5. Euklidiska vektorrum

Avstånd och vinklar kan inte definieras enbart med hjälp av räkneoperationerna i ett vektorrum E, dvs. med hjälp av addition och multiplikation med skalär. Vi skall nu lägga till mera struktur i E genom att införa en ny räkneoperation, den skalära produkten. Genom denna nya produkt, som bör underlyda vissa räkneregler (axiom), kan både avstånds- och vinkelbegreppet definieras.

Den skalära produkten införs genom axiom eftersom det finns oändligt många sätt att definiera en sådan produkt. Genom detta kommer våra satser och bevis att gälla för varje skalär produkt som uppfyller axiomen.

Definition 5.1. Ett vektorrum E kallas ett *euklidiskt* vektorrum om det är försett med en så kallad *skalär produkt*: Till varje par av vektorer $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E$ hör en entydig skalär $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, kallad den skalära produkten av $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, sådan att följande axiom gäller:

IV (*a*) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ för varje $\mathbf{x} \in E$; $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ bara om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
(*b*) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ för varje $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E$;
(*c*) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$, för varje $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in E$;
(*d*) $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, för varje $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E$.

Vi ser genast att $(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = 0$ för varje $y \in E$, ty $(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = (0\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Den andra delen av axiom IV (a) kunde alltså lika gärna skrivas: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ om och endast om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Anmärkning. I litteraturen förekommer också beteckningar som $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$ och $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$ för den skalära produkten av $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.

Exempel 5.1. Vi kan göra $\mathbf{R}^n$ till ett euklidiskt vektorrum genom att definiera en skalär produkt genom

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,.$$

Denna brukar kallas den *naturliga skalära produkten* och kan skrivas som en matrisprodukt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$$

ifall vi uppfattar faktorerna som kolonnvektorer (t.ex. $\mathbf{x} = (\, x_1 \quad \ldots \quad x_n \,)^T$). Att axiomen IV $(a) - (d)$ gäller, följer ur räknereglerna för matrisprodukter.

Exempel 5.2. I $\mathbf{R}^3$ kan vi införa en skalär produkt t.ex. genom att sätta

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 11 x_3 y_3 = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 11 \end{pmatrix} \mathbf{y} \,.$$

Observera här att diagonalelementen i diagonalmatrisen måste vara positiva för att axiom IV (a) skall gälla. Byter man alltså ut talet 11 mot -11 så duger det uppkomna uttrycket inte som en skalär produkt.

Exempel 5.3. Låt oss noggrant verifiera att om vi i $\mathbf{R}^2$ sätter

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

så har vi definierat en skalär produkt: Med hjälp av kvadratkomplettering får vi

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 3(x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2) + 3x_2^2 \\ &= 3\left(x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{4}{9}x_2^2\right) + \left(3 - \frac{4}{3}\right)x_2^2 = 3\left(x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)^2 + \frac{5}{9}x_2^2 \geq 0\end{aligned}$$

Ur detta följer att $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ om och endast om både $x_1 + (2/3)x_2 = 0$ och $x_2 = 0$, dvs. om och endast om $x_1 = x_2 = 0$. Alltså gäller axiom IV (a). Vid transponering av en 1/1-matris (= skalär) förblir matrisen oförändrad. Detta tillsammans med det faktum att A är symmetrisk ger att IV (b) gäller:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^T A \mathbf{y}\right)^T = \mathbf{y}^T A^T \mathbf{x}^{TT} = \mathbf{y}^T A \mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \,.$$

Välkända räkneregler för matriser ger giltigheten hos de två sista axiomen:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= (\mathbf{x} + \mathbf{y})^T A \mathbf{z} = (\mathbf{x}^T + \mathbf{y}^T) A \mathbf{z} = \mathbf{x}^T A \mathbf{z} + \mathbf{y}^T A \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ (\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\lambda \mathbf{x})^T A \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,.\end{aligned}$$

Observera att det är likgiltigt vilka matriselement A innehåller bara regel IV (a) gäller och A är symmetrisk.

Exempel 5.4. Låt

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad \text{och} \\ q(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \end{aligned}$$

vara två godtyckliga polynom i vektorrummet P_3 av polynom av högst graden 3. Vi kan då införa en skalär produkt i P_3 på många olika sätt, t.ex. genom att sätta

$$(p, q) = a_0 b_0 + 3a_1 b_1 + 5a_2 b_2 + 7a_3 b_3 \,,$$

eller genom att sätta

$$(p, q) = \int_{-2}^{9} x^4 p(x) q(x)\, dx \,.$$

Man bevisar detta genom att i tur och ordning verifiera axiomen IV $(a) - (d)$ med hjälp kända räkneregler (för t.ex. integraler).

