\gamma_k t}$$

för $k = 1, \dots, l$ samt

$$\begin{aligned} q_k(t) e^{\gamma_k t} \cos \omega_k t \\ r_k(t) e^{\gamma_k t} \sin \omega_k t, \end{aligned}$$

för $k = l + 1, \dots, m$, där $q_k(t)$ och $r_k(t)$ är godtyckliga reella polynom som högst är av graden $n_k - 1$.

Bevis. Låt $x(t)$ vara en godtycklig reell lösning. Då är $x(t)$ en komplex lösning (som råkar vara reell) och kan därför enligt Teorem 3.3 skrivas

$$x(t) = \sum_{k=1}^m p_k(t) e^{\lambda_k t}$$

för lämpliga komplexa polynom $p_k(t)$, $k = 1, \dots, m$. Genom att för $k = 1, \dots, m$ sätta $p_k(t) = q_k(t) + ir_k(t)$ fås, eftersom den imaginära delen är noll,

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^l (q_k(t) + ir_k(t)) e^{\gamma_k t} + \sum_{k=l+1}^m (q_k(t) + ir_k(t)) e^{\gamma_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t) \\ &= \sum_{k=1}^l q_k(t) e^{\gamma_k t} + \sum_{k=l+1}^m (q_k(t) e^{\gamma_k t} \cos \omega_k t - r_k(t) e^{\gamma_k t} \sin \omega_k t) . \diamond \end{aligned}$$

Exempel 3.4. Den DE $x^{(4)} - 2x''' + 2x'' - 2x' + x = 0$, som vi betraktade i exempel 3.3, har den allmänna reella lösningen

$$x(t) = (C_1 t + C_2) e^t + C_3 \cos t + C_4 \sin t,$$

där $C_i \in \mathbf{R}$ för $i = 1, \dots, 4$, eftersom $\lambda = 1$ är en dubbel rot och $\lambda = \pm i$ är enkla rötter till den karakteristiska ekvationen.

Inhomogena ekvationer

Precis som för linjära DE:r av första ordningen gäller följande:

Sats 3.4. *Antag att $x_p(t)$ är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen $L(D)x(t) = b(t)$ samt att $x_h(t)$ är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $L(D)x(t) = 0$. Då är $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen.*

Bevis. Alla funktioner av det angivna slaget är lösningar, ty $L(D)x(t) = L(D)x_h(t) + L(D)x_p(t) = L(D)x_p(t) = b(t)$. Antag omvänt att $x(t)$ är en godtycklig lösning till $L(D)x(t) = b(t)$. Då är

$$L(D)(x(t) - x_p(t)) = L(D)x(t) - L(D)x_p(t) = b(t) - b(t) \equiv 0,$$

dvs. $x(t) - x_p(t)$ är likamed $x_h(t)$ (för ett lämpligt val av de konstanter som ingår i $x_h(t)$). Alltså är $x(t)$ av formen $x_h(t) + x_p(t)$. $\diamond$

Lösningsmetoder

1. Ansats med obestämda koefficienter. Metoden introduceras bäst genom några exempel:

Exempel 3.5. Den linjära DE:n $x'' + x = t^2 + t$ har ett kvadratisk polynom som högerled. Det finns då en partikulärlösning som också är ett andragradspolynom. Vi gör därför ansatsen $x(t) = At^2 + Bt + C$ och bestämmer koefficienterna A , B och C genom insättning. Insättning av $x(t)$ och

$$\begin{aligned} x' &= 2At + B \\ x'' &= 2A, \end{aligned}$$

i DE:n ger att $2A + At^2 + Bt + C \equiv t^2 + t$. Denna identitet gäller om och endast om koefficienterna i de bägge leden är lika:

$$\begin{cases} 2A + C = 0 \\ A = 1 \\ B = 1. \end{cases}$$

Polynomet $x(t) = t^2 + t - 2$ är alltså en partikulärlösning.

Märk! Då man söker en partikulärlösning kan man ha nytta av följande uppenbara *superpositionsprincip*: Om

$$\begin{aligned} L(D)x_1(t) &= b_1(t) \\ L(D)x_2(t) &= b_2(t) \\ &\quad \text{---} \\ L(D)x_m(t) &= b_m(t), \end{aligned}$$

så är $x(t) = x_1(t) + \cdots + x_m(t)$ en lösning till DE:n

$$L(D)x(t) = b_1(t) + \cdots + b_m(t).$$

Om högerledet är av formen $ae^{\lambda_0 t}$, där λ_0 inte är en lösning till den karakteristiska ekvationen, så finns det alltid en partikulärlösning av formen $x(t) = Ae^{\lambda_0 t}$. Insättning i $L(D)x = ae^{\lambda_0 t}$ ger nämligen då att $AL(\lambda_0)e^{\lambda_0 t} \equiv ae^{\lambda_0 t}$ bör gälla. För $A = a/L(\lambda_0)$ har vi alltså en lösning. Ansatsen fungerar i själva verket också om λ_0 och koefficienterna i DE:n är komplexa tal. På grund av detta kan vi också behandla de fall då högerledet innehåller en eller flera termer av formen $ae^{\gamma t} \cos \omega t$ eller $ae^{\gamma t} \sin \omega t$ på ett liknande sätt. Om $\lambda_0 = \gamma + i\omega$, är nämligen t.ex.

$$e^{\gamma t} \cos \omega t = \frac{1}{2} \left(e^{\lambda_0 t} + e^{\overline{\lambda_0} t} \right).$$

Enligt superpositionsprincipen kan vi därför (om $L(\lambda_0) \neq 0$) finna en partikulärlösning av formen $Ae^{\lambda_0 t} + Be^{\overline{\lambda_0} t}$, vilket också kan skrivas $\overline{A}e^{\gamma t} \cos \omega t + \overline{B}e^{\gamma t} \sin \omega t$.

Exempel 3.6. Betrakta DE:n $x'' + x' + x = e^{-t} \cos 2t$. Talet $-1 + 2i$ är inte en komplex rot till den karakteristiska ekvationen. Vi kan därför göra ansatsen

$$x(t) = Ae^{-t} \cos 2t + Be^{-t} \sin 2t.$$

Insättning av derivatorna

$$\begin{aligned} x'(t) &= (2B - A)e^{-t} \cos 2t - (2A + B)e^{-t} \sin 2t, \\ x''(t) &= (-3A - 4B)e^{-t} \cos 2t + (4A - 3B)e^{-t} \sin 2t \end{aligned}$$

i DE:n ger identiteten

$$(-3A - 2B)e^{-t} \cos 2t + (2A - 3B)e^{-t} \sin 2t \equiv e^{-t} \cos 2t,$$

vilken är uppfylld om och endast om

$$\begin{cases} -3A - 2B = 1 \\ 2A - 3B = 0. \end{cases}$$

Ekvationssystemet har lösningen $A = -3/13$, $B = -2/13$. Således är

$$x(t) = -\frac{1}{13}e^{-t} (3 \cos 2t + 2 \sin 2t),$$

en partikulärlösning.

I tabellen nedan sammanfattar vi de viktigaste ansatserna då man skall lösa den inhomogena ekvationen (2) för olika högerled $b(t)$. I den första kolumnen betecknar $p_m(t)$ ett givet polynom av graden m och i kolumnen med ansatser betecknar $P_m(t)$ och $Q_m(t)$ polynom av graden m med obestämda koefficienter:

Högerled

Ansats

$p_m(t)$	$P_m(t)$, om $L(0) \neq 0$; $t^k P_m(t)$, om 0 är ett k -faldigt nollställe till L .
$p_m(t)e^{\gamma t}$	$P_m(t)e^{\gamma t}$, om $L(\gamma) \neq 0$; $t^k P_m(t)e^{\gamma t}$, om γ är ett k -faldigt nollställe till L .
$p_m(t) \cos \omega t$ eller $p_m(t) \sin \omega t$	$P_m(t) \cos \omega t + Q_m(t) \sin \omega t$, om $L(i\omega) \neq 0$; $t^k [P_m(t) \cos \omega t + Q_m(t) \sin \omega t]$, om $i\omega$ är ett k -faldigt nollställe till L .
$p_m(t)e^{\gamma t} \cos \omega t$ eller $p_m(t)e^{\gamma t} \sin \omega t$	$[P_m(t) \cos \omega t + Q_m(t) \sin \omega t]e^{\gamma t}$, om $L(\gamma + i\omega) \neq 0$; $t^k [P_m(t) \cos \omega t + Q_m(t) \sin \omega t]e^{\gamma t}$, om $\gamma + i\omega$ är ett k -faldigt nollställe till L .

2. Lösning med hjälp av förskjutningsregeln. Med hjälp av precis den metod, som vi använde i exempel 3.1 och i beviset av Teorem 3.3, kan vi lösa en godtycklig inhomogen ekvation

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_n)x = b(t),$$

där rötterna λ_i , $i = 1, \dots, n$, till den karakteristiska ekvationen kan vara lika eller olika. Vi betraktar ett par exempel:

Exempel 3.7. DE:n $x'' - x = 2e^t/(e^t - 1)$ kan skrivas

$$(D - 1)(D + 1)x = \frac{2e^t}{e^t - 1}.$$

Genom att multiplicera med e^{-t} kan vi med hjälp av förskjutningsregeln och en integration "invertera" operatoren $D - 1$. Vi får:

$$(3) \quad (D + 1)x = e^t \int^t \frac{2ds}{e^s - 1} = 2e^t \ln |1 - e^{-t}|,$$

där vi inte behöver addera till någon integrationskonstant, eftersom vi bara behöver finna en partikulärlösning. (Om man vid varje integration lägger till en integrationskonstant, så får man som slutresultat den allmänna lösningen.) Då man på samma sätt multiplicerar (3) med e^t , och använder förskjutningsregeln för att invertera $D + 1$, fås efter lite längre kalkyler partikulärlösningen

$$x(t) = (e^t - e^{-t}) \ln |1 - e^{-t}| - te^{-t} - 1.$$

Strängt taget representerar detta uttryck två partikulärlösningar, en för $t < 0$ och en för $t > 0$.

Exempel 3.8. I stället för att lösa en ekvation som

$$(4) \quad x'' + x = \cos t,$$

kan man bestämma de komplexa lösningarna till ekvationen

$$(5) \quad x'' + x = e^{it}.$$

Eftersom $\cos t = \operatorname{Re}(e^{it})$, så är den reella delen av varje lösning till (5) en lösning till (4). Det är lätt att inse att varje lösning till (4) kan fås på detta sätt som den reella delen av en lösning till (5). Genom att tillämpa förskjutningsregeln två gånger på

$$(D - i)(D + i)x = e^{it},$$

vilket är en omskrivning av (5), finner man (t.ex.) partikulärlösningen $x(t) = -\frac{i}{2}te^{it} + \frac{1}{4}e^{it}$. Den reella delen av denna, dvs.

$$x(t) = \frac{1}{4}\cos t + \frac{t}{2}\sin t$$

är alltså en partikulärlösning till (4).

3. Konstanternas variation. Vi använde metoden med konstantens variation då vi bestämde en partikulärlösning till en linjär DE av första ordningen. Samma metod fungerar också för DE:n av högre ordning:

Exempel 3.9. För att lösa DE:n

$$x'' - x = \sin t$$

skriver man först ut den allmänna lösningen $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$ till motsvarande homogena ekvation. Därefter görs en ansats av formen

$$x(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t},$$

där konstanterna ersatts med funktioner av t . Derivering ger

$$x'(t) = (C_1'e^t + C_2'e^{-t}) + (C_1e^t - C_2e^{-t}).$$

För att inte förlora översikten vid nästa derivering, *kräver* vi redan nu att funktionerna C_1 och C_2 skall vara sådana att

$$C_1'e^t + C_2'e^{-t} = 0.$$

Då är $x'(t) = C_1e^t - C_2e^{-t}$. Ytterligare en derivering ger att

$$x''(t) = (C_1'e^t - C_2'e^{-t}) + (C_1e^t + C_2e^{-t})$$

och därmed är $x'' - x = C_1'e^t - C_2'e^{-t}$. Ansatsen $x(t)$ är alltså en lösning till den givna DE:n om högerledet är likamed $\sin t$. Av funktionerna C_1 och C_2 bör vi således kräva att ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_1'e^t + C_2'e^{-t} = 0 \\ C_1'e^t - C_2'e^{-t} = \sin t, \end{cases}$$

är satisfierat. Genom att ur detta lösa derivatorna C_1' och C_2' och därefter integrera, ser vi att om vi i ansatsen väljer

$$C_1(t) = \frac{1}{2} \int^t e^{-u} \sin u \, du \quad \text{och} \quad C_2(t) = -\frac{1}{2} \int^t e^u \sin u \, du,$$

så har vi en partikulärlösning till den ursprungliga DE:n. Dessa integraler kan beräknas genom partiell integration.

Allmänt kan metoden med konstanternas variation beskrivas på följande sätt:

1. Utgå från den allmänna lösningen $x(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$ till den homogena ekvation som svarar mot (2).
2. Gör ansatsen $x(t) = C_1(t)x_1(t) + \dots + C_n(t)x_n(t)$ för att hitta en partikulärlösning till (2).
3. För att bestämma koefficientfunktionerna $C_1(t), \dots, C_n(t)$ bildar man successivt derivatorna $x'(t), \dots, x^{(n)}(t)$, som sedan insätts i (2). Vid de $n - 1$ första deriveringarna lägger man varje gång till ett nytt villkor på koefficientfunktionerna: Eftersom

$$x'(t) = (C_1'(t)x_1(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t)) + (C_1(t)x_1'(t) + \dots + C_n(t)x_n'(t)),$$

kräver vi att den första parentesen är noll och då är ju $x' = C_1 x_1' + \dots + C_n x_n'$. Vid nästa derivering kräver vi att $C_1' x_1' + \dots + C_n' x_n' = 0$, så att $x'' = C_1 x_1'' + \dots + C_n x_n''$ osv. Efter den sista deriveringen sätts uttrycken för alla derivator in i DE (2), vilken kommer att vara satisfierad om och endast om (genomför kalkylerna!)

$$C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = b(t).$$

Koefficientfunktionerna skall alltså väljas så att ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcl} C_1' x_1 & + \dots + C_n' x_n & = 0 \\ C_1' x_1' & + \dots + C_n' x_n' & = 0 \\ \text{---} & & \text{---} \\ C_1' x_1^{(n-2)} & + \dots + C_n' x_n^{(n-2)} & = 0 \\ C_1' x_1^{(n-1)} & + \dots + C_n' x_n^{(n-1)} & = b \end{array}$$

är satisfierat.

4. Lös $C_1', \dots, C_n'$ ur ovanstående linjära ekvationssystem, som alltid har en entydig lösning enligt teori som utvecklas senare. Koefficientfunktionerna $C_1(t), \dots, C_n(t)$ fås därefter genom integration.

Harmoniska oscillatorn

Bakgrund: A) Antag att en kropp med massan m som rör sig på x -axeln dras mot origo med en kraft $-kx$ ($k > 0$). Antag vidare att rörelsen dämpas av en kraft $-cx'$

($c \geq 0$) som är proportionell mot hastigheten samt att kroppen dessutom påverkas av en tidsberoende "yttre" kraft $F(t)$. Kroppens rörelse kommer då att beskrivas av DE:n

$$mx'' = -kx - cx' + F(t).$$

B) I en elektrisk svängningskrets, bestående av en enkel slinga, ingår en spole med induktansen L , en kondensator med kapacitansen C samt ett motstånd på R ohm. Vidare antar vi att en tidsberoende "yttre" elektromotorisk kraft $E(t)$ är inkopplad. Om strömstyrkan vid en given tidpunkt t är I och laddningen i kondensatorn är Q , så är

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t), \quad I = \frac{dQ}{dt},$$

dvs. kretsen beskrivs av DE:n

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}E'(t).$$

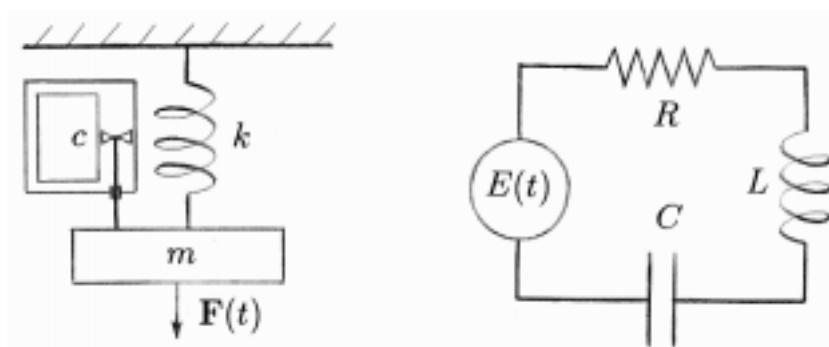


fig. 1

I bägge exempelfallen erhåller vi en DE av formen

$$x'' + ax' + bx = f(t), \quad a \geq 0 \text{ och } b > 0,$$

där termen ax' representerar en dämpning, dvs. ett motstånd mot kroppens rörelse i (fall A)) eller ett motstånd mot den elektriska strömmen (fall B)).

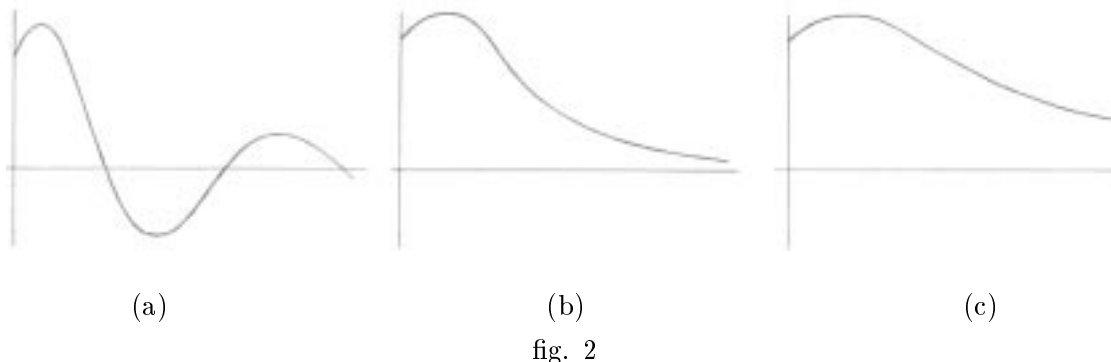
Antag först att $f(t) \equiv 0$. Olika typer av svängningar hos oscillatoren kan klassificeras med hjälp av rötterna till den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

1) *Icke-reella rötter* ($a^2 < 4b$): Den karakteristiska ekvationen har rötterna $\lambda = -\gamma \pm i\omega_0$, där $\gamma = a/2$ och $\omega_0 = \sqrt{4b - a^2}/2$, varför den allmänna lösningen blir

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t + C_2 e^{-\gamma t} \sin \omega_0 t.$$

Om vi sätter $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ och väljer ϕ så att $\cos \phi = C_1/C$ och $\sin \phi = C_2/C$, så antar $x(t)$ formen

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t - \phi),$$



där C och ϕ nu är godtyckliga konstanter. Oscillatorn utför i detta fall en *dämpad harmonisk svängning* (fig. 2 (a)).

2) *Dubbelrot* ($a^2 = 4b$): I detta fall är $\lambda = -\gamma$. Den allmänna lösningen är

$$x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\gamma t}.$$

Dämpningen sägs nu vara *kritisk* därför att den är just så stark att den kan förhindra svängningar. Detta är det *aperiodiska gränsfallet* (fig. 2 (b)), som ligger mellan fall 1) ovan och fall 3), som vi strax kommer till:

3) *Olika reella rötter* ($a^2 > 4b$): Om vi betecknar de reella rötterna med $-\gamma_1$ och $-\gamma_2$ så är den allmänna lösningen

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}.$$

Detta fall kallas det *aperiodiska fallet*. Dämpningen är mer än väl så kraftig att den förhindrar svängningar (fig. 2 (c)).

Man säger att fallen 1) och 3) är *strukturellt stabila* eller *generiska* därför att en liten störning av systemet (dvs. en liten ändring av DE:s koefficienter) inte leder till någon kvalitativ ändring av svängningstyp: En liten störning av t.ex. en dämpad harmonisk svängning (typ 1)) resulterar i en ny (något förändrad) dämpad harmonisk svängning.

Resonans. Låt oss använda det fall då $f(t) \not\equiv 0$, dvs. då en yttre "kraft" är inkopplad, till att förklara begreppet *resonans*. Antag att $f(t) = e \cos \omega t$ ($e > 0$) samt antag att $a = 0$ medan $b > 0$. Vi har då DE:n

$$x'' + bx = e \cos \omega t.$$

Den karakteristiska ekvationen har rent imaginära rötter, varför lösningarna till den homogena DE:n representerar en harmonisk svängning med frekvensen $\omega_0 = \sqrt{b}$ utan dämpning.

a) Antag att $\omega \neq \omega_0$. För att få fram en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen provar vi ansatsen $x(t) = A \cos \omega t$, varvid det visar sig att värdet

$$A = \frac{e}{b - \omega^2} = \frac{e}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ger en lösning. Den allmänna lösningen

$$(6) \quad x(t) = C \cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{e}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

består alltså av en *superposition* (dvs. överlagring) av två svängningar: en svängning med den s.k. *egenfrekvensen* ω_0 samt en svängning med den påtvungna frekvensen ω . Vi ser att om vi låter ω närma sig ω_0 i (6), så kommer amplituden hos den påtvungna svängningskomponenten att närma sig oändligheten.

b) Antag att $\omega = \omega_0$. Vi prövar ansatsen $x(t) = At \sin \omega_0 t$ och finner att värdet $A = e/2\omega_0$ ger en partikulärlösning. Den allmänna lösningen är då

$$(7) \quad x(t) = C \cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{e}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

Amplituden hos den andra svängningskomponenten växer alltså linjärt i tiden mot oändligheten. Man säger i detta fall att egensvängningen och den påtvungna svängningen är i *resonans*. Vi såg redan att man inte får fram lösningen (7) genom att man i (6) direkt låter ω gå mot ω_0 om C hålls oförändrad. Vi skall visa att partikulärlösningen $(e/2\omega_0)t \sin \omega_0 t$ i (7) däremot nog kan erhållas som ett gränsvärde av lösningar av formen (6) om man låter koefficienten C i (6) bero av ω på ett lämpligt sätt: Vi betraktar lösningen

$$x_\omega(t) = \frac{e}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) = -\frac{e}{\omega_0 + \omega} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega - \omega_0},$$

som är av formen (6), samt låter $\omega \rightarrow \omega_0$. Definitionen på derivata ger då att gränsvärdet blir

$$-\frac{e}{2\omega_0} \frac{d}{d\omega} (\cos \omega t)_{\omega=\omega_0} = \frac{e}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

Genom att lägga till termen $C \cos(\omega_0 t - \phi)$ fås generellt att varje lösning av typ (7) är ett gränsvärde av lösningar av typ (6).

