Jämförelse mellan matlab-versioner för kap. 19 i Trefethen-Bau när sin har ersatts med cos och b skalats med x(15) efter x=A\b.
Matlab version 6.5, Windows XP

"format long".

	kappa	
MATLAB6.5:		2.271777742406700E+10
ATON:		2.271777362371510E+10
	theta	
MATLAB6.5:		3.382356655309700E-07
ATON:		3.382355884212020E-07
	eta	
MATLAB6.5:		6.735846301416380E+04
ATON:		6.735845173419180E+04
Classical Gram-Schmidt MATLAB6.5:		0.000135667542809
Classical Gram-schmidt ATON:		0.000171436025189
Modified Gram-Schmidt MATLAB6.5:		0.871764264954956
Modified Gram-Schmidt ATON:		0.966470772177788
Householder MATLAB 6.5:		1.000000033704330
Householder ATON:		1.000000056633920
Householder with QR MATLAB 6.5:		1.000000033676820
Householder with QR ATON:		1.000000056554820
\ MATLAB 6.5:		0.999999999988418
\ ATON:		0.999999999934507
NORMAL EQUATIONS MATLAB6.5:		-0.876954074119516
NORMAL EQUATIONS ATON :		0.967932210467706
SVD MATLAB:		1.000000033700390
SVD ATON:		1.000000047395650

Numerisk analys

21.1.2004

1-5

Se skild sida. Resultaten på Gram-Schmidt ser "suspekta" ut, kan vara felaktiga.

6

Man kan Gausseliminera systemet:

$$\left(\begin{array}{cc|c} I & A & b \\ A^* & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} I & 0 & b - A(A^*A)^{-1}(A^*b) \\ 0 & I & (A^*A)^{-1}(A^*b) \end{array}\right)$$

Med andra ord blir $r = b - A(A^*A)^{-1}(A^*b) = b - Ax$ och $x = A^+b$. Enligt sats 11.1 (sida 80-81 i Trefethen-Bau) är x den enda lösningen till minsta kvadrat problemet . Också r är unikt bestämt, ty $r = b - Ax$. Det framgår tydligt att r ger residualen mellan b och Ax.

7

Programmet räknar A:s pseudoinvers $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$.

```
[U,S,V] = svd;
S = diag(S);
tol = max(size(A))*S(1)*eps;
r = sum(S > tol);
S = diag(ones(r,1)./S(1:r));
X = V(:,1:r)*S*U(:,1:r)';
```

Låt $A = USV^*$ med

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-11} \end{pmatrix}.$$

Med $\varepsilon_{maskin} = 2.2204 \cdot 10^{-16}$ ger programmet $A^+ = 10^{10} \begin{pmatrix} 4.2426 & -4.2426 \\ -5.6569 & 5.6569 \end{pmatrix}$.

Om man vill lösa systemet $Ax = b$ med $b = [1 \;\; 2]^*$ ger `pinv(A)*b` som svar $x = A^+b = 10^{10}[-4.2426 \;\; 5.6569]^*$ som uppfyller $Ax = b$.

Om man däremot låter $\varepsilon > \sigma_2/2$ här, får man $x = \begin{pmatrix} 0.5657 & 0.5657 \\ 0.4243 & 0.4243 \end{pmatrix}$, och $AA^+b = [1.5 \;\; 1.5]^* \neq b$. Vi har gjort en "approximation av rang $n-1$".

8

Man ska lösa det underbestämda linjära problemet $x_1 + x_2 = 1$ som är av formen $Ax = b$ med $A = [1 \;\; 1], b = 1$. Kommandot `pinv(A)` räknar A:s pseudoinvers $A^+ = [1/2 \;\; 1/2]^T$, och $A^+b = [1/2 \;\; 1/2]^T$ är den lösningen som har den minsta längden i 2-normen. Backslash hittar den lösning som har så många nollor som möjligt. Om lösningen inte är entydig ännu, väljs den bland lösningarna som minimerar normen. Lösningen bestäms med hjälp av QR-faktorisering av A efter att man har adderat så många nollrader till A att den blivit kvadratisk. Detaljerna faller utanför kursen.

Överbestämda system

Både backslash och `pinv(A)*b` ger lösningen i minsta kvadrat meningen. Man ska dock lägga märke till att oberoende av vilkendera metod man använder

$$AA^+b \neq b$$

på grund av att man använder pseudoinversen i beräkningarna. Till exempel om $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$, $b = (3 \;\; 6 \;\; 0)^T$, blir $AA^+b = (-1 \;\; 4 \;\; 2)^T$.