Avstånd och vinklar

Definition 5.2. Med *normen* (eller *längden*) av en vektor $\mathbf{x}$ i ett euklidiskt vektorrum E avses talet

$$\|\mathbf{x}\| = +\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}\,.$$

Avståndet mellan två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i E är talet

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\,.$$

En vektor $\mathbf{x}$ sägs vara en *enhetsvektor* om $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Enligt dessa definitioner är normen av en vektor $\mathbf{x}$ detsamma som avståndet från $\mathbf{0}$ till $\mathbf{x}$. Observera att norm och avstånd är beroende av den skalära produkten i vektorrummet. Olika skalära produkter ger i allmänhet upphov till olika talvärden för norm och avstånd:

> **Exempel 5.5.** I $\mathbf{R}^2$ svarar den skalära produkten
>
> $$\mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad \text{mot normen} \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{5x_1^2 + 2x_2^2}\,.$$
>
> Mot den skalära produkten
>
> $$\mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad \text{svarar normen} \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2}\,.$$

Eftersom

$$\|\lambda\mathbf{x}\|^2 = (\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}) = \lambda^2(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2$$

så gäller räkneregeln

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\cdot\|\mathbf{x}\|$$

för varje norm. För att kunna härleda fler räkneregler, behöver vi Schwarz olikhet:

Sats 5.1. (Schwarz olikhet) *I ett euklidiskt vektorrum E gäller för varje skalär produkt och motsvarande norm olikheterna*

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le |(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$$

för varje $\mathbf{x}\in E$ och $\mathbf{y}\in E$.

Bevis. Vi kan allra först konstatera att alla tre leden blir noll om $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ eller $\mathbf{y}=\mathbf{0}$. Påståendet gäller alltså i sådana fall. Låt oss därför i fortsättningen av beviset anta att $\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$ och $\mathbf{y}\ne\mathbf{0}$.

Vi skall minimera kvadraten av avståndet,

$$f(t) = \|t\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\,,$$

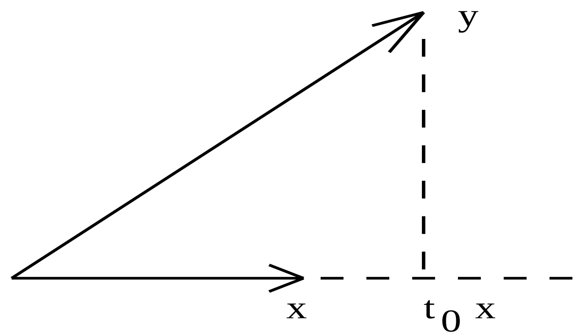

fig. 1

mellan $t\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ genom att variera t.

Eftersom en kvadrat inte kan vara negativ, är $f(t_0) \geq 0$ för det värde t_0 som ger minimum. Denna olikhet är just Schwarz olikhet. Vi kan bestämma t_0 t.ex. genom kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \|t\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = (t\mathbf{x}-\mathbf{y}, t\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= (t\mathbf{x}, t\mathbf{x}) - (t\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{y}, t\mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\
&= t^2\|\mathbf{x}\|^2 - 2t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}\|^2\left(t^2 - 2t\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{x}\|^4}\right) + \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \\
&= \|\mathbf{x}\|^2\left(t - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2}\right)^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{x}\|^2}.
\end{aligned}$$

Det minsta värdet för $f(t)$ antas då

$$t = t_0 = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

Detta ger oss olikheten

$$0 \leq f(t_0) = \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{x}\|^2},$$

vilket efter omformning och kvadratrotsutdragning ger $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. Den första olikheten i formeln i satsen är självklar, eftersom $c \leq |c|$ för varje skalär c. $\diamondsuit$

Exempel 5.6. Mot den skalära produkten

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

(se exempel 5.5) svarar en Schwarz-olikhet med utseendet

$$|2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2| \leq \sqrt{2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2}\sqrt{2y_1^2 + 4y_1y_2 + 3y_2^2}\,.$$

Med hjälp av Schwarz olikhet fås den s.k. *triangelolikheten*, en viktig räkneregel för normen,

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\,,$$

ty

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y},\, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) + (\mathbf{y},\, \mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2\,.\end{aligned}$$

Det är naturligt att säga att det kortaste avståndet från $\mathbf{y}$ till $\operatorname{spn}\{\mathbf{x}\}$ i fig. 1 är det “vinkelräta avståndet”. Genom detta fastslås både begreppet rät vinkel och vinkelmåttet ϕ för vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, ty ur den “rätvinkliga” triangeln i fig. 1 fås

$$\cos\varphi = \pm\frac{\|t_0\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|} = \pm|t_0|\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|} = t_0\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|}\,,$$

där $t_0 = (\mathbf{x},\, \mathbf{y})/\|\mathbf{x}\|^2$ enligt beviset för Schwarz olikhet. Den naturliga definitionen för vinklar är alltså:

Definition 5.3. *Vinkeln* φ mellan två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, fås ur formeln

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\,.$$

Vinkeln blir entydig om vi kommer överens om att alla vinklar skall ha ett värde i intervallet $[0,\, \pi]$. Definitionslikheten kan också skrivas

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\varphi\,.$$

Anmärkning. Lägg märke att ett vinkelmått existerar så snart $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, eftersom högerledet i definitionsformeln då ligger i intervallet $[-1, 1]$ enligt Schwarz olikhet. Om någondera vektorn är nollvektorn, existerar ingen vinkel. Lägg också märke till att vinkelmåttet (precis som avståndsmåttet) helt är beroende av vilken skalär produkt som används.

