Ordinära differentialekvationer

Delförhör II onsdag 30.11.2005

En Tabell över Laplacetransformer finns på baksidan av detta papper.

1) Besvara följande delfrågor:

a) Vad avses med att funktionerna $y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)$ är linjärt oberoende på ett intervall I ?

b) Antag att funktionerna $y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)$ har kontinuerliga derivator upp till ordning $(n-1)$ på intervallet I. Hur definieras Wronski-determinanten $W(y_1, ..., y_n)(t)$ på intervallet ?

c) Kan funktionerna $y_1(t) = t^2 - 1$ och $y_2(t) = \cos t$ utgöra en bas för lösningsrummet till någon linjär och homogen differentialekvation av andra ordningen i intervallet $I = (-2, 2)$?

2) Använd Laplacetransformationen för att lösa integro-differentialekvationen

$$y'(t) + y(t) = \int_0^t y(v)\, \sin(t-v)\, dv\,, \quad y(0) = 1\,.$$

3) Visa att begynnelsvärdesproblemet

$$x' = \frac{x}{t} + \mathrm{e}^{-tx^2}, \quad x(1) = 0,$$

har en entydigt bestämd (lokal) lösning i något öppet intevall I med $t_0 = 1 \in I$.

4) Bestäm en fundamentalmatris till systemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 + x_2\,. \end{cases}$$

5) Lös för $t \in (0,1)$ begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + \frac{t}{1-t}\, y' - \frac{1}{1-t}\, y = \frac{1-t}{t}, \quad y(1/2) = -\frac{\ln(2)}{2},\; y'(1/2) = -\ln(2)\,.$$

(Ledning: Bestäm först en icke-trivial lösning $y_1(t)$ i form av ett förstagradspolynom till den motsvarande homogena ekvationen).