Lösning med hjälp av Fourierserier

Antag nu att $a > 0$ och $b > 0$ och att vi har en dämpad harmonisk svängning, så att den homogena ekvationen $x'' + ax' + bx = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t - \phi)$, där $\gamma > 0$. Läger man till ett högerled, t.ex. $f(t) = e \sin \omega t$, så får man fram en partikulärlösning genom att göra ansatsen $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, eftersom $i\omega$ nu inte är en rot till den karakteristiska ekvationen:

$$x(t) = e \frac{-a\omega \cos \omega t + (b - \omega^2) \sin \omega t}{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}.$$

För ett visst värde på ω är amplituden hos denna lösning maximal på grund av resonans (se uppgift 8).

Om högerledet $f(t)$ är en godtycklig periodisk funktion, som kan utvecklas i Fourierserie

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\omega(t - t_0) + \beta_n \sin n\omega(t - t_0)),$$

så fås en lösning enligt (en generaliserad variant av) superpositionsprincipen så, att man för varje term i serieutvecklingen av $f(t)$ bestämmer en motsvarande partikulärlösning och adderar ihop dessa till en oändlig serie. Om denna är konvergent och seriens summa två gånger kontinuerligt deriverbar, så är summan en partikulärlösning till $x'' + ax' + bx = f(t)$.

Eulers ekvation

Ekvationer av Eulers typ, dvs. ekvationer av formen

$$(8) \quad t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 t x' + a_0 x = b(t),$$

är inte linjära ekvationer med konstanta koefficienter, men de kan lätt överföras på sådana med hjälp av en variabeltransformation. För $t > 0$ sätter man $t = e^s$ (för $t < 0$ sätts $t = -e^s$), varvid $s = \ln t$ och för derivatorna med avseende på t och s gäller att $x'_t = \frac{1}{t} x'_s$. Fortsatt derivering ger att

$$x''_t = -\frac{1}{t^2} x'_s + \frac{1}{t} x''_s \frac{ds}{dt} = (D_s^2 x - D_s x) \cdot \frac{1}{t^2} = D_s(D_s - 1)x \cdot \frac{1}{t^2}$$

och allmänt (genom induktion) att

$$x_t^{(k)} = D_s(D_s - 1) \cdots (D_s - k + 1)x \cdot \frac{1}{t^k}.$$

Genom variabeltransformationen får vi därmed en linjär ekvation med konstanta koefficienter

$$(9) \quad [a_0 + a_1 D_s + a_2 D_s(D_s - 1) + \cdots + D_s(D_s - 1) \cdots (D_s - n + 1)] x = b(e^s),$$

vilken har den karakteristiska ekvationen

$$(10) \quad a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda(\lambda - 1) + \cdots + \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) = 0.$$

Enligt Teorem 3.3 fås lösningarna till den homogena Eulerekvationen på följande sätt:

Sats 3.5. Om $b(t) \equiv 0$ samt om $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ är de olika rötterna till (10) och dessa har multipliciteterna $n_1, \dots, n_m$, har den allmänna komplexa lösningen till (8) formen

$$x(t) = \sum_{k=1}^m p_k(\ln t) t^{\lambda_k} \quad (t > 0),$$

där $p_k(\cdot)$ är ett godtyckligt polynom som högst är av graden $n_k - 1$.

Bevis. Den allmänna lösningen till (9) är av formen $x(s) = \sum p_k(s) e^{\lambda_k s}$, men $e^{\lambda_k \ln t} = (e^{\ln t})^{\lambda_k} = t^{\lambda_k}$. Detta ger satsens påstående. $\diamond$

Exempel 3.9. Då man sätter $s = \ln t$ i DE:n $t^2 x'' - 2t x' + 2x = \ln t$, $t > 0$, fås

$$(D_s(D_s - 1) - 2D_s + 2)x = s.$$

Den karakteristiska ekvationen $\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = 0$ har lösningarna $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$, varför den homogena ekvationen enligt satsen har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 t + C_2 t^2$. För att hitta en partikulärlösning gör vi ansatsen $x(s) = As + B$ i den transformerade ekvationen och finner att värdena $A = \frac{1}{2}$ och $B = \frac{3}{4}$ svarar mot en lösning. Den allmänna (komplexa eller reella) lösningen till den ursprungliga ekvationen är således

$$x(t) = C_1 t + C_2 t^2 + \frac{1}{2} \ln t + \frac{3}{4}.$$

Märk, att om den ursprungliga DE:n är reell men någon exponent är komplex, så är lösningen i Sats 3.5 komplex även om polynomen p_k väljs reella. Reella lösningar fås fram genom att man bildar reella och imaginära delar som i följande exempel (jfr. Korollarium 3.1):

Exempel 3.10. DE:n $t^2 x'' - tx' + 2x = 0$, $t > 0$, övergår i ekvationen $(D_s(D_s - 1) - D_s + 2)x = 0$ då man sätter $s = \ln t$. Den karakteristiska ekvationen $\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 2 = 0$ har rötterna $\lambda = 1 \pm i$. Den allmänna komplexa lösningen är således $x(t) = C_1 t^{1+i} + C_2 t^{1-i}$. Men

$$\begin{aligned} t^{1+i} &= t \cdot t^i = t \cdot e^{i \ln t} = t(\cos \ln t + i \sin \ln t) \\ t^{1-i} &= t \cdot t^{-i} = t \cdot e^{-i \ln t} = t(\cos \ln t - i \sin \ln t). \end{aligned}$$

De reella och imaginära delarna är $t \cos \ln t$ och $t \sin \ln t$ och den allmänna reella lösningen blir $x(t) = t(C_1 \cos \ln t + C_2 \sin \ln t)$, där C_1 och C_2 nu är godtyckliga reella tal.

Historiska notiser. Grunden till teorin för DE:r med konstanta koefficienter lades av Leonhard Euler (1707–83) och Joseph-Louis Lagrange (1736–1813). Metoden med konstantens variation härstammar från Lagrange. I ett brev till Johann Bernoulli år 1740 löser Euler DE:r av den typ som senare uppkallats efter honom. Av Bernoullis svar framgår emellertid att han redan omkring år 1700 kunde lösa sådana ekvationer fullständigt.

Övninguppgifter

- Bestäm den allmänna lösningen till DE:n $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t + 2$.
- Lös begynnelsevärdesproblemen
 - $x'' + 2x' + x = te^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;
 - $(D^3 + 2D^2 - 7D + 4)x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.
- Lös Eulerekvationen $t^2 x'' - 4tx' + 6x = 0$, $t > 0$.
- Bestäm den allmänna lösningen till DE:na
 - $x'' + x = \sin t + e^{2t}$,
 - $t^2 x'' - 3tx' + 4x = \ln t$.
- Lös DE:na
 - $x''' + 5x'' + 19x' - 25x = 0$,

b) $x''' + 3x'' - 4x = 2 - 4t^2$.

6. Antag att ett hål borrar genom jordens mitt (längs en diameter) och att en kropp med massan m släpps i hålet. Låt r beteckna kroppens avstånd från jordens medelpunkt. Man kan visa att gravitationskraften under fallet är proportionell mot r och att man därför kan beskriva kroppens rörelse med hjälp av DE:n $r'' + \omega^2 r = 0$, där $\omega^2 = g/R$, varvid g är tyngkraftens acceleration vid jordytan och R är jordens radie (luftmotstånd och dylikt försummas). Lös DE:n samt bestäm hur lång tid det tar innan kroppen kommer ut på andra sidan av jordklotet.
7. Ett 20 meter långt rep hålls hängande över en glatt stång så att 8 meter hänger på ena sidan och 12 meter på den andra sidan. Man släpper repet. Hur lång tid tar det för repet att glida av stängen? (Ledn.: $mx'' = F(x)$, där m är repets massa och $F(x)$ är den variabla kraft med vilken gravitationen påverkar repet. Bortse från att repändan kommer att slänga p.g.a. centrifugalkraften.)
8. Härled den lösning till $x'' + ax' + b = e \sin \omega t$, som nämns i avsnittet om lösning med hjälp av Fourierserier. Bestäm det värde på ω för vilket lösningens amplitud är maximal.
9. Systemet

$$\begin{cases} x_1'' + x_1 = \varepsilon(x_2 - x_1) \\ x_2'' + x_2 = \varepsilon(x_1 - x_2) \end{cases}$$

beskriver approximativt små svängningar hos två identiska pendlar förbundna med en fjäder. Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $x_1(0) = \alpha$, $x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0$. (Ledn.: Inför nya obekanta $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$.)

10. Bestäm talen A och a så att DE:n $x'' + 2(1-t)x' + t(t-2)x = 0$ efter substitutionen $x = \exp(At^a)u$ övergår i en ekvation med konstanta koefficienter.
11. Sök den lösning till DE:n $x'' + x' - 2x = 1$ som är noll för $t = 0$ och som har ett ändligt gränsvärde då $t \rightarrow +\infty$.
12. På en skidlöpare som åker utför en backe med lutningen α verkar följande krafter: friktionskraften $-\mu mg \cos \alpha$ ($\mu > 0$), tyngdkraftens komponent i färdriktningen $mg \sin \alpha$ och luftmotståndet $-cx'(t)$ (som alltså antas vara proportionellt mot hastigheten $x'(t)$). Visa att gränshastigheten $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t)$ är en växande funktion av skidlöparens längd d då man antar att $c = \beta d^2$ och att skidlöparens massa $m = \gamma d^3$.
13. Bestäm den allmänna lösningen till DE:n $x'' - x' - 6x = te^{-2t} + \sin t$.
14. Lös DE:na
 - a) $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}(1 + \sin t)$;
 - b) $x'' - 2x' + 2x = t \cos t \cdot \cosh t$.

Allmänna existens- och entydighetssatser

Om vissa förutsättningar är uppfyllda har – som vi kommer att se – ett begynnelsevärdesproblem av formen $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ en entydig lösning. För system av DE:er av första ordningen (se definitionen nedan) bevisar man på samma sätt en motsvarande existens- och entydighetssats för begynnelsevärdesproblem. I slutet av detta avsnitt kommer vi att se att ett begynnelsevärdesproblem för en DE av n :te ordningen kan återföras på ett dylikt begynnelsevärdesproblem för ett system.

Definition 4.1. Ett *system* (i normalform) av n DE:er av första ordningen har det allmänna utseendet

$$(1) \quad \begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

där $f_1, f_2, \dots, f_n$ är givna funktioner. En *lösning* till systemet består av n funktioner $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ som satisfierar alla de n ekvationerna.

Genom att införa vektorvärda funktioner $\mathbf{x}(t)$ och $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, definierade av

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ f_2(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

kan systemet (1) skrivas i den kompakta formen $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Exempel 4.1. En DE av andra ordningen som t.ex. $x'' + t^2 x' + tx = e^t$, återförs på ett ekvationssystem av första ordningen genom att man sätter $x' = y$:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -t^2 y - tx + e^t. \end{cases}$$

Lipschitzvillkor

Ett begynnelsevärdesproblem behöver ingalunda ha bara en lösning. Detta visas av följande exempel:

Exempel 4.2. Problemet $x' = \sqrt[3]{x}$, $x(0) = 0$, har åtminstone lösningen $x(t) \equiv 0$. Eftersom variablerna kan separeras, gäller för varje annan lösning $x(t)$ till DE:n att

$$\frac{3}{2}x(t)^{2/3} = t - C,$$

där t måste vara större eller likamed C , då ju $x(t)^{2/3} \geq 0$. Begynnelsevärdesproblemet har alltså även lösningarna $x(t) = \pm(2t/3)^{3/2}$, men också t.ex. funktionen

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ för } 0 \leq t < 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} (t-1)^{3/2} & , \text{ för } t \geq 1 \end{cases}$$

är en lösning. Det är lätt att se att begynnelsevärdesproblemet i själva verket har oändligt många lösningar (rita figur!).

Vi ställer nu frågorna: *Under vilka förutsättningar har begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, en lösning?* samt: *När är denna lösning entydig?* Vi kommer att se att om $\mathbf{f}$ är kontinuerlig och uppfyller ett s.k. Lipschitzvillkor så räcker detta till för att man både skall kunna påvisa lösningens existens och bevisa dess entydighet.

I $\mathbf{R}^n$ använder vi det vanliga euklidiska avståndet $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = ((x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$ mellan två punkter $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ och $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Definition 4.2. En funktion $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, som är definierad i $\Omega \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ sägs uppfylla ett (globalt) *Lipschitzvillkor* i Ω om det finns ett tal L sådant att

$$(2) \quad |\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

för varje $(t, \mathbf{x})$ och $(t, \mathbf{y})$ i Ω . Funktionen $\mathbf{f}$ sägs uppfylla ett *lokalt Lipschitzvillkor* i Ω om varje punkt i Ω har en omgivning där ett Lipschitzvillkor (2) gäller för någon konstant L .

Om ett globalt Lipschitzvillkor gäller i Ω , så kan samma konstant L användas i hela Ω . Då bara ett lokalt Lipschitzvillkor gäller, så duger samma konstant eventuellt bara i en liten del av Ω . I en annan del av Ω måste kanske ett mycket större värde på L väljas. Ett globalt Lipschitzvillkor innebär därmed ett strängare krav på $\mathbf{f}$ än ett lokalt sådant.

Exempel 4.3. Funktionen $f(t, x) = \sqrt[3]{x}$, som vi använde i föregående exempel, uppfyller varken ett globalt eller ett lokalt Lipschitzvillkor i t.ex. mängden $\Omega = [0, 1] \times \mathbf{R}$. Eftersom

$$f(t, x) - f(t, 0) = x^{1/3} = x^{-2/3}(x - 0)$$

och funktionen $x^{-2/3}$ är obegränsad i närheten av t -axeln kan ingen Lipschitzkonstant L existera. Exempel 3.1 visar därmed att lösningar till ett begynnelsevärdesproblem kan existera även om inget Lipschitzvillkor är uppfyllt.

En delmängd Ω av $\mathbf{R}^n$ är *konvex* om för varje $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ gäller att hela sträckan mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ ligger i Ω .

Lemma 4.1. *Antag att Ω är en begränsad delmängd av $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ sådan att för varje t mängden $\Omega_t = \{\mathbf{x} | (t, \mathbf{x}) \in \Omega\}$ är konvex (om den inte är tom). Antag vidare att funktionen $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ och dess partiella derivator $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}$ är kontinuerliga på det slutna höljet $\bar{\Omega}$ av Ω . Då uppfyller $\mathbf{f}$ ett (globalt) Lipschitzvillkor i Ω .*

Bevis. För tydlighetens skull bevisar vi lemmat först för $n = 1$. Enligt medelvärdessatsen är för varje punktpar (t, x) och (t, y) i Ω

$$f(t, x) - f(t, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi) \cdot (x - y),$$

där ξ är ett tal mellan x och y . Eftersom Ω_t är konvext, så ligger även ξ i Ω_t . Men en kontinuerlig funktion har alltid ett maximalt värde på en sluten begränsad mängd (se någon bok i flerdimensionell analys). Således är

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \max_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi) \right| \cdot |x - y| = L|x - y|.$$

Om $n > 1$ använder vi medelvärdessatsen för funktioner med flera variabler på varje komponentfunktion f_k av $\mathbf{f}$. Enligt denna finns det en punkt ξ_k på sträckan mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ sådan att

$$f_k(t, \mathbf{x}) - f_k(t, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}} f_k(t, \xi) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Låt L_k beteckna det maximala värdet hos $|\nabla_{\mathbf{x}} f_k(t, \mathbf{x})|$ i $\bar{\Omega}$. Då är

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^n L_k |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq L |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

där $L = L_1 + \dots + L_n$. $\diamond$

Existens och entydighet

Beviset för existens och entydighet hos lösningar till begynnelsevärdesproblem är praktiskt taget detsamma för ett system av DE:er som för en enda ekvation. För åskådlighetens skull samt för att undvika vissa satser som hör hemma i den flerdimensionella analysen, nöjer vi oss därför med att bevisa nedanstående sats och Sats 4.3 enbart i det endimensionella fallet.

Sats 4.2. (den globala existens- och entydighetssatsen) *Antag att funktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$ är kontinuerlig och uppfyller ett (globalt) Lipschitzvillkor i $\Omega = [a, b] \times \mathbf{R}^p$. Då har begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \quad t_0 \in [a, b] \end{aligned}$$

en entydig lösning i $[a, b]$.

Bevis. Antag att $p = 1$. Vi konstaterar först att satsens begynnelsevärdesproblem och integralekvationen

$$(3) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

är ekvivalenta (dvs. har samma lösningar).

Existensen. Med hjälp av (3) kan vi konstruera en iterationsformel som successivt ger allt bättre approximativa lösningar (*Picard's iterationsförfarande*): Sätt $I = [a, b]$ och låt funktionen (operatorn) $T : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ vara definierad av högerledet, dvs. sätt $(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$, samt låt $x_0(t) \equiv x_0$ vara den första (mycket dåliga) approximativa lösningen. Sätt sedan $x_{n+1}(t) = (Tx_n)(t)$ för $n = 0, 1, \dots$. Med hjälp av Weierstrass kriterium för likformig konvergens skall vi visa att följden $x_0(t), x_1(t), \dots$ av successiva approximativa lösningar konvergerar likformigt i intervallet I mot en lösning till vårt begynnelsevärdesproblem. Välj talet M så stort att $|f(t, x_0)| \leq M$ för varje $t \in I$ (ett sådant tal finns eftersom en kontinuerlig funktion är begränsad på ett slutet, begränsat intervall). Då är

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_0)| ds \right| \leq M|t - t_0|.$$

Genom induktion skall vi visa att den allmännare formeln

$$(4) \quad |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq ML^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

gäller generellt för alla naturliga tal $n \geq 1$. Om (4) gäller för ett visst värde på n så är

$$\begin{aligned} |x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_{n+1}(s)) - f(s, x_n(s))| ds \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x_{n+1}(s) - x_n(s)| ds \right| \leq \\ &\leq LM \frac{L^n}{(n+1)!} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^{n+1} ds \right| = M \frac{L^{n+1}}{(n+2)!} |t - t_0|^{n+2}, \end{aligned}$$

varför induktion ger att (4) gäller för varje n . Eftersom serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} ML^n \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

är konvergent (det är ju Maclaurinutvecklingen för $ML^{-1}(e^t - 1)$ då $t = L(b-a)$) så konvergerar funktionsserien

$$x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \dots$$

likformigt i I mot en kontinuerlig funktion $x(t)$ enligt Weierstrass kriterium (se någon bok i analys). Seriens partialsummor $x_0(t), x_1(t), \dots$ konvergerar alltså likformigt mot $x(t)$. På grund av att $|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \leq L|x_n(t) - x(t)|$ konvergerar därför $f(t, x_n(t))$ likformigt mot $f(t, x(t))$. Eftersom limes vid likformig konvergens kan flyttas under integraltecknet, satisfierar $x(t)$ integralekvationen (3):

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}(t) = x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, x_n(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

Entydigheten: Låt $x(t)$ och $y(t)$ vara lösningar till (3). Vi kan anta att $L > 0$ (om $L = 0$, sätt $L = 1$). Betrakta ett delintervall $I_0 = [a_0, b_0]$ av I med t_0 som mittpunkt sådant att $b_0 - a_0 < 1/L$ och sätt $m = \max_{I_0} |x(t) - y(t)|$. Då är

$$|x(t) - y(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \right| \leq Lm(b_0 - a_0)$$

för varje $t \in I_0$, dvs. $m \leq Lm|b_0 - a_0|$. Vore nu $m > 0$ så vore $|b_0 - a_0| \geq 1/L$, vilket är en motsägelser. Således är $m = 0$, dvs $x(t) \equiv y(t)$ i I_0 . Skriv nu I som en union av ett ändligt antal delintervall I_k , $k = 0, 1, \dots, m$, vilkas längd är mindre än $1/L$. Låt I_j vara ett av dessa delintervall som dessutom råkar ha ett icke-tomt snitt med I_0 . Genom att ersätta startpunkten t_0 med en annan punkt $t_1 \in I_0 \cap I_j$ (t.ex. a_0 eller b_0) finner vi på samma sätt som ovan att $x(t) \equiv y(t)$ i I_j . Eftersom varje I_k berör ett annat intervall i skaran av delintervall, kan vi med hjälp av detta resonemang sluta oss till att $x(t) \equiv y(t)$ i hela I . $\diamond$

Sats 4.2 kan förbättras till att gälla även öppna och halvöppna (eventuellt obegränsade) intervall:

Korollarium 4.2.1. *Låt t_0 beteckna en punkt i ett godtyckligt intervall I . Antag att funktionen $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ är kontinuerlig och uppfyller ett Lipschitzvillkor i $[a, b] \times \mathbf{R}^n$ för varje begränsat delintervall $[a, b]$ av I . Då har begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, där $t_0 \in I$, en entydig lösning i I .*

Bevis. Enligt Sats 4.2 har begynnelsevärdesproblemet en entydig lösning i $[a, b] \times \mathbf{R}^n$ för varje intervall $[a, b]$ med $t_0 \in [a, b] \subset I$. Med då I ju är unionen av alla sådana intervall $[a, b]$ så existerar en entydig lösning i hela I . $\diamond$

Sats 4.3. (den lokala existens- och entydighetssatsen) *Antag att funktionen $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ är kontinuerlig och uppfyller ett lokalt Lipschitzvillkor i en öppen delmängd Ω av $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. För varje $(t_0, \mathbf{x}_0)$ i Ω existerar då ett öppet intervall I med $t_0 \in I$ och en entydigt bestämd funktion $\mathbf{x}(t)$ som är definierad i I och som är en lösning till begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.*

Anmärkning 1. Det kan vara skäl att poängtera att ett lokalt Lipschitzvillkor gäller i den öppna mängden Ω om $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ och dess partiella derivator är kontinuerliga i Ω . Kring varje punkt $(t_0, \mathbf{x}_0)$ i Ω kan vi nämligen välja en begränsad omgivning Ω' , i vilken förutsättningarna i Lemma 4.1 är uppfyllda (jfr. med beviset nedan).