Exempel 5.7. Antag att $\mathbf{R}^3$ är försett med den naturliga skalära produkten. För vektorerna $\mathbf{x} = (1 \quad 1 \quad 4)^T$ och $\mathbf{y} = (4 \quad 1 \quad 1)^T$ är $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \sqrt{18}$ och $(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = 9$. För vinkeln φ mellan dem gäller därför

$$\cos\varphi = \frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{18}} = \frac{1}{2}\,,$$

varför φ är $\pi/3$, dvs. $60°$. Om däremot $\mathbf{R}^3$ är försett med t.ex. skalärprodukten i exempel 5.2 så fås ett annat värde på vinkeln mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.

Definition 5.4. Två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i ett euklidiskt vektorrum är *ortogonala* om $(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = 0$. Detta betecknas $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Om $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ är dessa två vektorer ortogonala om och endast om vinkeln mellan dem är rät, dvs. likamed $\pi/2 = 90°$. Observera att nollvektorn enligt vår definition är ortogonal mot varje vektor i vektorrummet, eftersom $(\mathbf{0},\, \mathbf{x}) = 0$.

För den naturliga skalära produkten i $\mathbf{R}^n$ gäller att $\mathbf{x} = (\, x_1 \quad \ldots \quad x_n \,)$ och $\mathbf{y} = (\, y_1 \quad \ldots \quad y_n \,)$ är ortogonala om

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0\,.$$

Definition 5.5. Vi säger att ett antal vektorer $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ i ett euklidiskt vektorrum är *ortogonala* om de är parvis ortogonala, dvs. om $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j$ för $i \neq j$, och *ortonormala* om det dessutom gäller att varje $\mathbf{x}_i$ är en enhetsvektor, dvs. om $\|\mathbf{x}_i\| = 1$. Ortonormala vektorer sägs bilda ett *ortonormerat system* (förkortat: *ON-system*).

Exempel 5.8. Låt $\mathbf{R}^2$ vara försett med den naturliga skalära produkten. Om ON-systemet $\{(\,1 \quad 0\,)^T, (\,0 \quad 1\,)^T\}$ av naturliga enhetsvektorer vrids en vinkel θ, fås ett nytt ON-system $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

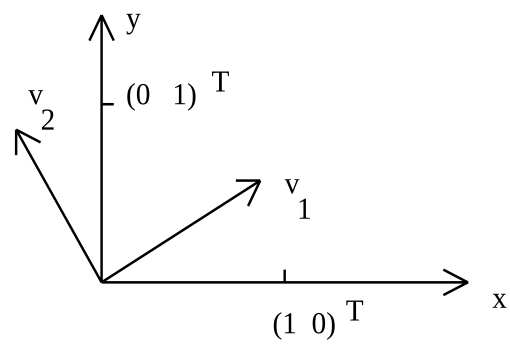

fig. 2

Sätt $\mathbf{v}_1 = (\, x_1 \quad y_1 \,)^T$ och $\mathbf{v}_2 = (\, x_2 \quad y_2 \,)^T$. Då är

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta, \quad y_1 = \sin\theta \\ x_2 &= -\sin\theta, \quad y_2 = \cos\theta\,. \end{aligned}$$

Det nya ON-systemet är alltså $\{(\,\cos\theta \quad \sin\theta\,)^T, (\,-\sin\theta \quad \cos\theta\,)^T\}$.

Exempel 5.9. Polynomen $1/\sqrt{2}$, $\sqrt{3/2}\,x$ bildar ett ON-system i vektorrummet P av alla polynom om den skalära produkten är

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx\,.$$

Sats 5.2. *Om vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ är ortogonala i ett euklidiskt vektorrum och $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ för varje $i = 1, \ldots, k$ så är $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ linjärt oberoende.*

Bevis. Antag att $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Genom att bilda den skalära produkten av bägge leden med $\mathbf{v}_i$, fås

$$c_1(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1) + \cdots + c_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) + \cdots + c_k(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k) = 0\,.$$

I vänstra ledet är alla termer noll utom den i:te. Således är $c_i\|\mathbf{v}_i\|^2 = 0$ och följaktligen $c_i = 0$, eftersom $\mathbf{x}_i \neq 0$. Men detta gäller för varje $i \in \{1, \ldots, k\}$. Alltså är $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ linjärt oberoende. $\diamondsuit$

Exempel 5.10. Två linjärt oberoende vektorer i $\mathbf{R}^2$ behöver naturligtvis inte automatiskt vara ortogonala i den naturliga skalära produkten. Däremot existerar det för två givna linjärt oberoende vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ alltid en annan skalär produkt, i vilken $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ blir ortonormala: Låt ξ_1, ξ_2 respektive η_1, η_2 beteckna koordinaterna i basen $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ för godtyckliga vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ och definiera en skalär produkt genom

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 .$$

Eftersom $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ har koordinaterna $1, 0$ respektive $0, 1$, är uppenbarligen $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. För de nya normerna gäller $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$.

