Hemuppgifter till onsdagen den 17 december
Exercises for Wednesday, December 17

1. (Exercise 2.6./p. 16) Låt u och v vara två vektorer. Matrisen $A = I + uv^*$ kallas en *rang 1 perturbation av identiteten.* (Varför?) Visa att om A är ickesingulär så är dess invers av formen $A^{-1} = I + \alpha uv^*$ för något α i $\mathbf{C}$; bestäm värdet på α. För vilka u och v är A singulär? Om den är singulär, bestäm null(A).

If u and v are vectors, the matrix $A = I + uv^*$ is known as a *rank-one perturbation of the identity* . (Why?) Show that if A is nonsingular, then its inverse has the form $A^{-1} = I + \alpha uv^*$ for some complex scalar α, and give an expression for α. For what u and v is A singular? If it is singular, what is null(A)?

2. (Exercise 3.1./p. 24) Låt W vara en ickesingulär matris. Bevisa att funktionen $\|\cdot\|_W$, se (3.3), är en vektornorm.

Prove that if W is an arbitrary nonsingular matrix, the function $\|\cdot\|_W$ defined by (3.3) is a vector norm.

3. (Exercise 3.2./p. 24) Låt $\|\cdot\|$ beteckna en norm på $\mathbf{C}^m$ och använd samma beteckning för den inducerade normen på $\mathbf{C}^{m\times m}$. Visa att $\rho(A) \le \|A\|$, där $\rho(A)$ är matrisen A:s *spektralradie* dvs $\max\{|\lambda| \mid \lambda$ egenvärde till $A\}$.

Let $\|\cdot\|$ denote any norm on $\mathbf{C}^m$ and also the induced matrix norm on $\mathbf{C}^{m\times m}$. Show that $\rho(A) \le \|A\|$, where $\rho(A)$ is the *spectral radius* of A, i. e., the largest absolute value $|\lambda|$ of an eigenvalue λ of A.

4. (Exercise 3.3./p. 24) Det finns samband mellan de olika p-normerna för vektorer och matriser. Sambanden uttrycks som olikheter, ofta funktioner av dimensionerna m och n. Verifiera nedanstående olikheter och ge exempel på vektorer eller matriser (för allmänt m och n) för vilka likhet gäller. I problemen nedan är x en m-vektor och A en $m \times n$ matris.

(a) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2$,

(b) $\|x\|_2 \le \sqrt{m}\|x\|_\infty$,

(c) $\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\|A\|_2$,

(d) $\|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty$.

Vector and matrix p-norms are related by various inequalities, often involving the dimensions m or n. For each of the following, verify the inequality and give an example of a nonzero vector or matrix (for general m, n) for which equality is achieved. In this problem, x is an m-vector and A is an $m \times n$ matrix.

(a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$,

(b) $\|x\|_2 \leq \sqrt{m}\|x\|_\infty$,

(c) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$,

(d) $\|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$.

5. (cf. Exercise 3.5./p. 24) Låt E vara en yttre produkt, $E = uv^*$. Gäller det att $\|E\|_F \leq \|u\|_F\|v\|_F$? Bevisa eller ge ett motexempel.

Let E be an outer product, $E = uv^*$. Is it true that $\|E\|_F \leq \|u\|_F\|v\|_F$? Prove it or give a counterexample.

6. (cf. Exercise 4.1./p. 30) Gör en singulärvärdesuppdelning (SVD) på följande matriser:

Determine SVD's of the following matrices (by hand calculation):

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}.$$

7. (Exercise 4.2./p. 31) Antag att A är en $m \times n$ matris och B den $n \times m$ matris man får genom att rotera A nittio grader medsols på ett papper. Har A och B samma singulärvärden? Bevisa att svaret är ja eller ge motexempel.

Suppose that A is an $m \times n$ matrix and B is the $n \times m$ matrix obtained by rotating A ninety degrees clockwise on paper (not exactly a standard mathematical transformation!). Do A and B have the same singular values? Prove that the answer is yes or give a counterexample.

8. (Exercise 4.4./p. 31) Två matriser $A, B \in \mathbf{C}^{m\times m}$ sägs vara *unitärt ekvivalenta* om $A = QBQ^*$ för någon unitär matris $Q \in \mathbf{C}^{m\times m}$. Är det sant eller falskt att A och B är unitärt ekvivalenta om och endast om de har samma singulärvärden?

Two matrices $A, B \in \mathbf{C}^{m\times m}$ are *unitarily equivalent* if $A = QBQ^*$ for some unitary matrix $Q \in \mathbf{C}^{m\times m}$. Is it true or false that A and B are unitarily equivalent if and only if they have the same singular values?