Bevis. Vi bevisar satsen enbart i fallet $n = 1$ (i det allmänna fallet är beviset likartat). Låt $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ vara godtyckligt. Enligt antagandet finns det en rektangel $R = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ i vilken ett Lipschitzvillkor $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ gäller. Sätt $B = \max_R |f(t, x)|$ samt konstruera en ny rektangel R' som i figuren (om $B > \beta/\alpha$ är R' en ny rektangel, i annat fall är $R' = R$).

Då kommer alla funktionsvärden för de successiva approximationerna $x_0(t)$, $x_1(t)$, $\dots$ i Picards iterationsförfarande att ligga i intervallet $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ då $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Detta är uppenbart för $x_0(t)$. Antag att vi visat att $|x_n(t) - x_0| \leq \beta$ för $|t - t_0| \leq \alpha$. Då är

$$|x_{n+1}(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_n(s))| ds \right| \leq B|t - t_0| \leq B\alpha \leq \beta$$

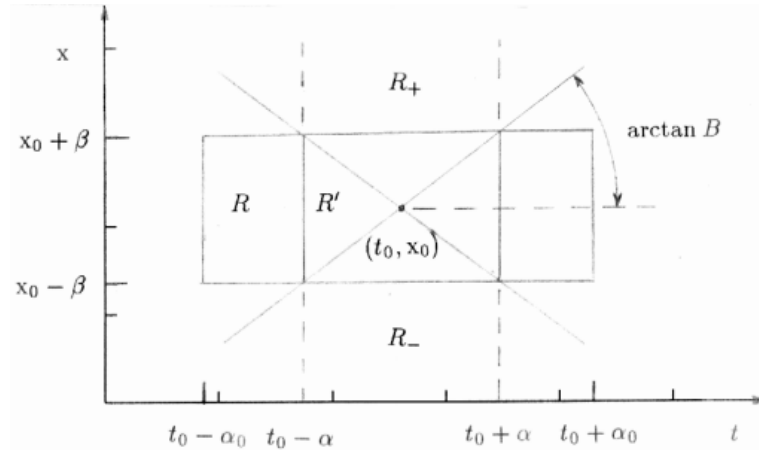


fig. 1

och induktion ger att $|x_n(t) - x_0| \leq \beta$ för $|t - t_0| < \alpha$. Definiera en ny funktion

$$\bar{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, x) & \text{om } (t, x) \in R \\ f(t, x_0 + \beta) & \text{om } (t, x) \in R_+ \\ f(t, x_0 - \beta) & \text{om } (t, x) \in R_- \end{cases}$$

(se fig. 1). Då är $\bar{f}$ kontinuerlig och uppfyller ett globalt Lipschitzvillkor i mängden $R' \cup R_- \cup R_+$. Enligt Sats 4.2 har begynnelsevärdesproblemet $x' = \bar{f}(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, en entydig lösning där. Men denna lösning är just funktionen $\mathbf{x}(t) = \lim_n x_n(t)$, vars graf helt löper i R' . Därför är $\mathbf{x}(t)$ också den (lokala) *entydiga* lösningen till det ursprungliga begynnelsevärdesproblemet. $\diamond$

Den lokala existens- och entydighetssatsen säger att en entydig lösning existerar lokalt, men ingenting om hur långt den i ett givet fall eventuellt kan utsträckas.

Definition 4.3. Antag att I är ett öppet intervall. En lösning $\mathbf{x}(t)$ i I till ett system av DE:r (eller till en DE) är *maximal* om den inte är restriktionen av någon lösning i något större öppet intervall J innehållande I (dvs. om den inte kan fortsättas (som lösning) utanför I).

Vi belyser detta begrepp med hjälp av några exempel:

Exempel 4.4. Funktionen $x(t) = 1/(1 - t^2)$, $t \in]-1, 1[$, är en maximal lösning till DE:n $x' = 2tx^2$. Lösningen kan inte fortsättas eftersom $x(t) \rightarrow +\infty$ då $t \rightarrow \pm 1$.

Exempel 4.5. Funktionen $x(t) = t \ln t$, $t \in]0, +\infty[$, är en maximal lösning till $tx' = x + t$, ty $x'(t) = \ln t + 1 \rightarrow -\infty$ då $t \rightarrow 0^+$ (medan $x(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow 0^+$). Funktionen $x(t) = t \ln(-t)$, $t \in]-\infty, 0[$, är på samma sätt en maximal lösning.

Exempel 4.6. Funktionen $x(t) = \sin(1/t)$, $t \in]0, +\infty[$, är en maximal lösning till $t^2 x' + \cos(1/t) = 0$, ty $x(t)$ har inget gränsvärde då $t \rightarrow 0^+$.

För fullständighetens skull omnämner vi följande sats (beviset utelämnas):

Sats 4.4. (Peanos existenssats) *Om funktionen $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ är kontinuerlig i en omgivning av en punkt $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, så har begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

en lösning i någon omgivning av t_0 .

Anmärkning 2. Enligt Sats 4.4 är det alltså kontinuiteten hos funktionen $\mathbf{f}$ i begynnelsevärdesproblemet som garanterar existensen av en lösning medan Lipschitzvillkoret (i Sats 4.2 och 4.3) medför entydighet. Men i vissa fall kan en lösning vara entydig även om inget Lipschitzvillkor gäller (se uppg. 7) och en lösning kan existera och vara entydig till och med om $\mathbf{f}$ är diskontinuerlig (se uppg. 8).

Ekvationer av högre ordning

En DE

$$(6) \quad x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

av ordningen n kan överföras på ett system av n DE:r genom att man sätter $x_1 = x$, $x_2 = x'_1$, $\dots$, $x_{n-1} = x'_{n-2}$ och $x_n = x'_{n-1}$. Då är

$$(7) \quad \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \dots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Det är klart att varje lösning till (6) ger en lösning till (7) och omvänt. Korollarium 4.2.1 och Sats 4.3 genererar därför existens- och entydighetssatser för DE:r av n :te ordningen:

Sats 4.5. *Låt I vara ett intervall och antag att $t_0 \in I$. Om funktionen $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig och uppfyller ett Lipschitzvillkor i $I_1 \times \mathbf{R}^n$ för varje slutet begränsat delintervall I_1 av I (resp. uppfyller ett Lipschitzvillkor i en omgivning av $(t_0, \mathbf{x}_0)$), så har begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) &= x_{01} \\ x'(t_0) &= x_{02} \\ &\quad - \quad - \quad - \\ x^{(n-1)}(t_0) &= x_{0n} \end{aligned}$$

$(\mathbf{x}_0 = (x_{01} \dots x_{0n})^T)$ en entydig lösning i I (resp. i någon omgivning av t_0).

Bevis. Högra ledet i (7), dvs. funktionen $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = (x_2, x_3, \dots, f(t, \mathbf{x}))^T \in \mathbf{R}^n$, uppfyller ett Lipschitzvillkor i $I_1 \times \mathbf{R}^n$ (eller i en omgivning av $(t_0, \mathbf{x}_0)$), ty om $|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ så är

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{y})| &\leq |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| + |f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| \\ &\leq (L + (n-1))|\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \diamond \end{aligned}$$

Historiska notiser. En existens- och entydighetssats för begynnelsevärdesproblemet $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ bevisades år 1824 av Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) under antagandet att f och f'_x är kontinuerliga i någon lämplig rektangel. Lösningen konstruerades som gränsvärdet av en oändlig följd av polygondrag. Kravet att derivatan f'_x skall vara kontinuerlig, lindrades år 1876 av Rudolf Lipschitz (1832–1903) med hjälp av det som nu kallas Lipschitzvillkor. Den metod med successiva approximationer, som vi använt i beviset av Sats 4.2, uppfanns år 1890 av Émile Picard (1856–1941) i beviset för en formulering av existenssatsen, som är lite generellare än vår. Denna formulering förbättrades väsentligt år 1894 av finländaren Ernst Lindelöf (1870–1946), som samtidigt också gav ett entydighetsbevis. Giuseppe Peano (1858–1932) publicerade sin existenssats redan år 1886 i ett banbrytande arbete. Han visade mer än det som Sats 4.4 anger, nämligen att det existerar lösningar x_1 och x_2 till begynnelsevärdesproblemet, sådana att för varje annan lösning x gäller att $x_1 \leq x \leq x_2$. Dessutom visade han att $x_1 = x_2$, om f'_x existerar och är begränsad. År 1890 utvidgade Peano sitt existensbevis till att gälla system av DE:r.

Övningsuppgifter

- Vilka av följande funktioner uppfyller ett lokalt eller ett globalt Lipschitzvillkor i hela tx -planet: a) tx , b) $x \sin t$, c) $\sqrt{|x|} \sin t$, d) $\sin t \cdot \sin x$.
- Undersök om $f(t, x)$ uppfyller ett Lipschitzvillkor i $[0, 1] \times [0, 1]$ om
 - $f(t, x) = t^2 + x^2$,
 - $f(t, x) = \sin t \cdot \cos x$,
 - $f(t, x) = |t - x|$,
 - $f(t, x) = |x|^\alpha$, ($\alpha > 0$).
- Visa att följande begynnelsevärdesproblem har precis en (lokal) lösning samt bestäm denna lösning:
 - $x' = e^{t^2 x} - 1$, $x(0) = 0$,
 - $x' = 1 + \sin(tx - t^2)$, $x(0) = 0$.
- Reducera DE:n $x''' + x^2 = 1$ till ett system av DE:r av 1:a ordningen och bestäm ett naturligt definierat område Ω där högerledet uppfyller ett Lipschitzvillkor.
- För vilka tal $\alpha > 0$ har problemet $x' = |x|^\alpha$, $x(0) = 0$, en entydig lösning?
- Visa att lösningen till problemet $x' = \sin t + \ln(1 + x^2)$, $x(0) = 0$, är definierad på hela reella axeln.
- Visa att funktionen

$$f(t, x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\ln|x|} & , \text{ om } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ om } x = 0 \end{cases}$$

inte uppfyller något Lipschitzvillkor i någon som helst omgivning av $(0, 0)$, samt visa att begynnelsevärdesproblemet $x' = f(t, x)$, $x(0) = 0$, trots det har en entydig lokal lösning (dvs. varje lösning är en restriktion av samma maximala lösning).

- Visa att begynnelsevärdesproblemet $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, har en entydig lösning $x(t)$ för varje (t_0, x_0) då f är den diskontinuerliga funktionen

$$f(t, x) = \begin{cases} x & , \text{ om } x = e^t. \\ 0 & , \text{ om } x \neq e^t. \end{cases}$$

- Låt funktionen $f(x)$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\ln|x|} & , \text{ för } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ för } x = 0. \end{cases}$$

Visa att begynnelsevärdesproblemet $x' = f(x)$, $x(0) = 0$, har oändligt många lösningar i $\mathcal{C}^1(]-a, a[)$ för varje $a > 0$, medan det har en entydig lösning i $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ (problemet har alltså många lokala lösningar men en entydig global lösning på $\mathbf{R}$).

10. Visa först att högra ledet i systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = xy \end{cases}$$

uppfyller ett Lipschitzvillkor i $\mathbf{R} \times [-n, n]^2$ för varje naturligt tal n . Bestäm därefter den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $x(0) = 1$, $y(0) = 1/2$.

System av linjära differentialekvationer

Ett *linjärt* system av DE:r har den allmänna formen

$$(1) \quad \mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

där

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ - & - & \cdots & - \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

är givna. I fortsättningen skall vi alltid anta att $A(t)$ och $\mathbf{b}(t)$ är kontinuerliga funktioner av t i något intervall I . (Detta innebär precis detsamma som att anta att dessa matrisers element är kontinuerliga funktioner i I .) Systemet sägs vara *homogent* om $\mathbf{b}(t) \equiv 0$ i I . I motsatt fall sägs det vara *inhomogent*.

Linjära system, som innehåller bara några få likheter, kan ibland lösas med elementära metoder:

Exempel 5.1. Det homogena systemet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

kan också skrivas

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$$

Då är $x'' = 3x' - 2y' = 9x - 6y - 4x + 4y = 5x - 2y$. Genom att från denna likhet subtrahera $x' = 3x - 2y$, fås en homogen linjär DE med konstanta koefficienter, $x'' - x' - 2x = 0$, som har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$. Eftersom $y = (3x - x')/2$ så är därmed $y(t) = (C_1/2)e^{2t} + 2C_2 e^{-t}$. Varje lösning till vårt system bör alltså ha formen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Genom direkt insättning verifierar man lätt att varje funktion $(x(t) \ y(t))^T$ av denna form faktiskt är en lösning. Den allmänna lösningen till systemet innehåller alltså två godtyckliga konstanter.

Existens och entydighet

Sats 5.1. Antag att $A(t)$ och $\mathbf{b}(t)$ i ekvation (1) är kontinuerliga i ett intervall I samt att $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \mathbf{R}^n$. Då existerar i I en entydig global lösning till (1) som uppfyller begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Bevis. Om vi sätter $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, så är för $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| = |A(t) \mathbf{e}_{\mathbf{x}\mathbf{y}}| \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

där $\mathbf{e}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ är en enhetsvektor (dvs. en vektor med beloppet 1). Låt I_1 vara ett godtyckligt slutet, begränsat delintervall av I och låt S beteckna mängden av alla enhetsvektorer i $\mathbf{R}^n$. Då är mängden $I_1 \times S$ sluten och begränsad och funktionen $(t, \mathbf{x}) \mapsto |A(t)\mathbf{x}|$ är kontinuerlig, eftersom den är en sammansättning med hjälp av addition och multiplikation av de kontinuerliga matriselementen i $A(t)$ samt av beloppsfunktionen. Men en kontinuerlig funktion är begränsad på en sluten, begränsad mängd (se någon bok i flerdimensionell analys). Således existerar det ett tal L sådant att $|A(t) \mathbf{e}| \leq L$ för varje $t \in I_1$ och $\mathbf{e} \in S$ och därmed uppfyller $\mathbf{f}$ ett Lipschitzvillkor i $I_1 \times \mathbf{R}^n$. Påståendet i Sats 5.1 följer nu ur Korollarium 4.2.1. $\diamond$

Med hjälp av Sats 5.1 kommer vi i Korollarium 5.2.1 att visa att den allmänna lösningen till (1) innehåller precis n stycken godtyckliga konstanter, eller uttryckt på ett mer exakt sätt, att det s.k. Lösningsrummet till det homogena systemet

$$(2) \quad \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}.$$

är n -dimensionellt.

Definition 5.1. Mängden av alla vektorvärda funktioner $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ ($t \in I$), som är lösningar till (2), kallas *Lösningsrummet* till (2). Vi betecknar detta med $\mathcal{V}$.

Anmärkning 1. Mängden $\mathcal{V}$ utgör en fullständig lösning till (2), eftersom varje lösning till (2) är en restriktion till något delintervall av I av någon funktion i $\mathcal{V}$.

Anmärkning 2. Mängden av alla funktioner på I bildar ett vektorrum. Eftersom för godtyckliga funktioner $\mathbf{x}_1(t)$ och $\mathbf{x}_2(t)$ i $\mathcal{V}$ också summan $\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$ och varje multipel $c\mathbf{x}_1(t)$ är funktioner i $\mathcal{V}$, så är $\mathcal{V}$ ett underrum av detta. Alltså är också Lösningsrummet $\mathcal{V}$ ett vektorrum.

Homogena system

Vi skall nu visa att vektorrummen $\mathcal{V}$ och $\mathbf{R}^n$ är isomorfa genom att konstruera en bijektiv (= injektiv och surjektiv) linjär avbildning från $\mathcal{V}$ till $\mathbf{R}^n$. För detta ändamål tar vi ett godtyckligt $t_0 \in I$ samt definierar avbildningen (funktionen)

$$\Phi_{t_0} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

genom att för en godtycklig lösning $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{V}$ sätta $\Phi_{t_0}(\mathbf{x}(\cdot))$ likamed funktionsvärdet $\mathbf{x}(t_0)$. Avbildningen Φ_{t_0} är linjär, ty för godtyckliga $\mathbf{x}_1(\cdot), \mathbf{x}_2(\cdot) \in \mathcal{V}$ och för varje tal c är

$$\begin{aligned} \Phi_{t_0}(\mathbf{x}_1(\cdot) + \mathbf{x}_2(\cdot)) &= \mathbf{x}_1(t_0) + \mathbf{x}_2(t_0) = \Phi_{t_0}(\mathbf{x}_1(\cdot)) + \Phi_{t_0}(\mathbf{x}_2(\cdot)) \\ \Phi_{t_0}(c\mathbf{x}_1(\cdot)) &= c\mathbf{x}_1(t_0) = c\Phi_{t_0}(\mathbf{x}_1(\cdot)). \end{aligned}$$

Avbildningen är Φ_{t_0} injektiv, ty om $\mathbf{x}_1(\cdot)$ och $\mathbf{x}_2(\cdot)$ är två lösningar i $\mathcal{V}$ som har samma värde i t_0 , så är de lika enligt entydighetssatsen. Vidare är Φ_{t_0} surjektiv enligt

existenssatsen, ty för varje givet värde $\mathbf{x}_0$ existerar det en global lösning $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{V}$ med $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Vi sammanfattar detta i en sats:

Teorem 5.2. För ett godtyckligt $t_0 \in I$ är avbildningen $\Phi_{t_0} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}^n$, som avbildar en funktion $\mathbf{x}(\cdot)$ på dess värde $\mathbf{x}(t_0)$ i t_0 , en linjär isomorfism.

En linjär isomorfism mellan två vektorrum (som Φ_{t_0} och dess inversa avbildning $\Phi_{t_0}^{-1}$) avbildar linjärt oberoende vektorer på linjärt oberoende vektorer och baser på baser (detta är lätt att visa!). Således gäller:

Korollarium 5.2.1. Funktionerna $\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot) \in \mathcal{V}$ är linjärt oberoende i $\mathcal{V}$ om och endast om vektorerna $\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_k(t_0)$ är linjärt oberoende i $\mathbf{R}^n$ och funktionerna $\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_n(\cdot) \in \mathcal{V}$ bildar en bas i $\mathcal{V}$ om och endast om vektorerna $\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)$ bildar en bas i $\mathbf{R}^n$. Således är $\dim \mathcal{V} = n$.

Definition 5.2. En matris $F(t) = (\mathbf{x}_1(t) \ \mathbf{x}_2(t) \ \cdots \ \mathbf{x}_n(t))$ sägs vara en *fundamentalmatrix* till systemet $\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$ om kolonnvektorerna $\mathbf{x}_1(\cdot), \mathbf{x}_2(\cdot), \dots, \mathbf{x}_n(\cdot)$ utgör en bas för Lösningssrummet $\mathcal{V}$ till systemet.

Eftersom en matris deriveras elementvis, är

$$\begin{aligned} F'(t) &= (\mathbf{x}'_1(t) \ \cdots \ \mathbf{x}'_n(t)) = (A(t)\mathbf{x}_1(t) \ \cdots \ A(t)\mathbf{x}_n(t)) = \\ &= A(t)(\mathbf{x}_1(t) \ \cdots \ \mathbf{x}_n(t)) = A(t)F(t), \end{aligned}$$

dvs. matrisen $F(t)$ satisfierar DE:n $\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$.

Anmärkning 3. Om $F(t) = (\mathbf{x}_1(t) \ \cdots \ \mathbf{x}_n(t))$ är en fundamentalmatrix till systemet $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, så representerar uttrycket

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) = F(t)\mathbf{c},$$

där $\mathbf{c} = (c_1 \cdots c_n)^T$ är en godtycklig vektor, systemets *allmänna lösning*, eftersom varje funktion i Lösningssrummet $\mathcal{V}$ är en linjärkombination av denna form.

Definition 5.3. Om $F(t) = (\mathbf{x}_1(t) \ \cdots \ \mathbf{x}_n(t))$ är en kvadratisk matris, så kallas $\det F(t)$ *Wronski-determinanten* för $F(t)$.

Eftersom kolonnerna $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ i en $n \times n$ -matris $A = (\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$ bildar en bas i $\mathbf{R}^n$ om och endast om A är icke-singulär och detta i sin tur gäller om och endast om $\det A \neq 0$, så följer ur Korollarium 5.2.1:

Sats 5.3. För funktioner $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ i Lösningssrummet $\mathcal{V}$ till det homogena systemet $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}(t)$ är nedanstående påståenden ekvivalenta:

- (i) Matrisen $F(t) = (\mathbf{x}_1(t) \ \cdots \ \mathbf{x}_n(t))$ är en fundamentalmatrix till systemet;
- (ii) Wronski-determinanten $\det F(t) \neq 0$ för varje $t \in I$;
- (iii) Wronski-determinanten $\det F(t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$;

Exempel 5.2. Eftersom lösningarna

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

till systemet i exempel 1 uppspannar hela lösningsrummet, så måste de vara linjärt oberoende. Matrisen

$$(3) \quad F(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

är således en fundamentalmatris till systemet. Ett annat och enklare sätt att visa att $\mathbf{x}_1(\cdot)$ och $\mathbf{x}_2(\cdot)$ är linjärt oberoende är att konstatera att Wronskideterminanten $\det F(t) = 4e^t - e^t = 3e^t \neq 0$ för varje t .

Inhomogena system

Samma samband som i en dimension råder mellan lösningar till det inhomogena systemet (1) och lösningar till det homogena systemet (2):

Sats 5.4. Låt $\mathbf{x}_1(t)$ beteckna en partikulärlösning till det inhomogena systemet (1). Då är $\mathbf{x}_1(\cdot) + \mathcal{V} = \{\mathbf{x}_1(\cdot) + \mathbf{x}(\cdot) \mid \mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{V}\}$ en fullständig lösning till (1).

Mängden av alla lösningar (definierade på I) till (1) fås alltså genom att man i vektorrummet av alla funktioner på I förskjuter $\mathcal{V}$ medelst vektorn $\mathbf{x}_1(\cdot)$.