Geometriska objekt i $\mathbf{R}^n$

I fortsättningen *använder vi i* $\mathbf{R}^n$ *alltid den naturliga skalära produkten, ifall ingenting annat uttryckligen sägs.* Detta gäller genom resten av kompendiet.

(a) En *rät linje* L är entydigt bestämd genom att man anger en fast punkt $\mathbf{x}_0$ på L och en riktning $\mathbf{v} \neq 0$ för L. En punkt $\mathbf{x}$ ligger på L, dvs. $\mathbf{x} \in L$, om och endast om

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$$

för något $t \in \mathbf{R}$. Detta är linjens ekvation i parameterform med t som parameter.

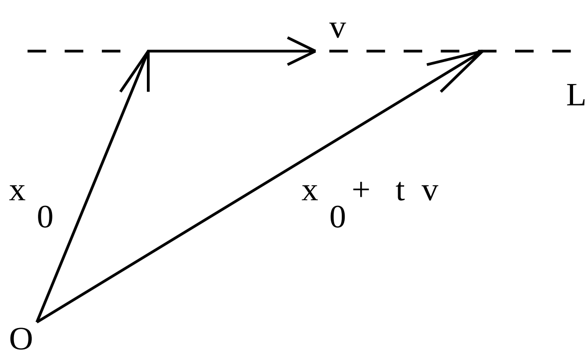

fig. 3

Om L ligger t.ex. i $\mathbf{R}^3$ och om $\mathbf{x} = (x \quad y \quad z)^T$, $\mathbf{x}_0 = (x_0 \quad y_0 \quad z_0)^T$ och $\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)^T$, kan ekvationen skrivas i komponentform

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3 . \end{aligned}$$

Om linjen L är definierad av att den går genom $\mathbf{x}_0$ och $\mathbf{x}_1$ ($\neq \mathbf{x}_0$) så kan man som riktningvektor välja $\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$.

(b) Ett *plan* P i $\mathbf{R}^3$ kan definieras av en punkt $\mathbf{x}_0$ som ligger i P och två riktningar $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Planets ekvation i parameterform blir $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Alternativt kan P:s läge anges genom $\mathbf{x}_0$ och en normalvektor $\mathbf{n} = (\, l \quad m \quad n\,)^T$ till P.

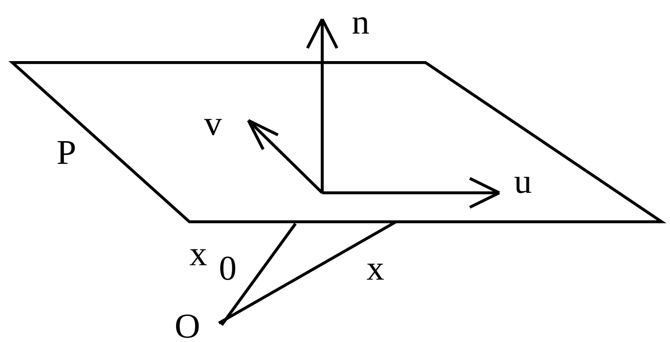

fig. 4

En punkt $\mathbf{x} = (\, x \quad y \quad z\,)^T$ ligger i P om och endst om vektorn $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ är ortogonal mot $\mathbf{n}$, dvs. om och endast om

$$\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0\,. \tag{1}$$

Detta är ekvationen för planet P. Fullständigt utskriven blir ekvationen

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0\,,$$

dvs. den är av formen $Ax + By + Cz + D = 0$. Varje ekvation av denna form, där $\mathbf{N} = (\, A \quad B \quad C\,)^T \neq \mathbf{0}$, representerar uppenbarligen ett plan med normalvektorn $\mathbf{N}$.

Om dimensionen för $\mathbf{R}^n$ är större än 3 säger man att (1) är ekvationen för ett *hyperplan* i $\mathbf{R}^n$.

Exempel 5.11. I $\mathbf{R}^4$ är $U = \{(\, x_1 \quad 0 \quad x_3 \quad x_4\,)^T \,|x_1, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\}$ ett hyperplan genom origo, i detta fall ett underrum med dimensionen 3. Det har ekvationen $x_2 = 0$ och normalvektorn $(\, 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\,)^T$. Ekvationen

$$2(x_1 - 1) - (x_2 - 2) + 3(x_3 + 1) + x_4 = 0$$

representerar ett hyperplan genom punkten $(\, 1 \quad 2 \quad -1 \quad 0\,)^T$ med normalvektorn $(\, 2 \quad -1 \quad 3 \quad 1\,)^T$. Ekvationen kan också skrivas $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 3 = 0$. Om denna variant av ekvationen är given, hittar man lätt en punkt på hyperplanet genom att ge tre variabler (fria variabler) godtyckliga värden och sedan räkna ut den fjärde. En sådan punkt är t.ex. $(\, -3/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,)^T$.

