

Numerisk analys 2003-4 RÖ 2

17.12.2003

1

Antag $u, v \neq 0$ (annars $uv^* = 0$ och $A = I$.)

Studera

$$\begin{aligned} & (I + uv^*)(I + \alpha uv^*) \\ &= I + uv^* + \alpha uv^* + uv^* \alpha uv^* \\ &= I + (1 + \alpha + \alpha v^*u)uv^* \end{aligned}$$

Om $v^*u \neq -1$ blir $(1 + \alpha + \alpha v^*u) = 0$ för $\alpha = \frac{-1}{1+v^*u}$. Härav fås

$$A^{-1} = I - \frac{1}{1+v^*u} uv^* \quad (v^*u \neq -1).$$

Inversen är entydig då den existerar.

Om $v^*u = -1$ har vi

$$Au = (I + uv^*)u = u + uv^*u = 0,$$

mao. A är ej inverterbar om $v^*u = -1$.

Vi har alltså två fall:

$v^*u \neq -1$: A är inverterbar och har (den entydigt bestämda) inversen

$$A^{-1} = I - \frac{1}{1+v^*u} uv^*.$$

$v^*u = -1$: A är ej inverterbar. Nollrummet $\text{null}(A) = \{cu | c \in \mathbb{C}\}$. (Om x är olika noll och x och u är linjärt oberoende så är

$$Ax = x + uv^*x = x + (v^*x)u \neq 0,$$

dvs. nollrummet spänns upp av u ensam.

2

Ant. W icke-singulär, $\|\cdot\|$ är vektornorm.

Påst. $\|\cdot\|_W$ är vektornorm.

Bevis

(1) $\|x\|_W = \|Wx\| = 0$ om och endast om $x = 0$ ty 0 är inte bland W 's egenvärden (el. -vektorer). $\|Wx\| \geq 0$ ty $\|\cdot\|$ är vektornorm.

(2) $\|W(x+y)\| = \|Wx + Wy\| \leq$

$\{\|\cdot\| \text{ vektornorm}\}$

$\|Wx\| + \|Wy\| = \|x\|_W + \|y\|_W$.

(3) $\|\alpha x\|_W = \|\alpha Wx\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|x\|_W$.

Mao. $\|\cdot\|_W$ är vektornorm.

3

Ant. W icke-singulär, $\|\cdot\|$ är vektornorm.

Påst. $\max\{|\lambda| \mid Ax = \lambda x\} \leq \sup_{x \in \mathbb{C}, \|x\|_m=1} \|Ax\|_m$

Bevis

Gör motantagandet,

ant. $\exists \lambda : |\lambda| > \sup_{x \in \mathbb{C}, \|x\|_m=1} \|Ax\|_m$ så att $Ax = \lambda x$. Då

$|\lambda| > \sup_{\|x\|_m=1} |\lambda| \quad \|x\|_m = |\lambda|$, vilket kan inte gälla. Därför måste påståendet gälla.

4 c

Låt z vara $n \times 1$ -vektor.

$$\|Az\|_\infty^2 = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^n z_j a_{ij} \right|^2 \leq \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n z_j a_{ij} \right|^2 = \|Az\|_2^2.$$

Eftersom $\|z\|_\infty \neq 0$,

$$\|Az\|_\infty / \|z\|_\infty \leq \|Az\|_2 / \|z\|_\infty \leq \{(4b)\} \leq \sqrt{n} \|Az\|_2 / \|z\|_2.$$

6.6

Låt $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$. Då blir $A^*A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 6 \end{pmatrix}$, vars egenvektorer blir kolonner av V och egenvärdens kvadratrötter bildar diagonalelementen av Σ . Kvadratroten av det största egenvärdet $\lambda_1 \approx 6.1926$ kommer först, motsvarande egenvektor blir $v_1 \approx \begin{pmatrix} -0.1891i \\ 0.9820 \end{pmatrix}$, sedan kommer kvadratroten av $\lambda_2 \approx 0.8074$ med egenvektorn $v_2 \approx \begin{pmatrix} -0.9820i \\ -0.1891 \end{pmatrix}$, dvs $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6.1926} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.8074} \end{pmatrix}$ och $V = \{v_1 \ v_2\} = \begin{pmatrix} -0.1891i & -0.9820i \\ 0.9820 & -0.1891 \end{pmatrix}$. Nu är det lätt att räkna

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{6.1926}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.1891i \\ 0.9820 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.4706 \\ 0.3946 - 0.7892i \end{pmatrix}$$

och

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} Av_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} Av_2 = \frac{1}{\sqrt{0.8074}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.9820i \\ -0.1891 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.8824 \\ -0.2105 + 0.4209i \end{pmatrix},$$

vi får $U = \{u_1 \ u_2\} = \begin{pmatrix} 0.4706 & 0.8824 \\ 0.3946 - 0.7892i & -0.2105 + 0.4209i \end{pmatrix}$, dvs.

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.4706 & 0.8824 \\ 0.3946 - 0.7892i & -0.2105 + 0.4209i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.4885 & 0 \\ 0 & 0.8986 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1891i & 0.9820 \\ 0.9820i & -0.1891 \end{pmatrix}.$$

7

Låt $E = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ vara en $m \times m$ -matris. Då kan vi skriva

$$B = \overline{A^*} E.$$

Har nu att $E^*E = I = EE^*$, dvs.

$$BB^* = \overline{A^*} EE^* \overline{A^*}^* = \overline{A^*} EE^* \overline{A} = \overline{A^*} \overline{A} = \overline{A^* A}$$

Singulärvärdena av A bestäms av egenvärdena till den hermiteska matrisen AA^* (som är reella, se uppg. 4 rö 1). Därför innebär $BB^* = \overline{A^* A}$ att B har samma singulärvärden som A . $A^*Ax = \lambda x$ innebär (då λ är reellt) nämligen att

$$\lambda \bar{x} = \overline{\lambda x} = \overline{A^* Ax} = \overline{A^*} \overline{A} \bar{x} = BB^* \bar{x}.$$

B^*B och A^*A har samma (reella!) egenvärden, ty om x är egenvektor till A^*A är $\bar{x}$ egenvektor till BB^* och B^*B .

8

Antag $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

Vi visar att påståendet

A och B har samma singulärvärden $\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}^{m \times m} : A = QBQ^* \wedge Q^* = Q^{-1}$

är falskt genom att ta ett motexempel.

Låt $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} \sin(1) & \cos(-1) \\ \cos(1) & \sin(-1) \end{pmatrix}$.

Både A och B har singularvärdena 1 och 1, men enhetsmatrisen är unitärt ekvivalent endast med sig själv, ty

$$\begin{aligned} A &= QBQ^* \\ Q^*A &= BQ^* \quad \{A \equiv I\} \\ Q^* &= BQ^* \Leftrightarrow B = I, \end{aligned}$$

så implikationen $\Rightarrow$ är falsk.