Bevis. Genom insättning ser man att om $\mathbf{x}(t)$ är en lösning till (2), så är $\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}(t)$ en lösning till (1). Antag nu att $\mathbf{y}(t)$ är en godtycklig lösning till (1). Då kan $\mathbf{y}(t)$ entydigt utvidgas till en lösning som är definierad på hela I , eftersom mot varje begynnelsevärdesvillkor $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ($t_0 \in I$) svarar en entydig global lösning enligt Sats 5.1. Sätt $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}_1(t)$. Då är $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) - A(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}(t) - \mathbf{b}(t) \equiv 0$, dvs. $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{V}$ och $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}(t)$. $\diamond$

Antag att en fundamentalmatris $F(t)$ (och därmed den allmänna lösningen $F(t)\mathbf{c}$) till det homogena systemet (2) är känd. Då kan en partikulärlösning till det inhomogena systemet

$$(4) \quad \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

bestämmas medelst *konstantens variation*:

Vi gör ansatsen $\mathbf{x}(t) = F(t)\mathbf{c}(t)$ och bestämmer den vektorvärda funktionen $\mathbf{c}(t)$ så att ansatsen faktiskt blir en lösning till (4). På grund av att derivering av matriser och vektorer sker element- resp. komponentvis, kommer den vanliga deriveringsregeln för derivering av en produkt att gälla för matrisprodukter. Således är

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= F'(t)\mathbf{c}(t) + F(t)\mathbf{c}'(t) \\ &= A(t)F(t)\mathbf{c}(t) + F(t)\mathbf{c}'(t) \\ &= A(t)\mathbf{x}(t) + F(t)\mathbf{c}'(t), \end{aligned}$$

ty $F'(t) = A(t)F(t)$. Nu ser vi att om $\mathbf{c}(t)$ väljs så att $F(t)\mathbf{c}'(t) \equiv \mathbf{b}(t)$, så är $\mathbf{x}(t)$ en lösning till (4). Men detta villkor är uppfyllt t.ex. för funktionen

$$\mathbf{c}(t) = \int_{t_0}^t F(s)^{-1}\mathbf{b}(s) ds \quad (t_0 \in I).$$

Vi sammanfattar detta i en sats:

Sats 5.5. Antag att $n \times n$ -matrisen $A(t)$ och n -vektorn $\mathbf{b}(t)$ är kontinuerliga i intervallet I samt att $F(t)$ är en fundamentalmatris till $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. För ett godtyckligt $t_0 \in I$ är då

$$\mathbf{x}(t) = F(t) \int_{t_0}^t F(s)^{-1} \mathbf{b}(s) ds$$

en partikulärlösning till (4) som uppfyller begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$.

Sats 5.4 och Sats 5.5 ger nu tillsammans:

Korollarium 5.5.1. Den allmänna lösningen till (4) är

$$\mathbf{x}(t) = F(t)\mathbf{c} + F(t) \int_{t_0}^t F(s)^{-1} \mathbf{b}(s) ds.$$

Exempel 5.3. I det föregående exemplet visade vi att det homogena systemet svarande mot

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

har fundamentalmatrisen (3). Genom att för den inversa matrisen göra ansatsen

$$F(t)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

och utnyttja likheten $F(t)F(t)^{-1} = I$, fås ekvationssystemen

$$\begin{cases} 2e^{2t}a + e^{-t}c = 1 \\ e^{2t}a + 2e^{-t}c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2e^{2t}b + e^{-t}d = 0 \\ e^{2t}b + 2e^{-t}d = 1 \end{cases}$$

ur vilka följer att $a = \frac{2}{3}e^{-2t}$, $c = -\frac{1}{3}e^t$ och $b = -\frac{1}{3}e^{-2t}$, $d = \frac{2}{3}e^t$. Om vi sätter $\mathbf{b}(t) = (e^{-t} \ 0)^T$ så är

$$F(t)^{-1}\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} \\ -\frac{1}{3}e^t & \frac{2}{3}e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-3t} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

och

$$F(t) \int_0^t F(s)^{-1} \mathbf{b}(s) ds = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9}(1 - e^{-3t}) \\ -\frac{1}{3}t \end{pmatrix} = \frac{e^{-t}}{9} \begin{pmatrix} 4(e^{3t} - 1) - 3t \\ 2(e^{3t} - 1) - 6t \end{pmatrix},$$

vilket enligt Sats 5.5 är en partikulärlösning till det inhomogena systemet. Vid integrationen har vi här använt den undre gränsen $t_0 = 0$. Genom att använda en annan undre gräns, fås en annan partikulärlösning. Enligt Sats 5.4 är skillnaden mellan två sådana partikulärlösningar alltid en lösning till det homogena systemet.

Tillämpning på linjära ekvationer

För tydlighetens skull diskuterar vi i fortsättningen DE:r av tredje ordningen. Allt som sägs kan emellertid direkt generaliseras till DE:r av godtycklig ordning.

I föregående kapitel såg vi att en DE av formen

$$L(t, D)x = x''' + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t),$$

där $g(\cdot)$ och $a_i(\cdot)$, ($i = 0, 1, 2$), är kontinuerliga funktioner och $L(t, D)$ betecknar differentialoperatoren $D^3 + a_2(t)D^2 + a_1(t)D + a_0(t)$, kan överföras på ett system

$$(5) \quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - a_2(t)x_3 + g(t), \end{cases}$$

vilket i matrisform blir $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, där

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Om $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ och $y_3(\cdot)$ är linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen $L(t, D)x = 0$, är

$$F(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \mathbf{u}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{pmatrix}$$

en fundamentalmatris till det homogena system som svarar mot (5). Determinanten $\det F(t)$ kallas *Wronski-determinanten* för funktionerna $y_1(t)$, $y_2(t)$ och $y_3(t)$ (se nästa kapitel). Mängden $\{y_1, y_2, y_3\}$ av dessa funktioner kallas ett *fundamentalsystem*. (Observera att determinanten för det ekvationssystem, som metoden med konstanternas variation ger upphov till i kapitel 3, är Wronski-determinanten för ett fundamentalsystem.)

Låt oss beteckna inversen till $F(t)$ med $F(t)^{-1} = (\mathbf{v}_1(t) \quad \mathbf{v}_2(t) \quad \mathbf{v}_3(t))$. Då är enligt Sats 5.5

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} &= F(t) \int_{t_0}^t F(s)^{-1} \mathbf{b}(s) ds = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \mathbf{u}_3(t) \end{pmatrix} \int_{t_0}^t (\mathbf{v}_1(s) \quad \mathbf{v}_2(s) \quad \mathbf{v}_3(s)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \mathbf{u}_3(t) \end{pmatrix} \int_{t_0}^t \mathbf{v}_3(s) g(s) ds \end{aligned}$$

en partikulärlösning till (5) med begynnelsevärdet $\mathbf{0}$ i t_0 . Den första komponenten

$$y(t) = \int_{t_0}^t K(t, s) g(s) ds,$$

där $K(t, s) = \mathbf{u}_1(t)\mathbf{v}_3(s)$, är således en partikulärlösning till begynnelsevärdesproblemet $L(t, D)x = g(t)$, $y(t_0) = y'(t_0) = y''(t_0) = 0$.

Vi formulerar följande sats för DE:r av n :e ordningen trots att vi bevisar den enbart i fallet $n = 3$:

Sats 5.6. a) *Funktionen $K(t, s)$ (fundamentallösningen till operatorn $L(t, D)$) är den entydiga lösningen till begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{cases} L(t, D)x = 0 \\ x(s) = x'(s) = \dots = x^{(n-2)}(s) = 0 \\ x^{(n-1)}(s) = 1. \end{cases}$$

b) *Funktionen $y(t) = \int_{t_0}^t K(t, s)g(s) ds$ är en lösning till begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{cases} L(t, D)x = g(t) \\ x(t_0) = x'(t_0) = \dots = x^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases}$$

Bevis. a) (antag att $n = 3$) För varje s är $K(\cdot, s)$ (enligt definitionen) en linjärkombination av $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ och $y_3(\cdot)$. Således är $K(t, s)$ för varje s en lösning till $L(t, D)x = 0$. Då det dessutom gäller att $F(s)F(s)^{-1} = I$, är $\mathbf{u}_i(s)\mathbf{v}_j(s) = \delta_{ij}$. Detta ger att

$$\begin{aligned} K(s, s) &= \mathbf{u}_1(s)\mathbf{v}_3(s) = 0 \\ K'(s, s) &= \mathbf{u}'_1(s)\mathbf{v}_3(s) = \mathbf{u}_2(s)\mathbf{v}_3(s) = 0 \\ K''(s, s) &= \mathbf{u}''_1(s)\mathbf{v}_3(s) = \mathbf{u}_3(s)\mathbf{v}_3(s) = 1. \end{aligned}$$

Påståendet b) följer direkt ur Sats 5.5. $\diamond$

Historiska notiser. Begreppet fundamentalsystem för linjära DE:r av högre ordning infördes år 1866 av Lazarus Fuchs (1833–1902). Wronski-determinanten infördes redan år 1821 av Josef Hoëné Wronski (1778–1853).

Övningsuppgifter

Bestäm i uppgifterna 1–3 en fundamentalmatris på intervallet $]0, \infty[$ till det angivna systemet.

1.

$$\begin{cases} x' = -\frac{2y}{t^2} \\ y' = -x. \end{cases}$$

Ledning: Lös $y(t)$ ur en DE av Eulers typ.

2.

$$\begin{cases} tx' = 6x - 3y \\ ty' = 2x + y. \end{cases}$$

Ledning: Använd substitutionen $t = e^\tau$.

3.

$$\begin{cases} 2t^2x' = -tx + y \\ 2ty' = tx + y. \end{cases}$$

Ledning: Härled en DE av Eulers typ för $x(t)$.

4. Bestäm fundamentallösningen $K(t, s)$ för operatoren $L(D) = D^3$ (dvs. fundamentallösningen till $x''' = 0$). Använd denna för att lösa problemet $x'''(t) = 2t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
5. Bestäm en fundamentallösning till DE:n $x'' - x = 0$. Lös med hjälp av denna DE:n $x'' - x = e^t \sin t$.
6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}.$$

7. Antag att $F(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix}$ är en fundamentalmatris till systemet $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ (där $A(t)$ är en kontinuerlig 2×2 -matris). Visa att Wronski-determinanten $W(t) = \det F(t)$ satisfierar DE:n $W'(t) = \text{tr}A(t)W(t)$, där $\text{tr}A(t)$ betecknar *spåret* av matrisen $A(t)$, dvs. summan av diagonalelementen. Härled därefter *Abels formel*

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}A(s) ds}.$$

8. Lös i intervallet $]0, \infty[$ systemet

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t^2}y + t \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2t}y + t^2 \end{cases}$$

med hjälp av den fundamentallösning som härletts i uppgift 3.

Linjära differentialekvationer av 2:a ordningen

Homogena ekvationer

Betrakta DE:n

$$L(t, D)x = x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

Eftersom Lösningssrummet till denna ekvation är tvådimensionellt kommer vilka två lösningar som helst att vara basvektorer i Lösningssrummet om de är linjärt oberoende. Vi behöver en metod med vilkens hjälp vi lätt kan visa att n funktioner är linjärt oberoende.

Antag att funktionerna $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ligger i mängden $\mathcal{C}^{n-1}(I)$. *Wronski-determinanten* för dessa funktioner definierades i föregående kapitel som determinanten

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Exempel 6.1. Wronski-determinanten för funktionerna $x_1(t) = t$ och $x_2(t) = \ln t$, som är definierade på intervallet $I =]0, \infty[$, är

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} t & \ln t \\ 1 & 1/t \end{vmatrix} = 1 - \ln t.$$

Följande sats formulerar vi för det fall att vi har två funktioner. Satsen gäller emellertid generellt för n funktioner och beviset är i det allmänna fallet likartat.

Sats 6.1. Om funktionerna $x_1(t)$ och $x_2(t)$ i $\mathcal{C}^1(I)$ är linjärt beroende så är Wronski-determinanten $W(x_1, x_2)(t) \equiv 0$ i I .

Bevis. Om funktionerna $x_1(t)$ och $x_2(t)$ i $\mathcal{C}^1(I)$ är linjärt beroende, finns det tal c_1 och c_2 , av vilka minst ett är olik noll, sådana att $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \equiv 0$. Om t.ex. $c_1 \neq 0$ så är $x_1(t) \equiv -(c_2/c_1)x_2(t) \equiv kx_2(t)$. Därmed är

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} kx_2(t) & x_2(t) \\ kx_2'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \equiv 0. \diamond$$

Korollarium 6.1.1. Om $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$ så är x_1 och x_2 linjärt oberoende i $\mathcal{C}^1(I)$.

Exempel 6.2. Funktionerna $x_1(t) = \cos t$ och $x_2(t) = \sin t$ är linjärt oberoende, ty

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1.$$

Märk, att implikationerna i satsen och korollariet inte kan omvändas: Om $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är linjärt oberoende, så behöver inte $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ gälla i I , vilket följande exempel visar (jfr med Teorem 6.4):

Exempel 6.3. Betrakta funktionerna $x_1(t) = t^2$ och

$$x_2(t) = \begin{cases} t^2 & , \text{ för } t \geq 0 \\ -t^2 & , \text{ för } t < 0. \end{cases}$$

Då är x_1 och x_2 linjärt oberoende, ty ur $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \equiv 0$ följer för $t = 1$ att $c_1 + c_2 = 0$ samt för $t = -1$ att $c_1 - c_2 = 0$, varför $c_1 = c_2 = 0$. Men

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t^2 \\ 2t & 2t \end{vmatrix} \equiv 0$$

för $t \geq 0$ och på samma sätt fås att $W(x_1, x_2)(t) \equiv 0$ för $t < 0$. Således är $W(x_1, x_2)(t) \equiv 0$.

Nästa sats är en direkt följd av Korollarium 1.1, eftersom Lösningssrummet till en homogen linjär DE är tvådimensionellt.

Sats 6.2. Antag att $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är två lösningar till DE:n $L(t, D)x = 0$ i intervallet I . Om $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$, så bildar x_1 och x_2 en bas i Lösningssrummet till DE:n, dvs. $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ är den allmänna lösningen.

Exempel 6.4. Lösningarna $x_1(t) = \cos t$ och $x_2(t) = \sin t$ till DE:n $x'' + x = 0$ bildar en bas i Lösningssrummet, ty $W(x_1, x_2)(t) \equiv 1$.

Följande lemma, liksom de flesta satser i fortsättningen, gäller (*mutatis mutandis*) för linjära DE:r av godtycklig ordning.

Lemma 6.3. Om $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är lösningar till DE:n $L(t, D)x = 0$ så satisfierar Wronski-determinanten $W(x_1, x_2)(t)$ DE:n

$$\frac{dW}{dt} + p(t)W = 0,$$

dvs. $W(x_1, x_2)(t) = C \exp(-\int^t p(s) ds)$ för någon konstant C (Abels formel).

Bevis. Ett sätt att bevisa lemmat är att utgå från likheten $x_2 L(t, D)x_1 - x_1 L(t, D)x_2 = 0$. Ett bevis som direkt kan generaliseras till det allmänna fallet (som det som ges nedan) är emellertid att föredra. Då man deriverar en determinant skall varje rad (eller kolonn) behandlas som en faktor i en produkt. Om vi betecknar Wronski-determinanten med $W(t)$, är alltså

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 \\ x''_1 & x''_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x''_1 & x''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -p(t)x'_1 - q(t)x_1 & -p(t)x'_2 - q(t)x_2 \end{vmatrix} = -p(t)W. \diamond \end{aligned}$$

Teorem 6.4. *Följande påståenden är ekvivalenta för lösningar $x_1(t)$ och $x_2(t)$ i intervallet I till $DE:n$ $L(t, D)x = 0$:*

- a) $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ för något $t \in I$;
- b) $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ för varje $t \in I$;
- c) x_1 och x_2 är linjärt oberoende;
- d) x_1 och x_2 bildar en bas i Lösningssrummet till $DE:n$.

Bevis. Enligt Lemma 6.3 är $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ för varje t om detta gäller för något t . Därför är påståendena a) och b) ekvivalenta. Ur b) följer enligt Korollarium 6.1.1 att x_1 och x_2 är linjärt oberoende, dvs. att påståendet c) gäller. Ur detta följer i sin tur (Sats 6.2) att x_1 och x_2 bildar en bas i Lösningssrummet, eftersom detta rum är tvådimensionellt. Om vi dessutom visar att d) implicerar a) så följer att alla påståendena är ekvivalenta. Antag alltså att x_1 och x_2 bildar en bas i Lösningssrummet. Låt $t_0 \in I$ vara godtyckligt. Enligt existenssatsen har begynnelsevärdesproblemen

$$\begin{array}{ll} L(t, D)x = 0 & \text{och} \quad L(t, D)x = 0 \\ x(t_0) = 1 & x(t_0) = 0 \\ x'(t_0) = 0 & x'(t_0) = 1 \end{array}$$

lösningar y_1 resp. y_2 som bildar en bas i Lösningssrummet enligt Sats 6.2, eftersom

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Lösningarna x_1 och x_2 kan därför framställas som linjärkombinationer av y_1 och y_2 : $x_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2$, $x_2 = d_1 y_1 + d_2 y_2$. Då är

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2)(t) &= \begin{vmatrix} c_1 y_1 + c_2 y_2 & d_1 y_1 + d_2 y_2 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' & d_1 y_1' + d_2 y_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = (c_1 d_2 - c_2 d_1) W(y_1, y_2)(t). \end{aligned}$$

Vore nu $W(x_1, x_2)(t) = 0$ för varje t så vore $c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$, dvs. $c_1 : d_1 = c_2 : d_2$, och då vore x_1 och x_2 linjärt beroende, vilket strider mot antagandet att d) gäller. Således är $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ för något t . $\diamond$

Konstanternas variation kan användas då man utgående från en given lösning vill bestämma en annan linjärt oberoende lösning. Antag att $x_1(t)$ är en lösning till ekvationen $L(t, D)x = 0$ och att $x_1(t) \neq 0$ för varje $t \in I$ (om detta villkor inte är uppfyllt i I , betrakta ett delintervall!). Gör ansatsen $x_2(t) = c(t) x_1(t)$. Då är

$$\begin{aligned} x_2' &= c' x_1 + c x_1' \\ x_2'' &= c'' x_1 + 2c' x_1' + c x_1'', \end{aligned}$$

varför insättning i $x'' + px' + qx = 0$ efter hyfsning ger

$$c'' + u(t) c' = 0,$$

där vi har satt $u(t) = (2x'_1 + px_1)/x_1$. Funktionen $c(t)$ kan nu bestämmas. Man finner lätt att

$$c(t) = \int^t e^{-\int^s u(\xi) d\xi} ds$$

är en lösning. Funktionerna $x_1(t)$ och $x_2(t) = c(t)x_1(t)$ är linjärt oberoende enligt Korollarium 6.1.1, ty på grund av att $c'(t) = \exp(-\int u(t) dt) \neq 0$ och $x_1(t) \neq 0$, är

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1 & cx_1 \\ x'_1 & cx'_1 + c'x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x'_1 & c'x_1 \end{vmatrix} = c'(t) x_1(t)^2 \neq 0.$$

Exempel 6.5. Vi ser genast att DE:n $x'' - \frac{t}{1+t^2}x' + \frac{1}{1+t^2}x = 0$ har lösningen $x_1(t) = t$ och gör ansatsen $x(t) = c(t)x_1(t)$. Insättning ger DE:n

$$c''t = \left(\frac{t^2}{1+t^2} - 2 \right) c',$$

som har (t.ex.) lösningen

$$c(t) = \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2} dt = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) - \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}.$$

Funktionerna $x_1(t) = t$ och $x_2(t) = c(t)x_1(t) = t \ln(t + \sqrt{1+t^2}) - \sqrt{1+t^2}$ bildar nu en bas i Lösningsrummet till den ursprungliga DE:n, som således har den allmänna lösningen $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$.

Sturms separations- och jämförelsesats

Teorem 6.5. (Sturms separationssats) *Antag att x_1 och x_2 utgör en bas för Lösningsrummet till DE:n $L(t, D)x = 0$. Då har $x_1(t)$ precis ett nollställe mellan varje par av konsekutiva nollställena till $x_2(t)$ och omvänt. Nollställena till $x_1(t)$ och $x_2(t)$ följer alltså turvist efter varann på den reella axeln.*

Bevis. Antag att $x_1(t_1) = 0$, där $t_1 \in I$. Då är $x'_1(t_1) \neq 0$, ty vore $x'_1(t_1) = 0$, så vore $W(x_1, x_2)(t_1) = 0$, vilket strider mot att x_1 och x_2 utgör en bas i Lösningsrummet. Antag t.ex. att $x'_1(t_1) > 0$ och sätt $A = \{t | t > t_1, x_1(t) = 0\}$. Om $A \neq \emptyset$, låt t_2 vara det minsta talet i A (ett sådant existerar, eftersom A är en sluten mängd som är nedåt begränsad).

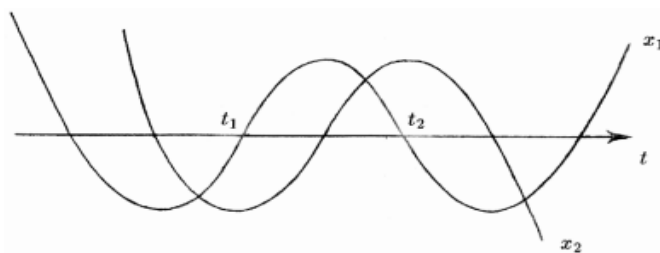


fig. 1

Vi visar att x_2 har exakt ett nollställe i $]t_1, t_2[$. Notera först att $x_2(t_1) \neq 0$ och $x_2(t_2) \neq 0$, ty annars vore $W(x_1, x_2)(t_i) = 0$ för $i = 1, 2$. Vidare är

$$W(x_1, x_2)(t_1) = \begin{vmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) \\ x_1'(t_1) & x_2'(t_1) \end{vmatrix} = -x_2(t_1) x_1'(t_1),$$

där $x_1'(t_1) > 0$. På samma sätt fås att $W(x_1, x_2)(t_2) = -x_2(t_2) x_1'(t_2)$, där $x_1'(t_2) < 0$. Eftersom Wronski-determinanten har formen $W(x_1, x_2)(t) = C \exp(-\int p(t) dt)$, så har den samma tecken överallt. Således måste $x_2(t_1)$ och $x_2(t_2)$ ha motsatta tecken, dvs. x_2 måste ha minst ett nollställe i intervallet $]t_1, t_2[$. Skulle x_2 ha flera nollställen i nämnda intervall, så skulle enligt ovanstående resonemang (med funktionerna ombytta) x_1 ha minst ett nollställe där, vilket strider mot valet av t_2 .