Det är lätt att se (och har framgått genom exempel) att **en rät linje respektive ett hyperplan i $\mathbf{R}^n$ är ett underrum om och endast om den/det går genom origo**.

Ortogonala underrum

Definition 5.6. Två underrum V och W av ett euklidiskt vektorrum sägs vara *ortogonala* om $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ för varje $\mathbf{v} \in V$ och $\mathbf{w} \in W$. För ortogonaliteten använder vi beteckningen $V \perp W$

Exempel 5.12. I $\mathbf{R}^3$ är xy-planet och z-axeln ortogonala. I $\mathbf{R}^4$ är underrummen

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{spn}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \right\} \\ W &= \operatorname{spn}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T \right\} \end{aligned}$$

ortogonala, ty de två vektorer som spänner upp V är bägge ortogonala mot de två vektorer som spänner upp W.

Sats 5.3. *För varje m/n-matris A gäller*

$$\begin{array}{lllll} (a) & N(A) & \perp & R(A^T) & \text{i } \mathbf{R}^n \\ (b) & N(A^T) & \perp & R(A) & \text{i } \mathbf{R}^m \,. \end{array}$$

Bevis. Relation (b) följer ur relation (a) genom att A ersätts med A^T. För att bevisa relation (a) väljer vi godtyckliga vektorer $\mathbf{x} \in N(A)$ och $\mathbf{y} \in R(A^T)$. Då gäller att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och att $\mathbf{y} = A^T\mathbf{u}$ för något $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$. För den skalära produkten fås nu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{u} = (A\mathbf{x})^T\mathbf{u} = \mathbf{0}^T\mathbf{u} = 0 \,.$$

Underrummen $N(A)$ och $R(A^T)$ är alltså ortogonala. $\diamondsuit$

Definition 5.7. Antag att V är ett underrum av ett euklidiskt vektorrum E. Mängden

$$V^\perp = \{\mathbf{y} \in E \mid \mathbf{y} \perp \mathbf{x} \text{ för varje } \mathbf{x} \in V\}$$

av alla vektorer $\mathbf{y}$ som är ortogonala mot V kallas det *ortogonala komplementet* till V.

Det är lätt att se att $V^\perp$ är ett underrum av E. Direkt ur definitionen följer också att ett underrum V och dess ortogonala komplement $V^\perp$ alltid är ortogonala underrum:

$$V \perp V^\perp \,.$$

Exempel 5.13. Observera att två underrum kan vara ortogonala utan att vara varandras ortogonala komplement: Om V är x-axeln och W är y-axeln i $\mathbf{R}^3$ så är W inte det det ortogonala komplementet till V, ty $V^\perp$ omfattar uppenbarligen hela yz-planet.

Vi kan nu precisera relation (a) i Sats 5.3:

Sats 5.4. *Antag att A är en m/n-matris. Då gäller relationerna:*

$$(a) \quad R(A^T)^\perp = N(A)\,,$$
$$(b) \quad R(A^T) = N(A)^\perp\,.$$

Bevis. (a) Låt $\overline{\mathbf{a}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_m$ beteckna raderna i A. Då är

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in N(A) \quad &\iff \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\iff \quad \overline{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} = 0 \text{ för } i = 1, \ldots, m \\ &\iff \quad \left(\sum_{i=1}^m c_i\overline{\mathbf{a}}_i\right)\mathbf{x} = 0 \text{ för varje } \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m c_i\overline{\mathbf{a}}_i \in R(A^T) \\ &\iff \quad \mathbf{x} \in R(A^T)^\perp\,. \end{aligned}$$

Således är $N(A) = R(A^T)^\perp$.

(b) Eftersom $N(A) \perp R(A^T)$ enligt Sats 5.3, är $R(A^T) \subseteq N(A)^\perp$. Vi skall visa att denna inklusion i själva verket är en likhet. För detta antar vi som en **antites** att det finns en radvektor $\overline{\mathbf{z}} \in N(A)^\perp$ sådan att $\overline{\mathbf{z}} \notin R(A^T)$. Sätt

$$A_1 = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{a}}_m \\ \overline{\mathbf{z}} \end{pmatrix}.$$

