Hemuppgifter till onsdagen den 10 december
Exercises for Wednesday, December 10

1. (Exercise 1.1./p. 9) Låt B vara en 4×4 matris som vi omformar med följande operationer

1. fördubblar kolonn 1,
2. halverar rad 3,
3. adderar rad 3 till rad 1,
4. kastar om kolonnerna 1 och 4,
5. subtraherar rad 2 från all de övriga raderna,
6. ersätter kolonn 4 med kolonn 3,
7. stryker kolonn 1 (så att kolonndimensionen reduceras med 1).

(a) Skriv resultatet som en produkt av åtta matriser.

(b) Skriv resultatet som en produkt ABC (samma B) av tre matriser.

Let B be a 4×4 matrix to which we apply the following operations:

1. double column 1,
2. halve row 3,
3. add row 3 to row 1,
4. interchange columns 1 and 4,
5. subtract row 2 from each of the other rows,
6. replace column 4 by column 3,
7. delete column 1 (so that the column dimension is reduced by 1).

(a) Write the result as a product of eight matrices.

(b) Write it again as a product ABC (same B) of three matrices.

2. (Exercise 1.3./p. 10) Vi säger att en kvadratisk eller rektangulär matris R med elementen r_{ij} är *uppåt triangulär* om $r_{ij} = 0$ då $i > j$. Visa att om R är en icke-singulär $m \times m$ uppåt triangulär matris så är också R^{-1} uppåt triangulär. [Betrakta det underrum som uppspänns av de n första kolonnerna i R och använd (1.8).]

(För nedåt triangulära matriser gäller motsvarande resultat.)

Generalizing Example 1.3., we say that a square or rectangular matrix R with entries r_{ij} is *upper triangular* if $r_{ij} = 0$ for $i > j$. By considering what space is spanned by the first n columns of R and using (1.8), show that if R is a nonsingular $m \times m$ upper-triangular matrix, then R^{-1} is also upper-triangular.

(The analogous result also holds for lower-triangular matrices.)

3. (Exercise 2.1./p. 15) Antag att en matris A är både triangulär och unitär. Visa att A är en diagonalmatris.

Show that if a matrix A is both triangular and unitary, then it is diagonal.

4. (Exercise 2.3./pp. 15 - 16) Låt A vara en $m \times m$ hermitesk* matris. En vektor $x \in \mathbf{C}^m, x \neq 0$, är en *egenvektor* till A om $Ax = \lambda x$ för något komplext tal λ. λ kallas då det till x hörande *egenvärdet*.

(a) Visa att A:s alla egenvärden är reella.

(b) Bevisa att om x och y är egenvektorer hörande till olika egenvärden så är x och y ortogonala.

Let $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$ be hermitian*. An eigenvector of A is a nonzero vector $x \in \mathbf{C}^m$ such that $Ax = \lambda x$ for some $\lambda \in \mathbf{C}$, the corresponding eigenvalue.

(a) Prove that all eigenvalues of A are real.

(b) Prove that if x and y are eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues, then x and y are orthogonal.

5. (Exercise 2.4./p. 16) Vad kan sägas om egenvärdena till en unitär matris

What can be said about the eigenvalues of a unitary matrix?

6. (Exercise 2.5./p. 16) Låt $S \in \mathbf{C}^{m \times m}$ vara *skevhermitesk*, dvs. $S^* = -S$.

(a) Visa att S:s egenvärden är rent imaginära.

(b) Visa att $I - S$ är ickesingulär.

(c) Visa att matrisen $Q = (I - S)^{-1}(I + S)$, den s. k. *Cayleytransformen*** av S, är unitär. (Detta är matrismotsvarigheten till möbiusavbildningen*** $(1 + s)/(1 - s)$ som avbildar vänstra halvplanet konformt på enhetsskivan i det komplexa planet.)

Let $S \in \mathbf{C}^{m \times m}$ be *skew-hermitian*, i. e., $S^* = -S$.

(a) Show that the eigenvalues of S are pure imaginary.

(b) Show that $I - S$ is nonsingular.

(c) Show that the matrix $Q = (I - S)^{-1}(I + S)$, known as the *Cayley*** *transform*, is unitary. (This is a matrix analogue of a linear fractional, or Moebius***, transformation $(1 + s)/(1 - s)$, which maps the left half of the complex s-plane conformally onto the unit disk.)

---

* Charles Hermite, 1822-1901, Paris

** Arthur Cayley, 1821-95, Cambridge, England

*** August Ferdinand Möbius, 1790-1868, Leipzig