Om $A = \emptyset$ så kan x_2 ha högst ett nollställe till höger om t_1 . Antar man nämligen det motsatta så följer igen som ovan att även x_1 har ett nollställe till höger om t_1 , vilket strider mot att A är tomt. Satsens påstående är därmed bevisat. $\diamond$

Med hjälp av samma slags resonemang kan vi få fram ännu ett användbart resultat:

Teorem 6.6. (Sturms jämförelsesats) *Antag att $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är icke-triviala lösningar till*

$$x'' + p(t)x' + q_1(t)x = 0 \quad \text{resp.} \quad x'' + p(t)x' + q_2(t)x = 0,$$

där $q_1(t) \geq q_2(t)$. Då gäller antingen att $x_1(t)$ har minst ett nollställe mellan varje par av konsekutiva nollställen t_1 och t_2 till $x_2(t)$ eller så är $q_1(t) = q_2(t)$ mellan t_1 och t_2 och $x_1(t) = kx_2(t)$ i $]t_1, t_2[$ för någon konstant $k \neq 0$.

Bevis. Antag att det första alternativet inte inträffar, dvs. att $x_1(t)$ inte har något nollställe mellan t_1 och t_2 . Utan att inskränka på allmängiltigheten kan vi då anta att $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är positiva i $]t_1, t_2[$. Direkt uträkning ger att för Wronski-determinanten $W(t)$ för x_1 och x_2 gäller

$$\begin{aligned} W'(t) &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ px_1' + q_1x_1 & px_2' + q_2x_2 \end{vmatrix} \\ &= -pW(t) - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ q_1x_1 & q_2x_2 \end{vmatrix} = -pW(t) + (q_1 - q_2)x_1x_2. \end{aligned}$$

Genom att multiplicera $W'(t) + pW(t) = (q_1 - q_2)x_1x_2$ med $\exp(\int^t p(s)ds)$ fås att

$$\frac{d}{dt} \left[W(t) e^{\int^t p ds} \right] = (q_1 - q_2)x_1x_2 e^{\int^t p ds} \geq 0$$

för varje $t \in]t_1, t_2[$. Således är $W(t) \exp(\int^t p ds)$ en växande funktion i $]t_1, t_2[$. Men då exponentialfunktionen ju alltid är positiv och då

$$W(t_1) = x_1(t_1)x_2'(t_1) \geq 0 \quad \text{och} \quad W(t_2) = x_1(t_2)x_2'(t_2) \leq 0,$$

så innebär detta en motsägelse, ifall inte $q_1(t) \equiv q_2(t)$. I detta fall är $W(t) \equiv 0$ och $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är linjärt beroende (betraktade som funktioner på $]t_1, t_2[$) enligt Teorem 6.4. $\diamond$

Exempel 6.6. Vi skall tillämpa jämförelsesatsen på *Bessels differentialekvation*

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)x = 0 \quad (t > 0).$$

Lösningarna till denna kallas *Besselfunktioner* av ordningen n . Genom att substituera $x = y/\sqrt{t}$ fås

$$y'' + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4t^2}\right)y = 0.$$

Om $|n| < 1/2$, så är parentesen i denna DE större än eller likamed 1. Dess lösningar kan alltså jämföras med lösningarna till DE:n $y'' + y = 0$. Eftersom ändpunkterna av varje slutet intervall med längden π är nollställena till någon lösning $\cos(t - t_0)$ till $y'' + y = 0$, så gäller:

För $|n| < 1/2$ har Besselfunktionerna av ordningen n minst ett nollställe i varje intervall av längden π på den positiva tallinjen. Avståndet mellan konsekutiva nollställena är alltså mindre än π .

Om $|n| > 1/2$ får vi, då vi låter DE:na byta roller:

För $|n| > 1/2$ har Besselfunktionerna av ordningen n högst ett nollställe i varje intervall av längden π på den positiva tallinjen. Avståndet mellan konsekutiva nollställena är alltså större än π .

Besselfunktioner av ordningen $n = \pm 1/2$ har tydligen formen $C \cos(t - t_0)/\sqrt{t}$ (för $t > 0$).

Den inhomogena ekvationen

Låt oss använda metoden med konstanternas variation, som vi inforde redan i kapitel 3, till att bestämma en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen

$$L(t, D)x = x'' + p(t)x' + q(t)x = g(t)$$

då den allmänna lösningen $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ till den homogena ekvationen $L(t, D)x = 0$ är känd.

Vi gör ansatsen $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ och försöker välja koefficientfunktionerna $c_1(t)$ och $c_2(t)$ så att $x(t)$ blir en lösning till $L(t, D)x = g$. Derivering ger:

$$x' = (c_1x_1' + c_2x_2') + (c_1'x_1 + c_2'x_2).$$

Vi kräver nu att funktionerna c_1 och c_2 är sådana att den andra parentesen är noll, dvs. sådana att

$$c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0.$$

Då är $x'' = c_1'x_1' + c_1x_1'' + c_2'x_2' + c_2x_2''$. Insättning i DE:n ger likheten $c_1'x_1' + c_2'x_2' = g$, då man beaktar att x_1 och x_2 är lösningar. Om funktionerna $c_1(t)$ och $c_2(t)$ satisfierar ekvationssystemet

$$\begin{cases} c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0 \\ c_1'x_1' + c_2'x_2' = g. \end{cases}$$

så ger alltså ansatsen en lösning till den inhomogena ekvationen. Eftersom ekvationssystemets determinant är $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ så har det en entydig lösning. Eliminering ger:

$$\begin{aligned} c_1'(t) W(x_1, x_2)(t) &= -g(t) x_2(t) \\ c_2'(t) W(x_1, x_2)(t) &= g(t) x_1(t), \end{aligned}$$

varur c_1 och c_2 fås genom integration. Vi sammanfattar resultaten i en sats:

Sats 6.7. *Antag att $x_1(t)$ och $x_2(t)$ bildar en bas i Lösningsrummet till DE:n $L(t, D)x = 0$ och sätt $W(t) = W(x_1, x_2)(t)$. Då är funktionen $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$, där*

$$c_1(t) = - \int^t \frac{g(s) x_2(s)}{W(s)} ds \quad \text{och} \quad c_2(t) = \int^t \frac{g(s) x_1(s)}{W(s)} ds,$$

en partikulärlösning till DE:n $L(t, D)x = g(t)$.

Exempel 6.7. Betrakta DE:n $x'' + x = \tan t$ i intervallet $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Den homogena ekvationen har lösningarna $x_1(t) = \cos t$ och $x_2(t) = \sin t$, som är linjärt oberoende då ju $W(x_1, x_2)(t) \equiv 1$. Koefficientfunktionerna $c_1(t)$ och $c_2(t)$ är enligt formeln i satsen

$$\begin{aligned} c_1(t) &= - \int^t \tan s \sin s ds = - \int^t \frac{\sin^2 s}{\cos s} ds = \\ &= \int^t \cos s ds - \int^t \frac{ds}{\cos s} = \sin t - \ln \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \\ c_2(t) &= \int^t \tan s \cos s ds = \int^t \sin s ds = -\cos t. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till DE:n $x'' + x = \tan t$ i I är därför $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \cos t \cdot \ln \tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})$.

Elementärt om lösningar

Vi har tidigare sett att en DE $x'' + a_1 x' + a_0 x = g(t)$ med konstanta koefficienter kan skrivas $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x = g(t)$, där λ_1 och λ_2 är nollställena till det karakteristiska polynomet $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$. En liknande faktorisering av differentialoperatoren $L(t, D) = D^2 + p(t)D + q(t)$ kan uttryckas med hjälp av en partikulärlösning till den homogena ekvationen $L(t, D)x = 0$:

Lemma 6.8. *Om $x_1(t)$ är en icke-trivial partikulärlösning till den homogena DE:n $L(t, D)x = x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ så gäller faktoriseringen $L(t, D) = D^2 + pD + q = (D - r_1)(D - r_2)$ i varje intervall I där $x_1(t) \neq 0$, varvid*

$$r_1 = - \left(p + \frac{x_1'}{x_1} \right) \quad \text{och} \quad r_2 = \frac{x_1'}{x_1}.$$

Bevis. En direkt kalkyl ger

$$\begin{aligned}
 (D - r_1)(D - r_2) &= \left(D + p + \frac{x'_1}{x_1}\right) \left(D - \frac{x'_1}{x_1}\right) = \\
 &= D^2 - D \frac{x'_1}{x_1} + pD - p \frac{x'_1}{x_1} + \frac{x'_1}{x_1} D - \left(\frac{x'_1}{x_1}\right)^2 = \\
 &= D^2 + \left(\frac{x'_1}{x_1}\right)^2 - \frac{x''_1}{x_1} - \frac{x'_1}{x_1} D + pD - p \frac{x'_1}{x_1} + \frac{x'_1}{x_1} D - \left(\frac{x'_1}{x_1}\right)^2 = \\
 &= D^2 + pD + q - \frac{1}{x_1}(x''_1 + px'_1 + qx_1) = D^2 + pD + q. \diamond
 \end{aligned}$$

Låt Γ vara en klass av funktioner som är definierade i alla punkter i ett intervall I utom möjligen i enstaka isolerade punkter (som ett exempel, se på $\tan t$ och $\cot t$ i intervallet $\mathbf{R}$). Vi konstruerar nya funktioner genom att använda följande operationer på funktionerna i Γ eller på de nya funktioner som uppstår då operationerna används:

- 1) addition, subtraktion
- 2) multiplikation, division
- 3) derivering, integrering (= bildning av primitiv funktion)
- 4) exponentiering

Låt $L_0(\Gamma)$ beteckna den klass av funktioner som fås genom att – utgående från funktionerna i Γ – använda operationerna 1) till 4) ett ändligt antal gånger.

Sats 6.9. a) Om den homogena ekvationen $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ har en icke-trivial lösning $x_1(t) \neq 0$ i klassen $L_0(\Gamma)$ och om även p och q finns i $L_0(\Gamma)$, så ligger alla lösningar i klassen $L_0(\Gamma)$.

b) Om dessutom gäller att funktionen g tillhör $L_0(\Gamma)$ så ligger alla lösningar till den inhomogena ekvationen $x'' + p(t)x' + q(t)x = g(t)$ i klassen $L_0(\Gamma)$.

Bevis. På grund av Lemma 6.8 har vi faktoriseringen $D^2 + pD + q = (D - r_1)(D - r_2)$, där r_1 och r_2 är i $L_0(\Gamma)$. Använd därefter två gånger det faktum att alla lösningar till en linjär ekvation $x' - fx = h$ ligger i $L_0(\Gamma)$ om f och h gör det. $\diamond$

Historiska notiser. Redan Leonhard Euler (1707–83) löste linjära DE:r med variabla koefficienter. Då han 1734-5 bidrog till Daniel Bernoullis teori om svängningar hos hängande linor, uppträdde Besselfunktioner – i princip – i hans lösningar av en viss DE. De var dock dolda i form av oändliga serier. Dessa Besselfunktioner infördes sedan medvetet av astronomen Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) i samband med ett problem inom astronomin rörande planeternas rörelse. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) undersökte mer systematiskt än sina föregångare linjära DE:r med variabla koefficienter. Jacques Charles François Sturm (1803–55), efter vilken separations- och jämförelsesatserna är uppkallade, vann flera utmärkelser för sitt arbete om DE:r av andra ordningen, vilket publicerades år 1834. Sturm var för övrigt den förste som noggrant bestämde ljudets hastighet i vatten. Abels formel härleddes av norrmannen Niels Henrik Abel (1802–29) år 1827.

Övningsuppgifter

- Är följande funktioner linjärt oberoende?
 - t, e^t, e^{2t} ;
 - $\sin t, \sin t - t, t$.
- Bestäm en bas för Lösningssrummet till följande DE:r genom att göra ansatsen $x(t) = c(t)x_1(t)$:
 - $x'' + 2x' + x = 0$, då $x_1(t) = e^{-t}$ är en lösning;
 - $t^2x'' + 2tx' - 2x = 0, t > 0$, då $x_1(t) = t$ är en lösning.
- Kan funktionerna $x_1(t) = \sin t$ och $x_2(t) = e^t$ ($t \in \mathbf{R}$) utgöra en bas för Lösningssrummet till någon homogen, linjär DE av 2:a ordningen?
- Lös DE:n $x''' - \frac{3}{t}x'' + \frac{6}{t^2}x' - \frac{6}{t^3}x = 0$ då $x_1(t) = t$ är en lösning. (Ledn.: Gör den vanliga ansatsen $x(t) = c(t)t$ och bestäm därefter tre *olika* funktioner $c(t)$ så att en bas för Lösningssrummet till DE:n, bestående av funktioner av formen $c(t)t$, erhålls.)
- Lös DE:na
 - $$x'' - \frac{3}{t}x' + \frac{3}{t^2}x = 0, \quad t > 0;$$
 - $$x'' - \frac{3}{t}x' + \frac{3}{t^2}x = 2t - 1, \quad t > 0.$$
- Visa att nollställena hos funktionerna $x_1(t) = a \cos t + b \sin t$ och $x_2(t) = c \cos t + d \sin t$ "separerar varann" (som i Sturms separationssats) om $ad - bc \neq 0$.
- Antag att funktionen q är kontinuerlig och att $q(t) < 0$ i ett intervall I . Visa att varje icke-trivial lösning till DE:n $x'' + q(t)x = 0$ har högst ett nollställe i I . Gäller detsamma om $q(t) > 0$ i I ?

System av linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Vi skall undersöka system av DE:r av formen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

där A är en reell eller komplex $n \times n$ -matris och $\mathbf{b}(t)$ är en funktion med reella eller komplexa värden. Även om A och $\mathbf{b}(t)$ är reella, är det ofta ändamålsenligt att betrakta *komplexa lösningar*: En sådan är en funktion $\mathbf{x}(t)$ med komplexa värden, vilken satisfierar DE:n.

Homogena system

Vi ser först på ett specialfall:

Sats 7.1. Om A har n linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ och om motsvarande egenvärden är $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, så är

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \mathbf{x}_n$$

den allmänna komplexa lösningen till den homogena ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Om alla egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är olika så är $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ linjärt oberoende.

Bevis. Matrisen $F(t) = [e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 \dots e^{\lambda_n t} \mathbf{x}_n]$ med kolonnvektorerna $e^{\lambda_i t} \mathbf{x}_i$ är en fundamentalmatris, ty

$$\det F(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} x_{11} & \dots & e^{\lambda_n t} x_{n1} \\ - & & - \\ e^{\lambda_1 t} x_{1n} & \dots & e^{\lambda_n t} x_{nn} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} \cdot \det [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$$

är olik noll, eftersom vektorerna $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ är linjärt oberoende.

Antag nu att egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alla är olika. Vi skall genom induktion visa att egenvektorerna är linjärt oberoende. Om $n = 1$ så är $\mathbf{x}_1$ linjärt oberoende, eftersom $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$. Antag att vi redan visat att $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ är linjärt oberoende samt betrakta en linjärkombination

$$(1) \quad c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Genom att multiplicera från vänster med A fås $c_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_k \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, från vilket likheten (1), multiplicerad med λ_k , subtraheras. Vi får att $c_1(\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{x}_1 + \dots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}$, och då är $c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$ enligt induktionsantagandet och därmed också $c_k = 0$. Induktion ger att $c_1 = \dots = c_n = 0$. $\diamond$

Exempel 1.1. I det homogena systemet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

har matrisen egenvärdena 1 och 3. Motsvarande egenvektorer är $(1 \ -1)^T$ och $(1 \ 1)^T$. Den allmänna lösningen är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Då matrisen A är reell, är man ofta intresserad av de reella lösningarna till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Antag att A är en reell $n \times n$ -matris med egenvärdet $\lambda = \gamma + i\omega$ (och $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$) samt att $\mathbf{y} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ (och $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$), där $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är reella vektorer, är en egenvektor svarande mot λ . Mot λ och $\mathbf{y}$ "svarar" då lösningen $e^{\lambda t}\mathbf{y}$, dvs.

$$\begin{aligned} e^{\gamma t}(\cos \omega t + i \sin \omega t)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \\ e^{\gamma t}(\cos \omega t \mathbf{u} - \sin \omega t \mathbf{v}) + i e^{\gamma t}(\sin \omega t \mathbf{u} + \cos \omega t \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Eftersom en funktion $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ är en komplex lösning till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ om och endast om $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ är reella lösningar, erhåller vi som en följd av Sats 7.1:

Korollarium 7.1.1. *Om A är en reell $n \times n$ -matris med n linjärt oberoende egenvektorer, så svarar mot ett reellt egenvärde λ med motsvarande reella egenvektor $\mathbf{x}$ en reell lösning*

$$e^{\lambda t} \mathbf{x}$$

samt mot ett par av konjugerat komplexa egenvärden $\lambda = \gamma \pm i\omega$ med motsvarande egenvektorer $\mathbf{y} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$ de reella lösningarna

$$\begin{aligned} e^{\gamma t}(\cos \omega t \mathbf{u} - \sin \omega t \mathbf{v}), \\ e^{\gamma t}(\sin \omega t \mathbf{u} + \cos \omega t \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Varje reell lösning är en linjärkombination av sådana lösningar.

Det återstår att visa att de i korollariet nämnda lösningarna är "reellt" linjärt oberoende, dvs. att en linjärkombination av dem med reella koefficienter är noll om och endast om alla koefficienter är noll. Vi överlämnar detaljerna åt läsaren.

Exempel 7.2. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

i systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ har egenvärdena $-1 \pm i$ och de motsvarande egenvektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \mp i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna reella lösningen till systemet är därför

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t \right] + C_2 e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t \right].$$

Exponentialfunktionen e^{tA}

Alla lösningar till DE:n $x' = ax$ har formen Ce^{at} . I detta avsnitt skall vi visa att lösningarna till systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ på motsvarande sätt har formen $e^{tA}\mathbf{c}$, där $\mathbf{c}$ är en n -vektor och exponentialfunktionen är *definierad* som den matris man får då tA substitueras i Maclaurinutvecklingen av e^x :

$$(2) \quad e^{tA} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

En oändlig matrisserie av detta slag sägs vara konvergent om följderna av ändliga partialsummor konvergerar elementvis: Om $S_m(t)$ är summan av alla termer med högst graden m , så är matrisfunktionen $S(t)$ seriens summa om $S_m(t)_{ik} \rightarrow S(t)_{ik}$ då $m \rightarrow \infty$ för varje par i, k av rad- och kolonnindex.

Sats 7.2. *Matrisserien (2) är konvergent.*

Bevis. Då man beskriver elementvis konvergens är det bekvämt att använda matrisnormen $|B| = \max_{i,k} |b_{ik}|$. Om B och C betecknar godtyckliga $n \times n$ -matriser och λ ett tal, så gäller följande enkla räkneregler för denna matrisnorm:

$$\begin{aligned} |B + C| &\leq \max(|b_{ik}| + |c_{ik}|) \leq |B| + |C|, \\ |\lambda B| &= |\lambda| \max |b_{ik}| = |\lambda| |B|, \\ |BC| &\leq \max_j \sum_i |b_{ij}| |c_{jk}| \leq n |B| |C|. \end{aligned}$$

Den tredje av dessa räkneregler ger att $|A^k| \leq n^{k-1} |A|^k$ för varje $k \geq 1$. För varje $p \geq 0$ är nu

$$|S_{m+p}(t) - S_m(t)| = \left| \frac{(tA)^{m+1}}{(m+1)!} + \dots + \frac{(tA)^{m+p}}{(m+p)!} \right| \leq \Sigma_m,$$

där

$$\Sigma_m = \frac{1}{n} \left(\frac{(|t|n|A|)^{m+1}}{(m+1)!} + \dots + \frac{(|t|n|A|)^{m+p}}{(m+p)!} + \dots \right) \rightarrow 0$$

då $m \rightarrow \infty$, ty Σ_m är ju "svansen" i den konvergenta Maclaurinutvecklingen av $(1/n)e^{|t|n|A|}$. För varje par i, k av index bildar således matriselementen $S_m(t)_{ik}$ en Cauchyföljd som därmed är konvergent. Serien (2) är alltså konvergent. $\diamond$

Anmärkning 1. På samma sätt som i beviset av Sats 7.2 kan man allmänt visa att om $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ är en hel funktion (dvs. en sådan funktion att serieutvecklingen konvergerar för varje komplext z), så konvergerar serien

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots$$

För seriens summa används den naturliga beteckningen $f(A)$.

Tre viktiga räkneregler gäller för exponentialfunktionen:

Sats 7.3. *För $n \times n$ -matriser A och B gäller:*

- (a) Om $AB = BA$ så är $e^{A+B} = e^A e^B$;
 (b) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;
 (c) $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = e^{tA}A = Ae^{tA}$ och därmed är e^{tA} en fundamentalmatris för systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Bevis. Vi nöjer oss med att skissera beviset (detaljerade motiveringar kan man finna i någon bok i linjär algebra). Notera att den vanliga binomialformeln gäller för uttrycket $(A+B)^p$ om $AB = BA$. Påståendet (a) motiverar vi med

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!} \right) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{A^p B^q}{p! q!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{p+q=r} \frac{r!}{p! q!} A^p B^q = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{p=0}^r \binom{r}{p} A^p B^{r-p} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (A+B)^r = e^{A+B}. \end{aligned}$$

Eftersom $A(-A) = (-A)A$, är enligt (a) $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^{A-A} = I$. Således gäller påståendet (b). Påståendet (c) fås genom termvis derivering av serieutvecklingen för e^{tA} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{tA}) &= \frac{d}{dt} \left(I + tA + \cdots + \frac{t^k A^k}{k!} + \cdots \right) \\ &= A + tA^2 + \cdots + \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} + \cdots \\ &= A \left(I + tA + \cdots + \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots \right) = Ae^{tA}. \diamond \end{aligned}$$

Exponentialfunktionen e^{tA} ger oss ett nytt sätt att få fram lösningarna till ett homogent system av DE:er med konstanta koefficienter:

Sats 7.4. Låt A beteckna en kvadratisk matris. Funktionen $\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0$ är den entydiga lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Bevis. Eftersom e^{tA} är en fundamentalmatris enligt Sats 7.3 c), har den allmänna lösningen till systemet formen $\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{c}$. Genom att kräva att $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, fås för den konstanta vektorn $\mathbf{c}$ värdet $\mathbf{c} = e^{-t_0 A} \mathbf{x}_0$, vilket ger satsens påstående. $\diamond$

En $n \times n$ -matris A sägs vara *diagonaliserbar* om det existerar en icke-singulär matris P sådan att

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ - & - & \cdots & - \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Talen λ_i i D 's diagonal är A 's egenvärden, eftersom

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det P^{-1} \cdot \det(D - \lambda I) \cdot \det P = \\ &= \det(D - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).\end{aligned}$$

I den linjära algebran visas, att om $n \times n$ -matrisen A har n linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ (se föregående avsnitt), så är A diagonaliserbar. (I själva verket kan man som P välja den matris $(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$ som har egenvektorerna som kolonner.) Det finns matriser som inte är diagonaliserbara, t.ex. matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I den linjära algebran visas emellertid att för varje matris A finns ett icke-singulärt P , som försätter A i *Jordans normalform*

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ - & - & \cdots & - \\ 0 & 0 & \cdots & J_p \end{pmatrix},$$

i vilken varje J_k betecknar ett $n_k \times n_k$ -*Jordanblock* av formen

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & \cdots & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, p).$$

Talet λ_k i diagonalen i varje block J_k är ett egenvärde till A . Samma egenvärde kan förekomma som diagonalelement i olika Jordanblock. Antalet Jordanblock som innehåller ett visst egenvärde är likamed det maximala antalet linjärt oberoende egenvektorer svarande mot egenvärdet.