Då är det klart att $N(A) = N(A_1)$, eftersom vektorn $\overline{\mathbf{z}}$ valts ortogonal mot $N(A)$. Men ur $\overline{\mathbf{z}} \notin R(A^T)$ följer att $\dim R(A_1^T) = \dim R(A^T) + 1$ och vidare enligt Sats 4.13 att $\dim R(A_1) = \dim R(A) + 1$. Därmed är, enligt Sats 4.14,

$$n = \dim R(A_1) + \dim N(A_1) = \dim R(A) + \dim N(A) + 1 = n + 1\,,$$

eftersom både A och A_1 har n kolonner. Men detta är en motsägelse. Slutsatsen blir att $R(A^T) = N(A)^\perp$. $\diamondsuit$

Sats 5.4 kan naturligtvis tillämpas också på matrisen A^T. Man får då en precisering av relation (b) i Sats 5.3:

$$R(A)^\perp = N(A^T)\,, \qquad R(A) = N(A^T)^\perp\,.$$

Vi kan nu bevisa:

Sats 5.5. *Antag att V och W är underrum av $\mathbf{R}^n$.*

(i) Följande påståenden är ekvivalenta:

$$(1) \quad W = V^\perp\,,$$
$$(2) \quad V = W^\perp\,,$$
$$(3) \quad V \perp W \text{ och } \dim V + \dim W = n\,.$$

(ii) Då (1), (2) eller (3) gäller, har varje $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ en entydig uppdelning

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\,, \text{ där } \mathbf{x}_1 \in V\,,\ \mathbf{x}_2 \in W\,.$$

Vektorn $\mathbf{x}_1$ kallas härvid den ortogonala projektionen *av $\mathbf{x}$ på V och $\mathbf{x}_2$ kallas den* ortogonala projektionen *av $\mathbf{x}$ på W.*

Bevis. (i) Antag att (1) gäller. Låt $\{\overline{\mathbf{a}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_k\}$ vara en bas i V och sätt

$$A = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{a}}_k \end{pmatrix}.$$

Då är $R(A^T) = V$ och $N(A) = W$. Enligt Sats 5.4 är nu $N(A)^\perp = R(A^T)$, så att $W^\perp = V$, dvs. (2) gäller. På samma sätt följer (1) ur (2).

Om något av de ekvivalenta påståendena (1) eller (2) gäller, är $V \perp W$ och för matrisen A ovan fås att

$$\dim V + \dim W = \dim R(A^T) + \dim N(A) = \dim R(A) + \dim N(A) = n$$

dvs. (3) gäller. Antag omvänt att (3) gäller för underrummen V och W och sätt $W_1 = V^\perp$. Då är $W \subseteq W_1$. Enligt vad vi just visat är $\dim V + \dim W_1 = n$. Med hjälp av (3) fås nu att $\dim W = \dim W_1$. Detta tillsammans med inklusionen $W \subseteq W_1$ ger likheten $W = W_1 = V^\perp$. Alltså gäller (1).

(ii) Tag en bas $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ i V och en bas $\{\mathbf{b}_{k+1}, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ i W. Då består unionen av dessa baser av linjärt oberoende vektorer i $\mathbf{R}^n$, ty om $c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$ så är

$$c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_k\mathbf{b}_k = -(c_{k+1}\mathbf{b}_{k+1} + \cdots + c_n\mathbf{b}_n),$$

där vänsterledet tillhör V medan högerledet tillhör W. Men eftersom V och W bara har vektorn $\mathbf{0}$ gemensam (de är ju ortogonala) så är bägge leden $\mathbf{0}$. Detta ger att att $c_1 = \cdots = c_k = 0$ och att $c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$. Vektorerna b_i ($i = 1, \ldots, n$) bildar därför enligt Sats 4.7 en bas i $\mathbf{R}^n$. Varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ är därmed en linjärkombination

$$\mathbf{x} = (d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_k\mathbf{b}_k) + (d_{k+1}\mathbf{b}_{k+1} + \cdots + d_n\mathbf{b}_n) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,$$

där $\mathbf{x}_1 \in V$ och $\mathbf{x}_2 \in W$.

Entydigheten hos denna uppdelning fås på följande sätt: Antag att $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, där $\mathbf{y}_1 \in V$ och $\mathbf{y}_2 \in W$, är en godtycklig uppdelning av $\mathbf{x}$. Då är ju $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, dvs.

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2,$$

där vänsterledet ligger i V och högerledet i W. Ortogonaliteten hos V och W medför att bägge leden är $\mathbf{0}$, så att $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ och $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$. Varje uppdelning är alltså identisk med den som vi först presenterade. $\diamondsuit$

Anmärkning. Med samma beteckningar som i Sats 5.5 fås genom insättning av $W = V^\perp$ i likheten $V = W^\perp$ att

$$V = V^{\perp\perp}.$$

Denna relation gäller för vilket underrum V av $\mathbf{R}^n$ som helst.

Exempel 5.15. I detta exempel skall vi visa hur man bestämmer en bas i ett ortogonalt komplement. Antag att

$$V = \operatorname{spn}\left\{(1 \quad -2 \quad 3)^T, (2 \quad 3 \quad -1)^T\right\}.$$

Då består $V^\perp$ av alla $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, sådana att $\mathbf{a}_1^T\mathbf{x} = 0$ och $\mathbf{a}_2^T\mathbf{x} = 0$. Detta betyder att $V^\perp$ är nollrummet till matrisen med raderna $\mathbf{a}_1^T$ och $\mathbf{a}_2^T$. Vi bestämmer en bas i detta nollrum på vanligt sätt,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

och ser att $\{(\,-1 \quad 1 \quad 1\,)^T\}$ är en sådan.

Exempel 5.16. Om underrummet W är definierat som mängden av alla $\mathbf{x} = (\,x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\,)^T \in \mathbf{R}^4$ som satisfierar systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\,, \end{cases}$$

så består W av alla $\mathbf{x}$, som är ortogonala mot $(\,1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\,)^T$ och $(\,1 \quad 2 \quad 3 \quad 4\,)^T$, dvs. dessa två vektorer uppspänner $W^\perp$. Eftersom de råkar vara linjärt oberoende, bildar de en bas i $W^\perp$.

Sats 5.5 har en föjdsats som direkt berör ekvationslösning:

Sats 5.6. *För en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gäller att för varje $\mathbf{b} \in \mathbf{R}(A)$ finns i mängden av alla lösningar* precis en *lösning $\mathbf{x}$ i radrummet $R(A^T)$.*

Bevis. Eftersom $\mathbf{b} \in R(A)$, existerar det lösningar. Låt $\mathbf{y}$ vara någon lösning och skriv (med stöd av Sats 5.5 och Sats 5.4) denna som en summa

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2\,, \text{ där } \mathbf{y}_1 \in R(A^T) \text{ och } \mathbf{y}_2 \in N(A)\,.$$

Då är $A\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ så att

$$\mathbf{b} = A\mathbf{y} = A\mathbf{y}_1 + A\mathbf{y}_2 = A\mathbf{y}_1\,,$$

vilket bevisar existensen av en lösning $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 \in R(A^T)$. Det återstår att bevisa entydigheten hos detta $\mathbf{x}$. Låt $\mathbf{x}'$ beteckna en godtycklig lösning i $R(A^T)$. Då är

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}' = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}\,,$$

dvs. $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in N(A)$. Men $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ligger ju också i det ortogonala komplementet $R(A^T)$ till $N(A)$. Således är vektorn $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ortogonal mot sig själv. Men den enda vektor som kan vara ortogonal mot sig själv är nollvektorn (axiom IV (a)). Alltså är $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. $\diamondsuit$

Exempel 5.17. För att bestämma den lösning till

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2\,, \end{cases}$$

som ligger i koefficientmatrisens radrum $R(A^T)$, löser vi först systemet och finner lösningarna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2\,.$$

Eftersom $R(A^T)$ är ortogonalt mot $N(A) = \text{spn}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, bör vi välja s och t så att

$$\begin{cases} 0 = \mathbf{v}_1^T\mathbf{x} = \mathbf{v}_1^T\mathbf{x}_0 + s\|\mathbf{v}_1\|^2 + t\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 \\ 0 = \mathbf{v}_1^T\mathbf{x} = \mathbf{v}_2^T\mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_1 + t\|\mathbf{v}_2\|^2 \,. \end{cases}$$

Efter uträkning av skalära produkter och normer fås systemet

$$\begin{cases} 0 = -2 + 6s + 8t \\ 0 = -3 + 8s + 14t \,, \end{cases}$$

som har lösningen $s = 1/5$, $t = 1/10$. Insättning av dessa värden ger den lösningsvektor $\mathbf{x} = \frac{1}{10}(4 \quad 3 \quad 2 \quad 1)^T$, som ligger i $R(A^T)$.

Kolonnrum och nollrum för en matrisprodukt

Sats 5.7. *Antag att A är en m/n-matris och B en n/p-matris. Då gäller:*

$$\begin{aligned} &(i) && R(AB) \subseteq R(A)\,, \\ &(ii) && N(AB) \supseteq N(B)\,. \end{aligned}$$

Bevis. (i) Formeln följer ur implikationerna

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \in R(AB) \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{b} = AB\mathbf{x} \text{ för något } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^p \\ &\Longrightarrow \quad \mathbf{b} = A\mathbf{y} \text{ för något } \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \text{ (nämligen } \mathbf{y} = B\mathbf{x}) \\ &\Longrightarrow \quad \mathbf{b} \in R(A)\,. \end{aligned}$$

(ii) Formeln fås ur implikationerna

$$\mathbf{x} \in N(B) \quad \Longrightarrow \quad B\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad AB\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} \in N(AB)\,. \diamondsuit$$

Anmärkning. Om vi tillämpar formlerna i Sats 5.7 på produkten $B^TA^T = (AB)^T$, fås formler som gäller radrummet och vänsternollrummet av en produkt:

$$\begin{aligned} R((AB)^T) &\subseteq R(B^T)\,, \\ N((AB)^T) &\supseteq N(A^T)\,. \end{aligned}$$

Låt $r(X)$ och $d(X)$ beteckna rangen $\dim R(X)$ respektive defekten $\dim N(X)$ hos en matris X. Låt dessutom $\min(\alpha, \beta)$ beteckna det mindre av talen α och β (utläses: "minimum av α och β").