Exempel 7.3. Om matrisen A har det tredubbla egenvärdet 2 och antalet motsvarande linjärt oberoende egenvektorer är två, så existerar det ett icke-singulärt P sådant att

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cdot & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & 0 & 2 & \\ & & & & 2 \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

(oväsentliga nollor har bortlämnats). Det finns ett annat icke-singulärt P som överför A på en snarlik normalform, i vilken de två ovan utskrivna Jordanblocken är permuterade. Jordanblockens storlek och antal är nämligen entydigt bestämda av matrisen A men deras ordningsföljd på diagonalen beror av transformationen P .

Sats 7.5. Låt A , B och P vara $n \times n$ -matriser. Antag att P är inverterbar samt att $P^{-1}AP = B$ (A och B är således similerade). Om $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ är en hel funktion, så är

$$P^{-1}f(A)P = f(B).$$

Bevis. Eftersom matrismultiplikation är en kontinuerlig operation, är

$$\begin{aligned} P^{-1}f(A)P &= P^{-1} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m a_k A^k \right) P = \lim_{m \rightarrow \infty} P^{-1} \left(\sum_{k=0}^m a_k A^k \right) P \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m a_k P^{-1} A^k P = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m a_k (P^{-1}AP)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k = f(B). \diamond \end{aligned}$$

Om $P^{-1}AP = J$ är i Jordans normalform så är $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$ enligt satsen. Eftersom potenser av J fås genom att man bildar motsvarande potenser av Jordanblocken $J_1, \dots, J_p$ i J , är

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_p} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Om A är diagonaliserbar, är

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Definition 7.1. En matris A sägs vara *nilpotent* om $A^m = 0$ för något positivt heltal m .

Ett Jordanblock är alltid av formen $J_k = \lambda_k I + E$, där E är en matris i vilken alla matriselement är nollor utom de omedelbart ovanför huvuddiagonalen, vilka är ettorn. Nu är E^2 en liknande matris men med ettorna två steg ovanför huvuddiagonalen osv.. Om E är en $r \times r$ -matris är $E^r = 0$. Då E därmed är nilpotent, har vi en **ändlig** serieutvecklingen för e^{tJ_k} :

$$\begin{aligned} e^{tJ_k} &= e^{t\lambda_k I} e^{tE} = e^{\lambda_k t} \left(I + tE + \dots + \frac{(tE)^{r-1}}{(r-1)!} \right) \\ &= e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdot & \cdot & t^{r-1}/(r-1)! \\ & 1 & t & & & t^{r-2}/(r-2)! \\ & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exempel 7.4. Matrisen A nedan är i Jordans normalform (notera att mot egenvärdet 2, som är dubbelt, svarar precis en linjärt oberoende egenvektor, medan mot det tredubbla egenvärdet 0 svarar precis två) och motsvarande exponentialfunktion e^{tA} blir (oväsentliga nollor bortlämnas):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & & & \\ & e^{2t} & & & \\ & & 1 & t & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkning av e^{tA}

Vi skall utveckla en praktiskt metod att härleda explicita slutna formler för exponentialfunktionen e^{tA} . För detta ändamål behöver vi lite teori. Vi börjar med Cayley-Hamiltons sats:

Sats 7.6. Om $p(\lambda) = 0$ är sekulärekvationen för matrisen A , så är $p(A) = 0$.

Bevis. Det existerar ett inverterbart P sådant att $P^{-1}AP = J$, där J är A :s framställning i Jordans normalform. Enligt Sats 7.5 är

$$p(A) = Pp(J)P^{-1} = P \begin{pmatrix} p(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(J_q) \end{pmatrix} P^{-1},$$

där $J_1, \dots, J_q$ betecknar Jordanblocken i J . Om $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_q)^{n_q}$, är

$$p(J_k) = (J_k - \lambda_1 I)^{n_1} \cdots (J_k - \lambda_k I)^{n_k} \cdots (J_k - \lambda_q I)^{n_q} = 0$$

eftersom faktorn $(J_k - \lambda_k I)^{n_k} = 0$ ($k = 1, \dots, q$). Alltså är $p(A) = 0$. $\diamond$

Antag nu att A är en $n \times n$ -matris och att $p(\lambda)$ är ett polynom sådant att $p(A) = 0$. Enligt Cayley-Hamiltons sats kan vi som polynom p välja det karakteristiska polynomet

$$p(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_n \lambda^n$$

men om man finner ett polynom med lägre gradtal med samma egenskap, så tar vi naturligtvis detta i stället. I våra fortsatta kalkyler tänker vi oss emellertid att p är det karakteristiska polynomet.

För e^{tA} gör vi ansatsen

$$e^{tA} = \phi_0(t)I + \phi_1(t)A + \cdots + \phi_{n-1}(t)A^{n-1}.$$

Vi kommer att se att existens- och entydighetssatsen garanterar existensen och entydigheten hos koefficientfunktionerna $\phi_k(t)$. Den metod att bestämma funktionerna $\phi_k(t)$ som vi nu skall beskriva är närbesläktad med en metod som i litteraturen

tillskrivs Putzer. Tills vidare *antar* vi att varje $\phi(t)$ kan deriveras hur många gånger som helst. I efterskott kommer vi att se att antagandet är berättigat. Eftersom $A^n = -a_0 I - \dots - a_{n-1} A^{n-1}$, är

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi'_i A^i = \frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = \sum_{i=1}^n \phi_{i-1} A^i = -a_0 \phi_{n-1} I + \sum_{i=1}^{n-1} (\phi_{i-1} - a_i \phi_{n-1}) A^i.$$

Vi föresätter oss därför att finna funktioner ϕ_i , $i = 0, \dots, n-1$, som satisfierar systemet

$$(3) \quad \begin{cases} \phi'_0 &= & -a_0 \phi_{n-1} \\ \phi'_1 &= \phi_0 & -a_1 \phi_{n-1} \\ &- & - & - \\ \phi'_{n-1} &= \phi_{n-2} & -a_{n-1} \phi_{n-1} \end{cases}$$

och för vilka $\phi_0(0) = 1$ och $\phi_k(0) = 0$ för $k = 1, \dots, n-1$. Antag nu att funktionerna ϕ_i uppfyller dessa krav. Genom att i (3) derivera uttrycket för ϕ'_i i gånger med avseende på t och därefter addera ihop resultaten, kommer vi till att $\phi_{n-1}(t)$ satisfierar den linjära DE:n

$$(4) \quad x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0.$$

Som ansats för ϕ_{n-1} kan vi alltså ta den allmänna lösningen till (4). De övriga funktionerna fås därefter genom att man använder de $n-1$ sista likheterna i (3) som rekursionsformler (observera att dessa likheter tillsammans med (4) ger den första ekvationen i (3)):

Sats 7.7. *Antag att för en kvadratisk matris A och för polynomet $p(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$ gäller att $p(A) = 0$. Då är*

$$e^{tA} = \phi_0(t)I + \phi_1(t)A + \dots + \phi_{n-1}(t)A^{n-1},$$

där funktionerna ϕ_k fås så, att man som ansats för ϕ_{n-1} tar den allmänna lösningen till (4) samt därefter beräknar övriga funktioner ϕ_k med hjälp av rekursionsformeln

$$\phi_{k-1} = \phi'_k + a_k \phi_{n-1}, \quad k = n-1, \dots, 1.$$

Koefficienterna i den allmänna lösningen till (4) fås ur villkoren $\phi_0(0) = 1$ och $\phi_k(0) = 0$ ($k = 1, \dots, n-1$). Funktionerna ϕ_k är härigenom entydigt bestämda.

Bevis. Det begynnelsevärdesproblem som definieras av det linjära systemet (3) och de givna begynnelsevärdena för funktionerna ϕ_k har alltid en entydig global lösning enligt existens- och entydighetssatsen. För matrisfunktionen

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(t) A^k$$

gäller då att

$$\begin{aligned} F'(t) &= AF(t), \\ F(0) &= I. \end{aligned}$$

Eftersom också matrisfunktionen e^{tA} satisfierar detta begynnelsevärdesproblem, är $F(t) = e^{tA}$ enligt entydighetssatsen. $\diamond$

Exempel 7.5. Matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ har sekularekvationen $\lambda^2 + 1 = 0$, vilken har lösningarna $\lambda = \pm i$. Vi utgår därför från ansatsen $\phi_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, men eftersom $\phi_1(0)$ bör vara noll, är $C_1 = 0$. Således är $\phi_1(t) = C_2 \sin t$. Eftersom $a_1 = 0$ är $\phi_0(t) = \phi_1'(t) + a_1 \phi_1 = C_2 \cos t$ enligt Sats 7.7. Villkoret $\phi_0(0) = 1$ ger att $C_2 = 1$, varför

$$e^{tA} = \phi_0(t)I + \phi_1(t)A = \cos t I + \sin t A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Exempel 7.6. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

har det dubbla egenvärdet 1 och det enkla egenvärdet -1 . Sekularekvationen är således $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, ur vilken vi kan avläsa att $a_2 = a_1 = -1$. För ϕ_2 har vi ansatsen $\phi_2(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{-t}$ och begynnelsevillkoret $\phi_2(0) = 0$ ger att $C_1 + C_3 = 0$. Funktionerna ϕ_1 och ϕ_0 beräknas rekursivt enligt formeln i Sats 7.7:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2' + a_2 \phi_2 = C_2 e^t - 2C_3 e^{-t}, \\ \phi_0 &= \phi_1' + a_1 \phi_1 = (C_2 - C_1 - C_2 t)e^t + C_3 e^{-t}. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren $\phi_1(0) = 0$ och $\phi_0(0) = 1$, tillsammans med det villkor som vi redan härlett, leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0, \\ C_2 - 2C_3 = 0, \\ -C_1 + C_2 + C_3 = 1, \end{cases}$$

vilket har lösningen $C_1 = -1/4$, $C_2 = 1/2$ och $C_3 = 1/4$. Alltså är

$$\begin{cases} \phi_0(t) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t\right)e^t + \frac{1}{4}e^{-t}, \\ \phi_1(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \\ \phi_2(t) = \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \end{cases}$$

och $e^{tA} = \phi_0(t)I + \phi_1(t)A + \phi_2(t)A^2$.

Exempel 7.7. Låt A vara en godtycklig 2×2 -matris med egenvärdena λ_1 och λ_2 . Sekularekvationen kan skrivas $\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 = 0$, dvs. $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ och $a_0 = \lambda_1 \lambda_2$. Om egenvärdena är olika, är

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \phi_0(t) &= \phi_1'(t) + a_1 \phi_1(t) = -C_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - C_2 \lambda_1 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Koefficienterna bör alltså uppfylla villkoren $C_1 + C_2 = 0$ och $C_1\lambda_2 + C_2\lambda_1 = -1$, vilket ger att $C_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} = -C_2$. Efter omformning fås

$$e^{tA} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [e^{\lambda_1 t}(A - \lambda_2 I) - e^{\lambda_2 t}(A - \lambda_1 I)] .$$

Det fall då egenvärdena är lika, kan behandlas på ett likartat sätt (se övn.uppg. 9).

I nästa exempel löser vi ett begynnelsevärdesproblem med hjälp av exponentialfunktionen på det sätt som Sats 7.4 anger.

Exempel 7.8. Låt A beteckna matrisen i systemet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

för vilket vi föreskriver begynnelsevärdena $x(1) = 1$ och $y(1) = 2$. Sekulärekvationen för A är $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ och bägge egenvärdena är 4. Vi gör därför ansatsen $\phi_1 = (C_1 t + C_2)e^{4t}$ och konstaterar att C_2 måste vara noll, eftersom $\phi_1(0)$ bör vara noll. Vidare är $\phi_0 = \phi_1' + a_1\phi_1 = C_1 e^{4t} - 4C_1 t e^{4t}$, där villkoret $\phi_0(0) = 1$ ger att $C_1 = 1$. Således är

$$e^{tA} = e^{4t} [(1 - 4t)I + tA] = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 - 2t & 2t \\ -2t & 1 + 2t \end{pmatrix} .$$

Lösningen till det givna begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-1)A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{4t-4} \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 2t \end{pmatrix} .$$

Inhomogena system

I Sats 5.5 härleddes en formel för en partikulärlösning till ett inhomogent system

$$(5) \quad \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) ,$$

uttryckt med hjälp av en fundamentalmatris $F(t)$. Eftersom e^{tA} är en fundamentalmatris, ger denna formel uttrycket

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} \mathbf{b}(s) ds = \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{b}(s) ds$$

för en partikulärlösning till (5).

Exempel 7.9. I exempel 7.8 visade vi att om A betecknar den kvadratiska matrisen i systemet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} ,$$

så är

$$e^{tA} = e^{4t} \begin{pmatrix} 1-2t & 2t \\ -2t & 1+2t \end{pmatrix}.$$

Enligt Sats 7.3 (b) bildas den inversa matrisen genom att man ersätter t med $-t$. Således är

$$\begin{aligned} \int^t e^{-sA} \mathbf{b}(s) ds &= \int^t e^{-4s} \begin{pmatrix} 1+2s & -2s \\ 2s & 1-2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \int^t e^{-3s} ds \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

och

$$e^{tA} \int^t e^{-sA} \mathbf{b}(s) ds = -\frac{1}{3} e^{4t} e^{-3t} \begin{pmatrix} 1-2t & 2t \\ -2t & 1+2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är en partikulärlösning till det givna systemet.

Låt oss nu se om vi kan säga någonting allmänt om det fall då $\mathbf{b}(t) = e^{\mu t} \mathbf{b}$, där $\mathbf{b}$ är en konstant vektor. Med föregående exempel som modell söker vi efter en partikulärlösning av formen $\mathbf{x}(t) = e^{\mu t} \mathbf{u}$. Insättning i $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\mu t} \mathbf{b}$ ger efter förenkling att $\mathbf{x}(t)$ är en lösning om och endast om den konstanta vektorn $\mathbf{u}$ satisfierar $(\mu I - A)\mathbf{u} = \mathbf{b}$. Om μ är ett egenvärde, kan det inträffa att ingen vektor $\mathbf{u}$ uppfyller denna likhet. I annat fall gäller allmänt:

Sats 7.8. Om μ inte är ett egenvärde till A , är

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mu t} (\mu I - A)^{-1} \mathbf{b}$$

en partikulärlösning till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\mu t} \mathbf{b}$.

Operatorn $(\mu I - A)^{-1}$ existerar för alla värden på μ , som inte är egenvärden till A , och kallas *resolventen* till A .

Exempel 7.10. För att lösa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

kan vi använda oss av superpositionsprincipen: Om $\mathbf{x}_i(t)$ är en lösning till

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\mu_i t} \mathbf{b}_i \quad (i = 1, 2),$$

så är $\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$ en lösning till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\mu_1 t} \mathbf{b}_1 + e^{\mu_2 t} \mathbf{b}_2$. Låt A vara den kvadratiske matrisen i systemet, sätt $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mathbf{b}_1 = (1 \ 1)^T$ och $\mathbf{b}_2 = (1 \ -1)^T$. I exempel 7.9 bestämde vi en partikulärlösning till den första ekvationen (den där $i = 1$), och fann lösningen $\mathbf{x}_1(t) = -(1/3)e^t (1 \ 1)^T$. För att bestämma en partikulärlösning till den andra ekvationen, dvs. till

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\mu_2 t} \mathbf{b}_2 = A\mathbf{x} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

kan vi göra ansatsen $\mathbf{x}_2(t) = e^{3t}\mathbf{u}$ (ty 3 är inget egenvärde till A). Efter insättning finner vi att om $\mathbf{u} = -\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}^T$, så är $\mathbf{x}_2(t)$ en lösning. Ett annat sätt är att bestämma resolventen $(3I - A)^{-1}$ med hjälp av Cayley–Hamiltons sats. För att kunna skriva sekulärekvationen $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ med hjälp av potenser av $\lambda - 3$, inför vi för ett ögonblick symbolen $x = \lambda - 3$ och får då ekvationen $x^2 - 2x + 1 = 0$, vilken även kan skrivas $(\lambda - 3)^2 - 2(\lambda - 3) = -1$. Enligt Cayley–Hamiltons sats är $(A - 3I)[(A - 3I) - 2I] = (A - 3I)^2 - 2(A - 3I) = -I$, dvs.

$$(3I - A)^{-1} = A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Formeln i Sats 7.8 leder nu till precis samma partikulärlösning $\mathbf{x}_2(t)$ som den vi kom till genom en ansats. Den ursprungliga ekvationen har alltså partikulärlösningen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) = -\frac{1}{3}e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Låt oss till slut betrakta det fall att $\mathbf{b}(t) = e^{\gamma t}(\mathbf{b}_1 \cos \omega t + \mathbf{b}_2 \sin \omega t)$, där $\gamma \pm i\omega$ inte är egenvärden till A . Nu kan $\mathbf{b}(t)$ skrivas

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= e^{\gamma t} \left[\frac{\mathbf{b}_1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - i\frac{\mathbf{b}_2}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{b}_1 - i\mathbf{b}_2)e^{(\gamma+i\omega)t} + (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)e^{(\gamma-i\omega)t} \right]. \end{aligned}$$

Men detta innebär (enligt superpositionsprincipen och Sats 7.8) att ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ har en partikulärlösning av formen $\mathbf{x}(t) = e^{\gamma t}(e^{i\omega t}\mathbf{U} + e^{-i\omega t}\mathbf{V})$. En ansats av formen

$$\mathbf{x}(t) = e^{\gamma t}(\cos \omega t \mathbf{u} + \sin \omega t \mathbf{v})$$

kan således användas.

System av andra ordningen

Ett system av DE:r av andra ordningen med konstanta koefficienter

$$(6) \quad \mathbf{x}'' = A\mathbf{x}' + B\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

där A och B är kvadratiske matriser, kan alltid återföras på ett system av första ordningen genom att man sätter $\mathbf{x}' = \mathbf{y}$. Genom att på detta sätt fördubbla antalet obekanta funktioner, fås ett system av första ordningen

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + B\mathbf{x} + \mathbf{b}(t). \end{cases}$$

eller i matrisform

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}.$$

Detta system av första ordningen kan lösas på vanligt sätt. Systemen (6) och (7) är ekvivalenta i den meningen att varje lösning till (6) genererar en lösning till (7) och omvänt.

Betrakta nu den enklare ekvationen

$$(8) \quad \mathbf{x}'' = A\mathbf{x},$$

där A antas vara en diagonaliserbar $n \times n$ -matris. Då existerar det en inverterbar matris $P = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$, i vilken kolonnvektorer $\mathbf{x}_k$ är egenvektorer till A och för vilken

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Om vi nu sätter $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$ så får (8) formen $\mathbf{y}'' = D\mathbf{y}$. Detta är ett betydligt enklare system, eftersom det sönderfaller i DE:r $y_k'' = \lambda_k y_k$ ($k = 1, \dots, n$), som inte är kopplade till varandra. För varje k är $y_k(t) = C_k^{(1)} \exp(\sqrt{\lambda_k}t) + C_k^{(2)} \exp(-\sqrt{\lambda_k}t)$ och således $\mathbf{y}(t) = \sum_k y_k(t)\mathbf{e}_k$, där $\mathbf{e}_k$ ($k = 1, \dots, n$) betecknar de naturliga enhetsvektorer. Genom att multiplicera med P från vänster, får vi den allmänna (komplexa) lösningen till (8):

Sats 7.9. *Antag att A är en diagonaliserbar $n \times n$ -matris med egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ och att motsvarande linjärt oberoende egenvektorer är $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Då är*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n \left(C_k^{(1)} e^{\sqrt{\lambda_k}t} + C_k^{(2)} e^{-\sqrt{\lambda_k}t} \right) \mathbf{x}_k$$

den allmänna komplexa lösningen till (8).

Här kan det vara skäl att återkalla i minnet att A är diagonaliserbar t.ex. om alla egenvärden är olika eller om A är en symmetrisk reell matris. I det senare fallet är alla egenvärden reella och egenvektorer kan då också väljas reella. Sats 7.9 har således t.ex. följande korollarium:

Korollarium 7.9.1. *Om A är en symmetrisk reell matris med negativa egenvärden $\lambda_k = -\omega_k^2$ och motsvarande linjärt oberoende reella egenvektorer $\mathbf{x}_k$ ($k = 1, \dots, n$), så är*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=1}^n \left(C_k^{(1)} \cos(\omega_k t) + C_k^{(2)} \sin(\omega_k t) \right) \mathbf{x}_k \\ &= \sum_{k=1}^n C_k \cos(\omega_k t - \phi_k) \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

den allmänna reella lösningen till (8).

En liknande teknik kan användas även om A i ekvation (8) inte är diagonaliserbar: Det existerar alltid ett inverterbart P med $P^{-1}AP = J$ i Jordans normalform. Genom att

sätta $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$, övergår (8) i en ekvation $\mathbf{y}'' = J\mathbf{y}$, som sönderfaller i ett antal delsystem $\mathbf{y}_k'' = J_k\mathbf{y}_k$, där varje J_k är ett Jordanblock. I ett sådant delsystem sätter vi $\mathbf{z}_k(t) = \mathbf{y}_k'(t)$ och får ett system av första ordningen

$$\mathbf{u}_k' = B_k\mathbf{u}_k, \quad \text{varvid} \quad \mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{z}_k \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 & I \\ J_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Genom att sätta in B_k :s potenser

$$B_k^2 = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix}, \quad B_k^3 = \begin{pmatrix} 0 & J_k \\ J_k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_k^4 = \begin{pmatrix} J_k^2 & 0 \\ 0 & J_k^2 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}$$

i serieutvecklingen för e^{tB_k} fås:

$$e^{tB_k} = \begin{pmatrix} I + \frac{t^2 J_k}{2!} + \frac{t^4 J_k^2}{4!} + \dots & tI + \frac{t^3 J_k}{3!} + \frac{t^5 J_k^2}{5!} + \dots \\ tJ_k + \frac{t^3 J_k^2}{3!} + \frac{t^5 J_k^3}{5!} + \dots & I + \frac{t^2 J_k}{2!} + \frac{t^4 J_k^2}{4!} + \dots \end{pmatrix}.$$

Matrisen J_k är nilpotent om egenvärdet i dess diagonal är noll och serieutvecklingarna är då ändliga. Om J_k är t.ex. en 2×2 -matris, är i så fall

$$e^{tB_k} = \begin{pmatrix} 1 & t^2/2! & t & t^3/3! \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & t & 1 & t^2/2! \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{y}_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2/2! \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}_k^{(0)} + \begin{pmatrix} t & t^3/3! \\ 0 & t \end{pmatrix} \mathbf{z}_k^{(0)}.$$

Om egenvärdet λ_k i matrisen J_k :s diagonal inte är noll, har denna matris alltid (minst) en kvadratrots

$$J_k^{1/2} = (\lambda_k I + E)^{1/2} = \sqrt{\lambda_k} \left(I + \frac{E}{2\lambda_k} - \frac{E^2}{8\lambda_k^2} + \dots \right),$$

där $\sqrt{\lambda_k}$ är någon (komplex) kvadratrots och där utvecklingen i binomialserie är ändlig emedan E är nilpotent. Låt $J_k^{-1/2}$ beteckna inversen till $J_k^{1/2}$. Då är

$$e^{tB_k} = \begin{pmatrix} \cosh(tJ_k^{1/2}) & J_k^{-1/2} \sinh(tJ_k^{1/2}) \\ J_k^{1/2} \sinh(tJ_k^{1/2}) & \cosh(tJ_k^{1/2}) \end{pmatrix}$$

$$\text{och } \mathbf{y}_k(t) = \cosh(tJ_k^{1/2}) \mathbf{y}_k^{(0)} + J_k^{-1/2} \sinh(tJ_k^{1/2}) \mathbf{z}_k^{(0)}.$$

Variabla koefficienter

En DE:n av formen $x' = a(t)x$ har den allmänna lösningen $x(t) = C \exp(\int a(t) dt)$. Vi noterar här (utan detaljerade motiveringar) att en liknande formel gäller under vissa starkt begränsande förutsättningar för ett system

$$(9) \quad \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$$

med en variabel koefficientmatris $A(t)$. Låt oss återkalla i minnet att två matriser A och B sägs *kommutera* om $AB = BA$.

Sats 7.10. *Antag att den kvadratiske koefficientmatrisen $A(t)$ är kontinuerlig i ett intervall I samt låt $t_0 \in I$. Om $A(t)$ och matrisen*

$$\tilde{A}(t) = \int_{t_0}^t A(s) ds$$

kommuterar för varje $t \in I$, så är $F(t) = e^{\tilde{A}(t)}$ en fundamentallösning till (9).

Bevisskiss. Eftersom $\tilde{A}'(t) = A(t)$, kommuterar $\tilde{A}(t)$ och $\tilde{A}'(t)$. Med hjälp av detta visar man genom induktion att derivatan av $\tilde{A}(t)^n$ är $nA(t)\tilde{A}(t)^{n-1}$. Då det dessutom gäller att exponentialserien får deriveras termvis, är

$$\frac{dF(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} nA(t)\tilde{A}(t)^{n-1} = A(t)F(t),$$

dvs. $F(t)$ är en fundamentallösning.

Fasporträtt i två dimensioner

Lösningarna $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ till ett system $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ av n DE:r kan uppfattas som parameterframställningar av kurvor, *faskurvor*, i ett n -dimensionellt rum $\mathbf{R}^n$, det s.k. *fasrummet*. Skaran av alla faskurvor utgör systemets *fasporträtt*. Punkter i fasrummet kallas *tillstånd*. Faskurvorna visar alltså hur tillstånden förändras då parametern t ("tiden") växer. För att komplettera bilden brukar man förse faskurvorna med en pilriktning i vektorfältets $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ riktning ("hastighetsfältets" riktning).

Vi skall beskriva alla möjliga typer av fasporträtt för ett homogent system $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ då A är en reell 2×2 -matris

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

En *jämviktspunkt* är en punkt $\mathbf{x}$ sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (varvid $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}$ är lösning). Mängden av alla jämviktspunkter är tydligen ett linjärt underrum av det tvådimensionella planet, dvs. antingen

- (1) mängden $\{\mathbf{0}\}$,
- (2) en rät linje genom origo, eller
- (3) hela planet.

Den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$ kan skrivas $\lambda^2 - S\lambda + D = 0$, där $S = \text{tr } A$ och $D = \det A$. Egenvärdena λ_1 och λ_2 är alltså

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(S \pm \sqrt{S^2 - 4D} \right).$$

Notera att $\lambda_1 + \lambda_2 = S$ och $\lambda_1 \lambda_2 = D$. Vi kan klassificera olika typer av fasporträtt genom att ange att parametrarna D , S och $S^2 - 4D$ är > 0 eller < 0 . Dessa typer är

generiska (dvs. strukturellt stabila) eftersom en mycket liten ändring av matrisen A inte åstadkommer ett teckenbyte för någon av dessa parametrar. Vid "gränsen" mellan de generiska fasporträtten, dvs. där $D = 0$, $S = 0$ eller $S^2 = 4D$ har vi ett antal icke-generiska typer av fasporträtt. En hur liten ändring som helst av matrisen A kan leda till att ett icke-generiskt fasporträtt övergår i en annan typ. Fallen (I) till (V) nedan är generiska (se fig. 2).

I. *Instabil knut* (instabil nod); $D > 0$, $S > 0$, $S^2 > 4D$: Eftersom $\lambda_1 + \lambda_2 = S > 0$ och $\lambda_1 \lambda_2 = D > 0$ är λ_1 och λ_2 reella och positiva. Låt $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ vara motsvarande reella egenvektorer. Enligt Sats 1 är $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2$ den allmänna reella lösningen till systemet. Vi inför ett (eventuellt snedvinkligt) nytt koordinatsystem, genom att skriva alla vektorer som linjärkombinationer av $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ och låta koefficienterna ξ och η utgöra de nya koordinaterna. Vi sätter alltså $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}$ och $\eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$ och finner att alla kurvor av formen $\eta = C \xi^k$, där C är godtyckligt och $k = \lambda_2/\lambda_1$ består av tre faskurvor: Jämviktspunkten är en degenererad faskurva medan de halvor av kurvan som separeras av jämviktspunkten är två andra faskurvor. De räta linjerna i egenvektorernas riktning, dvs. ξ - och η -axlarna kallas *separatriser*. Vardera separatrisen består av tre faskurvor. Jämviktspunkten sägs vara instabil på grund av att faskurvornas pilar pekar bortåt (se fig. 1 (a)).

II. *Instabil spiral* (instabilt fokus); $D > 0$, $S > 0$, $S^2 < 4D$: I detta fall är egenvärdena λ_1 och λ_2 konjugerade komplexa tal $\gamma \pm i\omega$, där $\gamma > 0$ och $\omega \neq 0$. Om $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är reella, är de motsvarande egenvektorerna, så är enligt Korollarium 1.1 de reella lösningarna av formen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= C_1 e^{\gamma t} (\cos \omega t \mathbf{u} - \sin \omega t \mathbf{v}) + C_2 e^{\gamma t} (\sin \omega t \mathbf{u} + \cos \omega t \mathbf{v}) \\ &= C e^{\gamma t} [\cos(\omega t - \phi) \mathbf{u} - \sin(\omega t - \phi) \mathbf{v}], \end{aligned}$$

där $\tan \phi = C_2/C_1$ och $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ (se fig 1 (b)).



(a)

(b)

(c)

fig. 1

III. *Stabil knut* (stabil nod); $D > 0$, $S < 0$, $S^2 > 4D$: Egenvärdena är reella, negativa och olika. Faskurvorna ser ut som de i fall I men med pilarna omsvängda.

IV. *Stabil spiral* (stabilt fokus); $D > 0$, $S < 0$, $S^2 < 4D$: Egenvärdena är konjugerade komplexa tal $\gamma \pm i\omega$, där $\gamma > 0$ och $\omega \neq 0$. Faskurvorna ser ut som de i fall II men med pilarna omsvängda.

V. *Sadelpunkt*; $D < 0$: Det finns ett negativt egenvärde λ_1 samt ett positivt, λ_2 . Enligt Sats 1 är den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2$, där $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är egenvektorer svarande mot λ_1 respektive λ_2 . Som i fall I inför vi ett nytt koordinatsystem och sätter $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}$ och $\eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$. Faskurvor är alltså linjen $\xi = 0$ samt alla kurvor av formen $\eta = C \xi^k$, där $k = (\lambda_1/\lambda_2) < 0$. Precis som i fall I kallas ξ - och η -axlarna *separatriser* (se fig. 1 (c)).

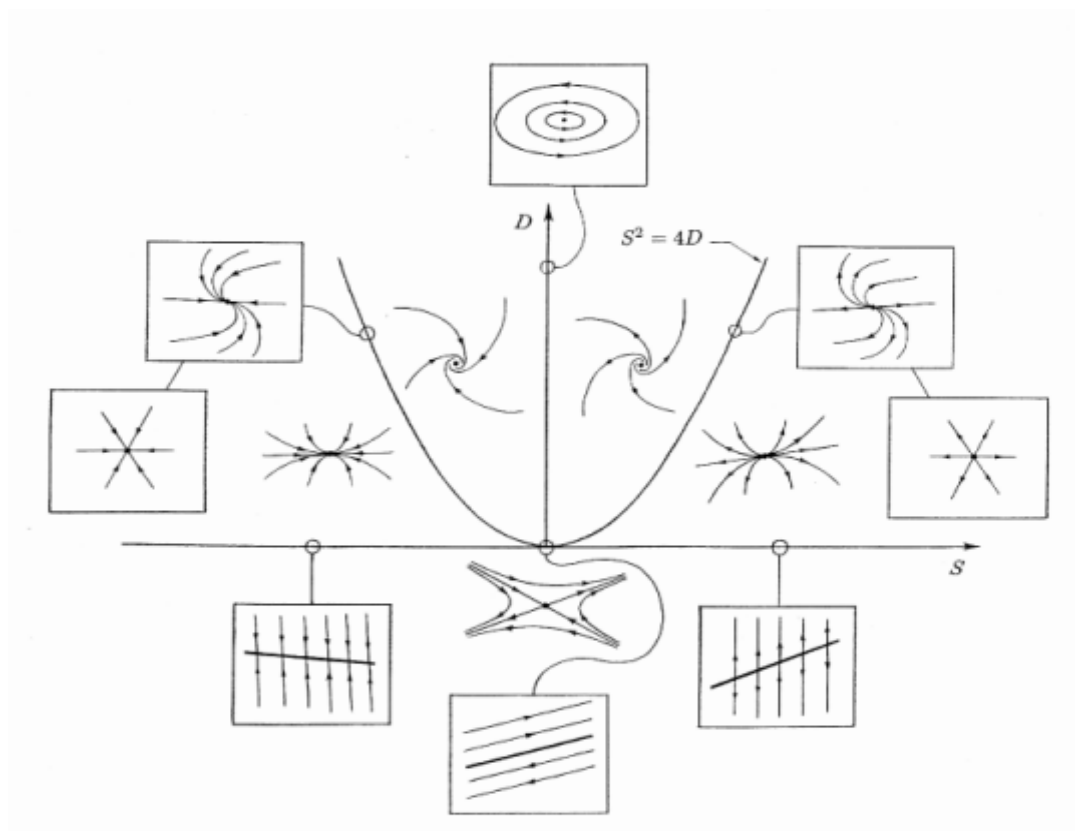


fig. 2

Låt oss nu se på de icke-generiska fallen (gränsfallen):

Oegentlig knut (oegentlig nod); $D > 0$, $S^2 = 4D$: Egenvärdena är lika och reella. Jordans normalform $P^{-1}AP$ är någondera av matriserna

$$(\alpha) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (\beta) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ur $D > 0$ följer att $\lambda \neq 0$. Systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ kan skrivas $(P^{-1}\mathbf{x})' = (P^{-1}AP)(P^{-1}\mathbf{x})$. Genom att sätta $(\xi \ \eta)^T = P^{-1}\mathbf{x}$, inför vi nya koordinater ξ och η :

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \xi' = \lambda\xi + \eta \\ \eta' = \lambda\eta \end{cases} \quad (\beta) \quad \begin{cases} \xi' = \lambda\xi \\ \eta' = \lambda\eta \end{cases}.$$

Dessa system har de allmänna lösningarna

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \xi = e^{\lambda t}(C_1 t + C_2) \\ \eta = C_1 e^{\lambda t} \end{cases} \quad (\beta) \quad \begin{cases} \xi = C_1 e^{\lambda t} \\ \eta = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}.$$

I bägge fallen sägs den oegentliga knuten vara instabil om $\lambda > 0$ och stabil om $\lambda < 0$. I fallet (β) är faskurvorna strålar som utgår från jämviktspunkten. Denna sägs därför vara en *stjärnpunkt*.

Centrum (vortex); $D > 0$, $S = 0$: Egenvärdena är konjugerade komplexa tal av formen $\pm i\omega$. Som i fallen II och IV fås den allmänna lösningen

$$\mathbf{x}(t) = C[\cos(\omega t - \phi)\mathbf{u} - \sin(\omega t - \phi)\mathbf{v}].$$

Faskurvorna är tydligen i detta fall en skara av ellipser kring jämviktspunkten.

$D = 0$, $S > 0$: Ett egenvärde är noll medan det andra, λ , är positivt. Enligt Sats 7.1 är $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1 + C_2e^{\lambda t}\mathbf{x}_2$ den allmänna lösningen då $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ betecknar egenvektorer. I ett $\xi\eta$ -koordinatsystem har vi alltså lösningarna $\xi = C_1$, $\eta = C_2e^{\lambda t}$. Varje punkt på linjen $\eta = 0$, dvs. ξ -axeln, är en jämviktspunkt. Övriga faskurvorna är tydligen strålar, som är parallella med η -axeln och utgår från ξ -axeln.

$D = 0$, $S < 0$: Ett egenvärde är noll medan det andra är negativt. Faskurvorna är som i föregående fall men med pilarna omsvängda.

$D = 0$, $S = 0$: Bägge egenvärdena är noll. Nu är antingen $A = 0$, i vilket fall hela planet består av idel jämviktspunkter, eller så är matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordans normalform för A . Uttryckt i motsvarande ξ - och η -koordinater får vi i det senare fallet systemet

$$\begin{cases} \xi' = \eta \\ \eta' = 0, \end{cases}$$

vilket har lösningar av formen $\xi = C_1t + C_2$, $\eta = C_1$. Faskurvorna är rätta linjer parallella med ξ -axeln, försedda med olika pilriktningar på olika sidor om ξ -axeln.

Definition 7.2. Systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sägs vara *asymptotiskt stabilt* om alla lösningar $\mathbf{x}(t)$ går mot $\mathbf{0}$ då $t \rightarrow +\infty$. Det sägs vara *stabilt* om alla lösningar är begränsade för $t \geq 0$.

I två dimensioner är tydligen ett system asymptotiskt stabilt, om dess fasporträtt är en stabil knut, en stabil spiral eller en stabil oegentlig knut. I dessa fall är reella delen av varje egenvärde negativt. Stabilt är ett system förutom i dessa fall dessutom om för matrisens determinant D och spår S gäller $D = 0$, $S < 0$ samt om $S = 0$ och $D > 0$. Allmänt gäller:

Sats 7.11. Systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ är *asymptotiskt stabilt* om och endast om $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ för varje egenvärde λ till den kvadratiske matrisen A .

Bevis. Den metod att beräkna exponentialfunktionen e^{tA} , som beskrevs i Sats 7.7, visar att denna alltid är en summa av ett ändligt antal termer av formen $t^j e^{\lambda_k t} p_{jk}(A)$,

där λ_k betecknar ett egenvärde till A och p_{jk} är ett polynom. Eftersom $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$ är den allmänna lösningen, gäller för varje lösning $\mathbf{x}(t)$ till systemet att

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \dots + |t|^j e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} |p_{jk}(A)\mathbf{c}| + \dots \rightarrow 0,$$

då $t \rightarrow +\infty$, förutsatt att $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ för varje k . Om å andra sidan $\operatorname{Re}(\lambda_k) \geq 0$ för något k , så går $|t|^j e^{\lambda_k t}|$ inte mot noll, då $t \rightarrow +\infty$. Eftersom funktionerna $t^j e^{\lambda_k t} p_{jk}(A)\mathbf{c}$ är linjärt oberoende, kan $\mathbf{x}(t)$ inte konvergera mot noll då $t \rightarrow +\infty$. $\diamond$

Historiska notiser. Ordet matris infördes år 1850 av James Joseph Sylvester (1814–97) som benämning på ett rektangulärt schema av tal ur vilket olika determinanter kunde bildas. Arthur Cayley (1821–1895) lade grunden för en teori för matriser år 1858. Han införde de grundläggande räknereglerna, gav villkor för när den inversa matrisen existerar och studerade matrisfunktioner, tom. funktionen $\sqrt{A}$. Vidare studerade han egenvärdesproblemet för kvadratiske matriser. Samma år bevisade han för 2×2 - och 3×3 -matriser den sats, som numera är uppkallad efter honom och Hamilton. William Rowan Hamilton (1805–65) hade redan tidigare bevisat den för vissa 4×4 -matriser, som svarar mot s.k. kvaternioner. Ett arbete om Galois-teori år 1870 av Camille Jordan (1838–1922) innehåller Jordans normalform, inte för komplexa matriser utan för matriser med element ur ändliga kroppar. Han var tydligen omedveten om att Karl Weierstrass (1815–97) kommit till liknande resultat redan år 1868.

Övningsuppgifter

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

2. Lös systemet

$$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}.$$

Utnyttja att $(x + y + z)' = x + y + z$, $(x + y)' = 2z$, etc.

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^T$, där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix},$$

4. Beräkna e^{tA} genom att summera potensserien, då A är någon av följande matriser:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (d) \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

5. Visa genom att beräkna potenserna av B att

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{om} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Använd detta till att beräkna e^{tA} då $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Beräkna e^{tA} om

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Beräkna e^{tA} då A är någon av matriserna

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \quad (c) \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Låt $F(t)$ vara en godtycklig fundamentalmatris till systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Visa att $e^{tA} = F(t)F(0)^{-1}$.

9. Bestäm e^{tA} då A är en godtycklig 2×2 -matris med två egenvärden som är lika.

10. Visa att om A är en 3×3 -matris, vilkens alla egenvärden har samma värde λ , så är

$$e^{tA} = \frac{1}{2}e^{\lambda t} [(\lambda^2 t^2 - 2\lambda t + 2)I + (-2\lambda t^2 + 2t)A + t^2 A^2].$$

11. Lös begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = (1 \ 1)^T$, då

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}.$$

12. Bestäm en partikulärlösning till systemet

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + x_2 + 2 \cos 2t \\ x'_2 = x_1 - 3x_2 + \cos 2t. \end{cases}$$

13. Två bakteriestammar med populationerna $x(t)$ och $y(t)$ förökar sig inte men "äter" varann med en hastighet som är proportionell mot den ätande stammens storlek. För detta system använder vi modellen

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha y(t) \\ y'(t) = -\beta x(t), \end{cases}$$

där α och β är positiva tal. Vilket bör förhållandet $x(0)/y(0)$ vara för att bägge stammarna skall leva oändligt länge, dvs. för att $x(t) > 0$ och $y(t) > 0$ skall gälla för varje $t \geq 0$.

14. Lös begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = (0 \ 3 \ 2)^T$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

16. Lös begynnelsevärdesproblemet

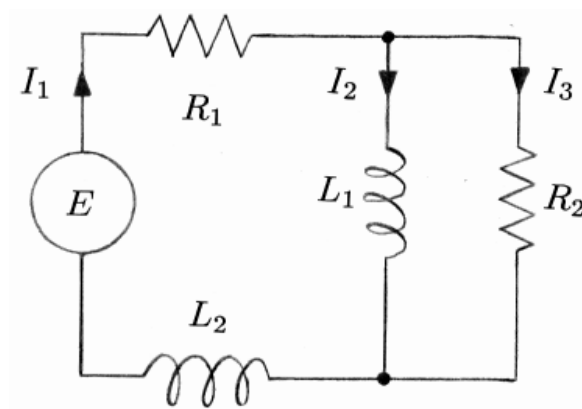
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

17. Bestäm en partikulärlösning till systemet

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_2 + 2\cos 2t \\ x_2' = x_1 - 3x_2 + \cos 2t. \end{cases}$$

18. Antag att $\mathbf{x}_0$ är en egenvektor svarande mot egenvärdet λ till matrisen A . Visa att $\mathbf{x}(t) = te^{\lambda t}\mathbf{x}_0$ är en lösning till systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{x}_0$.

19. För kretsen i figuren



uppställer man lätt systemet

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R_1 + R_2)/L_2 & R_2/L_2 \\ R_2/L_1 & -R_2/L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E/L_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lös systemet då $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $L_1 = L_2 = 1 \text{ H}$, $E(t) = 100 \sin t \text{ V}$, $I_1(0) = I_2(0) = 0$.

20. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x_1'' = -5x_1 + 2x_2 \\ x_2'' = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ x_3'' = 2x_2 - 3x_3. \end{cases}$$

21. Av tre likadana pendlar, som hänger efter varann, är den första kopplad ihop med den andra och den andra ihop med den tredje medelst två likadana spiralfjädrar. För små svängningar beskrivs pendelsystemet av

$$\begin{cases} x_1'' = -kx_1 + \varepsilon(x_2 - x_1) \\ x_2'' = -kx_2 + \varepsilon(x_1 - x_2) + \varepsilon(x_3 - x_2) \\ x_3'' = -kx_3 + \varepsilon(x_2 - x_3), \end{cases}$$

där x_i , $i = 1, 2, 3$, är respektive pendels utslag och k och ε är positiva konstanter. Bestäm den allmänna lösningen till systemet samt den partikulärlösning som uppfyller kraven $x_1(0) = \alpha$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$, $x'_1(0) = x'_2(0) = x'_3(0) = 0$.

22. Bestäm en fundamentalmatris till systemet $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ då $A(t)$ är någon av matriserna

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad (c) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. För vilka värden på a är systemet

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + ax_2 \\ x'_2 = x_1 - 4x_2, \end{cases}$$

asymptotiskt stabilt?

24. Antag att det homogena systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ är asymptotiskt stabilt. Visa att om funktionen $\mathbf{b}(t)$ är begränsad för $t \geq t_0$, är varje lösning till systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ begränsad då $t \geq t_0$.

Lapacetransformationen

Lapacetransformationen kan vara ett bekvämt verktyg, då man löser linjära DE:er med konstanta koefficienter eller system av sådana. Man bör dock inte överskatta transformationens betydelse. Ofta kan nämligen andra metoder ge den sökta lösningen snabbare och ibland kan Lapacetransformationen inte alls användas (se exempel 8.1).

Definition 8.1. *Lapacetransformen* $F(s)$ av en funktion $f(t)$, som är definierad för $t \geq 0$, är den funktion $F(s)$ som ges av integralen

$$(1) \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Om F är Lapacetransformen av f , så uttrycks sambandet mellan dessa två funktioner med symbolerna

$$f \circ\!\!-\bullet F \quad \text{eller} \quad F \bullet\!\!-\circ f.$$

Den funktion $f \mapsto F$, som transformerar $f(t)$ till $F(s)$, kallas *Lapacetransformationen* och betecknas med $\mathcal{L}$. Funktionen F kan alltså betecknas med $\mathcal{L}f$ men också beteckningen $\mathcal{L}\{f(t)\}$ kommer att användas flitigt i fortsättningen. Det är lätt att se att Lapacetransformationen är linjär, dvs. att

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}f_1 + c_2 \mathcal{L}f_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

för sådana argument s för vilka både $(\mathcal{L}f_1)(s)$ och $(\mathcal{L}f_2)(s)$ är definierade.

Om funktionen f växer tillräckligt snabbt, så har den ingen Lapacetransform:

Exempel 8.1. Om $f(t) = e^{t^2}$, så ser vi att $e^{-st}f(t) = e^{t^2-st} \rightarrow \infty$ då $t \rightarrow \infty$. Lapacetransformen av f är alltså inte definierad för något värde på s .

Nedanstående sats och också Sats 8.2 formulerar vi för enkelhetens skull för kontinuerliga funktioner. Det är emellertid lätt att se att bevisen kan genomföras för en större klass av funktioner.

Sats 8.1. *Om funktionen f är kontinuerlig och $(\mathcal{L}f)(s)$ är definierat för ett visst värde på s , så är $(\mathcal{L}f)(s')$ definierat för varje s' med $s' > s$.*

Bevis. Sätt $\delta = s' - s$. Med hjälp av partiell integration fås

$$\begin{aligned} \int_0^b e^{-s't} f(t) dt &= \int_0^b e^{-\delta t} e^{-st} f(t) dt \\ &= [e^{-\delta t} I(t)]_0^b + \delta \int_0^b e^{-\delta t} I(t) dt, \end{aligned}$$

där $I(t) = \int_0^t e^{-su} f(u) du$. Eftersom funktionen I enligt antagandet är begränsad, går substitutionstermen mot 0 och den andra termen mot en konvergent integral, då b går mot oändligheten. Alltså är $(\mathcal{L}f)(s')$ definierad. $\diamond$

Av Sats 8.1 framgår att om Laplacetransformen F av f är definierad för något värde på s , så finns det ett σ sådant att integralen (1) är konvergent för $s > \sigma$ och divergent för $s < \sigma$. Transformen $F(s)$ är således definierad i ett intervall av formen $]\sigma, \infty[$, där σ kan vara $-\infty$, eller på ett intervall $[\sigma, \infty[$, där σ är ändligt.

Exempel 8.2. Laplacetransformen av e^t är definierad i intervallet $]1, \infty[$, ty bara för värden på s i detta intervall är integralen

$$\mathcal{L}\{e^t\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^t dt = \int_0^\infty e^{(1-s)t} dt = \frac{1}{1-s}$$

konvergent. För funktionen $g(t) = e^t/(1+t^2)$ gäller uppskattningen

$$0 \leq e^{-st} g(t) = \frac{e^{(1-s)t}}{1+t^2} \leq e^{(1-s)t},$$

varför dess Laplacetransform $(\mathcal{L}g)(s)$ är definierad för $s > 1$. Men dessutom existerar $(\mathcal{L}g)(1)$, eftersom $\int_0^\infty dt/(1+t^2) = \pi/2$ är konvergent. För $s < 1$ fås däremot en divergent integral, ty integranden närmar sig då inte noll när t går mot $+\infty$. Laplacetransformen av g är alltså definierad i intervallet $[1, \infty[$.

Laplacetransformationens betydelse för DE:r grundar sig på egenskapen att summor av derivator försedda med konstanta koefficienter av den överförs på polynom. Om vi nämligen låter Laplacetransformationen operera på en derivata, så får vi med hjälp av partiell integration

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \\ &= [f(t) e^{-st}]_0^\infty + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = s \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0). \end{aligned}$$

Denna kalkyl är giltig om både f och f' har en Laplacetransform och om $e^{-st} f(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$. Det sistnämnda villkoret behövs inte om härledningen görs på ett annat sätt (det generellare beviset ges nedan).

Sats 8.2. Om f och f' är kontinuerliga och $(\mathcal{L}f)(s)$ och $(\mathcal{L}f')(s)$ är definierade, så är

$$(\mathcal{L}f')(s') = s'(\mathcal{L}f)(s') - f(0)$$

för $s' > s$.

Bevis: Sätt $\delta = s' - s$. Samma kalkyl som i beviset för Sats 8.1 men tillämpad på f' ger

$$(\mathcal{L}f')(s') = \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} dt \int_0^t e^{-su} f'(u) du$$

och vidare då man integrerar den inre integralen partiellt

$$(\mathcal{L}f')(s') = \delta(\mathcal{L}f)(s') - f(0) + s\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} dt \int_0^t e^{-su} f(u) du.$$

Låt I beteckna integralen i den sista termen. Genom att byta integrationsordning fås

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\delta t} dt \int_0^t e^{-su} f(u) du = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-su} f(u) du \int_u^b e^{-\delta t} dt \\ &= \frac{1}{\delta} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_0^b e^{-s'u} f(u) du - e^{-\delta b} \int_0^b e^{-su} f(u) du \right) \\ &= \frac{1}{\delta} (\mathcal{L}f)(s'). \end{aligned}$$

Insättning ger $(\mathcal{L}f')(s') = \delta(\mathcal{L}f)(s') - f(0) + s(\mathcal{L}f)(s') = s'(\mathcal{L}f)(s') - f(0)$. $\diamond$

Genom upprepad användning av formeln i Sats 8.2 fås för en funktion f med "tillräckliga" egenskaper:

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) = s^k \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{k-1}f(0) - \dots - s f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0).$$

Exempel 8.3. Då man använder Laplacetransformationen $\mathcal{L}$ på bägge leden i DE:n $x'' + x = 1$, fås

$$s^2 \mathcal{L}x - sx(0) - x'(0) + \mathcal{L}x = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

Således är

$$(2) \quad (\mathcal{L}x)(s) = \frac{1}{1+s^2} \left[\frac{1}{s} + sx(0) + x'(0) \right].$$

Lyckas vi i ovanstående exempel bestämma en funktion $x(t)$ sådan att dess Laplace-transform $(\mathcal{L}x)(s)$ precis är uttrycket i (2), så har vi löst begynnelsevärdesproblemet för DE:n $x'' + x = 1$ med begynnelsevärdena $x(0)$ och $x'(0)$. Orsaken till detta är att bara *en* kontinuerlig funktion $x(t)$ kan ge upphov till transformen $y(s) = (\mathcal{L}x)(s)$.

Den *inversa Laplacetransformen* $\mathcal{L}^{-1}y$ är alltså entydig om den existerar, då man håller sig till mängden av kontinuerliga funktioner. Eftersom $\mathcal{L}$ är linjär, så blir också $\mathcal{L}^{-1}$ automatiskt linjär, så att $\mathcal{L}^{-1}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathcal{L}^{-1}y_1 + c_2 \mathcal{L}^{-1}y_2$. Generellt kan man visa att om för "godtyckliga" funktioner $x_1(t)$ och $x_2(t)$ gäller att $\mathcal{L}x_1 = \mathcal{L}x_2$, så är $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ en *nollfunktion* i den meningen att $\int_0^b z(t) dt = 0$ för varje $b > 0$. Detta innebär att funktionen $z(t)$ har värdet noll "nästan överallt".

Då man vill bestämma funktionen $x(t)$ då dess transform $(\mathcal{L}x)(s)$ är känd, är det bra att framför sig ha en lista över transformerna av de elementära funktionerna:

Laplacestransformer av elementära funktioner

Vi såg redan i exempel 8.3 att $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$. För ett godtyckligt $n \geq 0$ fås Laplacestransformen för $f(t) = t^n$ med hjälp av partiell integration

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n\}(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \int_0^\infty t^n d\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right) \\ &= \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s).\end{aligned}$$

Upprepad användning av denna formel ger:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

För $x > 0$ är gammafunktionen Γ definierad av $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Vi får därför den allmänna formeln:

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha dt = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-st} (st)^\alpha d(st) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad (\alpha > -1).$$

För exponentialfunktionen e^{at} blir transformen

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

för $s > \operatorname{Re}(a)$. Eulers likhet, $\sin \omega t = (1/2i)(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$, ger för $s > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin \omega t\} &= \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t dt = \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left(e^{-(s-i\omega)t} - e^{-(s+i\omega)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

På samma sätt fås med hjälp av Eulers likhet $\cos \omega t = (1/2)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ att

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Exempel 8.4. Ovanstående transformer ger lösningen till DE:n $x'' + x = 1$ i exempel 8.3: I

$$(2) \quad \mathcal{L}\{x\}(s) = \frac{1}{s(1+s^2)} + x(0) \frac{s}{1+s^2} + x'(0) \frac{1}{1+s^2}$$

uppdelas den första termen i partialbråk

$$\frac{1}{s(1+s^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{1+s^2},$$

vilket ger

$$(\mathcal{L}x)(s) = \frac{1}{s} + [x(0) - 1] \frac{s}{1 + s^2} + x'(0) \frac{1}{1 + s^2}.$$

Således är

$$x(t) = 1 + [x(0) - 1] \cos t + x'(0) \sin t,$$

där konstanten 1 är en partikulärlösning till den givna ekvationen medan de två övriga termerna utgör en lösning till motsvarande homogena ekvation.

Med hjälp av formlerna $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$ och $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ härleder man lätt transformerna för $\sinh at$ och $\cosh at$. Vi kan nu sammanställa en kort lista av Laplacetransformer:

Funktion		Lapacetransform
t^n	○—●	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots$
t^α	○—●	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad (\alpha > -1)$
e^{at}	○—●	$\frac{1}{s-a}$
$\sin \omega t$	○—●	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	○—●	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sinh at$	○—●	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh at$	○—●	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

Exempel 8.5. För att bestämma den funktion $f(t)$, som har transformen $F(s) = (3s + 5)/(s^2 + 7)$, skriver vi bråket som en summa av två termer

$$F(s) = \frac{3s}{s^2 + 7} + \frac{5}{s^2 + 7}$$

och ser då att $f(t) = 3 \cos \sqrt{7}t + (5/\sqrt{7}) \sin \sqrt{7}t$.

Exempel 8.6. För att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$x'' - 3x' + 2x = e^{3t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

opererar vi med Laplacetransformationen på DE:ns höger- och vänsterled

$$s^2 \mathcal{L}x - sx(0) - x'(0) - 3(s\mathcal{L}x - x(0)) + 2\mathcal{L}x = \frac{1}{s-3}$$

sätter in begynnelsevärdena och löser ut $(\mathcal{L}x)(s)$:

$$(\mathcal{L}x)(s) = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)} + \frac{1}{(s-3)(s-2)(s-1)}.$$

Partialbråksuppdelning av dessa bråk ger

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x &= \left[\frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2} \right] + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-3} \right] \\ &= \frac{5}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-3}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$x(t) = \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Speciella regler

Vi skall härleda två nyttiga regler rörande Laplacetransformationen. Först noterar vi att följande s.k. *dämpningsregel* omedelbart följer ur transformationens definition:

Sats 8.3. Om $f(t)$ och $e^{at}f(t)$ har Laplacetransformer, så är

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = (\mathcal{L}f)(s - a).$$

Vi kan därför förlänga listan av Laplacetransformer med t.ex.

$t^n e^{at}$	○—●	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at} \sin \omega t$	○—●	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	○—●	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sinh \omega t$	○—●	$\frac{\omega}{(s-a)^2 - \omega^2}$
$e^{at} \cosh \omega t$	○—●	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - \omega^2}$

Definition 8.2. Funktionen $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$ ($t \geq 0$) kallas *faltningen* eller *konvolutionen* av f och g .

Sats 8.4. (faltningssatsen) Om $\int_0^\infty |f(t)| dt < \infty$ och $\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty$, så har faltningen $f * g$ en Laplacetransform och denna är produkten av faktorernas Laplacetransformer:

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g.$$

Bevisskiss. Utan att motivera giltigheten hos operationerna fås genom att byta integrationsordning och genom att därefter sätta $v = t - u$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(u)g(t-u) du = \int_0^\infty f(u) du \int_u^\infty e^{-st} g(t-u) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \int_0^\infty e^{-sv} g(v) dv = (\mathcal{L}f)(s) (\mathcal{L}g)(s). \diamond \end{aligned}$$

Exempel 8.7. Laplacetransformera DE:n $x'' + 2x' + 5x = 1$ med begynnelsevärdena $x(0) = 1$ och $x'(0) = 0$ samt sätt $F(s) = (\mathcal{L}x)(s)$:

$$(s^2 F(s) - s) + 2(sF(s) - 1) + 5F(s) = \frac{1}{s}.$$

Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+2}{s^2+2s+5} + \frac{1}{s} \frac{1}{s^2+2s+5} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2s} \frac{2}{(s+1)^2+2^2}. \end{aligned}$$

Enligt dämpningsregeln och faltningssatsen fås lösningen

$$x(t) = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-u} \sin 2u \, du,$$

där integralen är faltningen av 1 och $e^{-t} \sin 2t$.

Faltningssatsens främsta betydelse ligger i att om den transformerade funktionen kan spjälkas upp i en produkt $F(s)G(s)$, där $F(s)$ och $G(s)$ är transformer av $f(t)$ respektive $g(t)$, så kan ursprungsfunktionen till $F(s)G(s)$ konstrueras som faltningen av f och g . Ursprungsfunktionen till exempelvis $1/(s-a)(s-b)$ är faltningen av e^{at} och e^{bt} ,

$$\int_0^t e^{au} e^{b(t-u)} du = e^{bt} \int_0^t e^{(a-b)u} du = \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$$

(kan också fås genom partialbråksuppdelning). Genom att låta b närma sig a , ser vi att funktionen $1/(s-a)^2$ bör ha ursprungsfunktionen $\frac{d}{da}(e^{at}) = te^{at}$, vilket vi ju redan har härlett med hjälp av dämpningsregeln.

På samma sätt är ursprungsfunktionen till produkten

$$\frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2} \frac{\omega_2}{s^2 + \omega_2^2}$$

faltningen av $\sin \omega_1 t$ och $\sin \omega_2 t$, vilket färdigt uträknat (övningsuppgift 9) blir

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_1 \sin \omega_2 t - \omega_2 \sin \omega_1 t}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \\ &= \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \left[\sin \omega_2 t - \omega_2 \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{\omega_2 - \omega_1} \right]. \end{aligned}$$

Då vi här låter ω_2 gå mot $\omega_1 = \omega$, så går uttrycket mot $\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t - \omega \frac{d}{d\omega} \sin \omega t) = \frac{1}{2\omega}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$. Detta ger den första av Laplacetransformerna

$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	○—●	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\omega t \cosh \omega t - \sinh \omega t$	○—●	$\frac{2\omega^3}{(s^2 - \omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	○—●	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \sinh \omega t$	○—●	$\frac{2\omega s}{(s^2 - \omega^2)^2}$

De övriga fås på liknande sätt (se övningsuppgift 10).

På grund av faltningssatsen kan Laplacetransformationen med fördel användas också på **Volterras integralekvation**

$$x(t) = g(t) + \int_0^t x(s)h(t-s) \, ds,$$

som innehåller en faltning av en obekant funktion x med en bekant funktion h . Om F , G respektive H är Laplacetransformerna av x , g och h , så är $F = G + FH$ och således

$F = G/(1-H)$, varur x kan bestämmas. Ekvationen kan uppenbarligen tillåtas innehålla både derivator och faltningar som i t.ex **integrodifferentialekvationen**

$$x'(t) + ax(t) = g(t) + \int_0^t x(s)h(t-s) ds,$$

med begynnelsevillkoret $x(0) = x_0$. Laplacetransformerad antar den (med samma beteckningar som ovan) formen

$$sF(s) - x_0 + aF(s) = G(s) + F(s)H(s),$$

ur vilket $F(s)$ kan lösas ut.

System av ekvationer

I ett system av linjära DE:r med konstanta koefficienter kan varje ekvation Laplace-transformeras. Systemet blir därigenom algebraiskt och kan lösas genom eliminering.

Exempel 8.8. Då man Laplacetransformerar systemet

$$\begin{cases} x' + y = 1 \\ y' + x = t \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ och låter F och G beteckna transformerna av x respektive y , fås det algebraiska systemet

$$\begin{cases} sF + G = \frac{1}{s} + x_0 \\ sG + F = \frac{1}{s^2} + y_0. \end{cases}$$

Eliminering ger

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{s^2} + \frac{x_0}{s} + \frac{x_0}{s(s^2-1)} - \frac{y_0}{s^2-1} \\ G &= -\frac{x_0}{s^2-1} + \frac{y_0 s}{s^2-1}. \end{aligned}$$

Lösningen blir alltså

$$\begin{aligned} x(t) &= t + x_0 + x_0 \int_0^t \sinh u du - y_0 \sinh t = t + x_0 \cosh t - y_0 \sinh t \\ y(t) &= -x_0 \sinh t + y_0 \cosh t. \end{aligned}$$

Laplacetransformationen kan också användas på en ekvation som skrivits med vektor- och matrisbeteckningar:

Betrakta systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ och låt $\mathbf{F}(s)$ och $\mathbf{B}(s)$ vara transformerna av $\mathbf{x}(t)$ respektive $\mathbf{b}(t)$. Eftersom Laplacetransformer bildas komponentvis, fås den transformerade likheten

$$s\mathbf{F}(s) - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{F}(s) + \mathbf{B}(s).$$

Om s inte är ett egenvärde till matrisen A , existerar resolventen $(sI - A)^{-1}$ och $\mathbf{F}(s)$ kan lösas ut:

$$\mathbf{F}(s) = (sI - A)^{-1}(\mathbf{B}(s) + \mathbf{x}(0)).$$

Historisk notis. Laplacetransformationen infördes i det grundläggande verket om sannolikhetslära *Théorie analytique des probabilités* av Pierre Simon de Laplace (1749–1827), vilket publicerades första gången år 1812.

Övningsuppgifter

- Beräkna Laplacetransformerna av $\sinh at$ och $\cosh at$.
- Beräkna Laplacetransformen av funktionerna
 - $\cos^2 \omega t$,
 - $\sin^2 \omega t$,
 - $t^2 \sin t$.
- Beräkna Laplacetransformen av funktionerna
 - $\sin \omega_1 t \cos \omega_2 t$,
 - $\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$,
 - $\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$.
- Visa att funktionen $e^{\sqrt{t}}$ har en Laplacetransform.
- Beräkna Laplacetransformen av funktionen $(D^3 + D + 1)(e^{-t}/t)$, där D betecknar derivering med avseende på t .
- Beräkna $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$ genom att utnyttja att $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.
- Bestäm ursprungsfunktionen till de Laplacetransformerade funktionerna
 - $F(s) = \frac{1}{s^2} \frac{s-a}{s+a}$,
 - $F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 9}$,
 - $F(s) = \frac{1}{(s-3)^5}$,
 - $F(s) = \frac{1}{s^3 - 4s^2 + 3s}$.
- Lös med hjälp av Laplacetransformen begynnelsevärdesproblemen:
 - $x'' - 5x' + 4x = e^{2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$,
 - $2x'' + x' - x = e^{3t}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$,
 - $x'' - 6x' + 9x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$,
 - $x'' + 4x' = \cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
- Beräkna faltningen av $\sin \omega_1 t$ och $\sin \omega_2 t$.
- Visa att
 - $\omega t \cosh \omega t - \sinh \omega t \circ - \bullet \frac{2\omega^3}{(s^2 - \omega^2)^2}$,
 - $t \sin \omega t \circ - \bullet \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$,
 - $t \sinh \omega t \circ - \bullet \frac{2\omega s}{(s^2 - \omega^2)^2}$.
- En funktion f sägs vara av *exponentiell ordning* i intervallet $[T, \infty[$ om det finns tal M och k , sådana att $|f(t)| \leq Me^{kt}$ för $t > T$. Bevisa följande påståenden:
 - Varje kontinuerlig funktion på $[0, \infty[$ av exponentiell ordning har en Laplace-transform;
 - Om f och g är funktioner av exponentiell ordning i $[T, \infty[$, så är också fg av exponentiell ordning i samma intervall;

- (c) Om f är en kontinuerlig funktion av exponentiell ordning och F är dess Laplacetransform, så är $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.

12. Lös med hjälp av Laplacetransformationen begynnelsevärdesproblemen

(a)

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

(b)

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + t, \end{cases} \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

(c)

$$\begin{cases} x' = 3x + 3y + t \\ y' = -x - y + 1, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$