Korollarium 5.7. *Om A är en m/n-matris och B en n/p-matris så är*

$$\begin{aligned} &(i) && r(AB) \le \min(r(A), r(B))\,, \\ &(ii) && d(AB) \ge d(B)\,. \end{aligned}$$

Bevis. Relation (ii) är en direkt följd av Sats 5.7. Samma sats säger också direkt att $r(AB) \le r(A)$. Med hjälp av Sats 4.13 och anmärkningen ovan, fås

$$r(AB) = \dim R((AB)^T) \le \dim R(B^T) = \dim R(B) = r(B)\,.$$

Alltså är talet $r(AB)$ mindre än både $r(A)$ och $r(B)$, dvs. (i) gäller. $\diamondsuit$

Submatriser

Definition 5.8. Om A är en given matris, så fås en *submatris* av A genom att ett antal rader och kolonner stryks i A.

Exempel 5.18. Om man i matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

stryker rad ett och tre samt kolonn två, så uppstår submatrisen $\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Sats 5.8. *Antag att $r = r(A)$ är rangen hos en matris A. Då gäller:*

$$\begin{array}{ll} (i) & r(C) \le r \text{ för varje submatris } C \text{ av } A; \\ (ii) & r(C) = r \text{ för någon } r/r\text{-submatris } C \text{ av } A. \end{array}$$

Bevis. (i) Vi "reducerar" A till C i två steg. Först stryker vi rader i A så att en matris B uppstår. Då kan ju dimensionen för radrummet bara minska. Enligt Sats 4.13 är därför

$$r = \dim R(A) = \dim R(A^T) \ge \dim R(B^T) = \dim R(B) = r(B)\,.$$

I det andra steget stryker vi kolonner i B så att C uppstår. Då kan ju dimensionen för kolonnrummet bara minska, så att

$$r(B) = \dim R(B) \ge \dim R(C) = r(C)\,.$$

Alltså är $r(C) \le r$.

(ii) Precis r rader i A, säg $\overline{\mathbf{a}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_r$, bildar en bas i $R(A^T)$. Sätt

$$B = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{a}}_r \end{pmatrix}.$$

Då är $r(B) = \dim R(B^T) = r$. Följaktligen bildar precis r kolonner i B, säg $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$, en bas i $R(B)$. Sätt $C = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_r \end{pmatrix}$. Då är $r(C) = r$ och C är en r/r-submatris av matrisen A. $\diamondsuit$

Övningsuppgifter

1. Vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ har längderna 2 respektive 3 och vinkeln mellen dem är $2\pi/3$. (a) Beräkna längden av vektorn $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$. (b) Bestäm någon vektor av formen $x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, som är ortogonal mot $\mathbf{v}$.
2. Bestäm a så att vinkeln mellan vektorerna $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5a \end{pmatrix}^T$ och $\begin{pmatrix} 3a & 4a & 5 \end{pmatrix}^T$ blir $\pi/3$.
3. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \ne \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \ne \mathbf{0}$) om $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ är vinkelrät mot $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ och $\mathbf{a} + 7\mathbf{b}$ är vinkelrät mot $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

4. Bestäm en enhetsvektor som är parallell med xy-planet och vinkelrät mot vektorn $(4 \quad -3 \quad 1)^T$.
5. Bevisa att $x^2+y^2+z^2 \geq 6$ om $2x-y+z \leq -6$. Ledning: Använd Schwarz olikhet.
6. Bevisa att $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \leq n({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)$. Ledning: Använd Schwarz olikhet.
7. Visa att om $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ och $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$ för alla $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ så måste $\mathbf{x}$ vara nollvektorn.
8. Visa att om $N(AB) = N(B)$ så är $R(B) \cap N(A) = \{\mathbf{0}\}$.
9. Betrakta följande underrum av $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \operatorname{spn}\{(1 \quad -1 \quad 1 \quad -1)\}\,,\\
M_2 &= \operatorname{spn}\{(1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)\,,(0 \quad 1 \quad 0 \quad -1)\}\,,\\
M_3 &= \operatorname{spn}\{(1 \quad 0 \quad 0 \quad -1)\,,(0 \quad 1 \quad 0 \quad -1)\,,(0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)\}\,,\\
M_4 &= \operatorname{spn}\{(-1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)\,,(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\}\,.
\end{aligned}$$

   (a) Ange alla par av ortogonala underrum av $\mathbf{R}^4$ i mängden $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

   (b) Undersök vilka av dessa par som är varandras ortogonala komplement.
10. Visa att om A och B är n/n-matriser och $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är två vektorer i $\mathbf{R}^n$ så är skalära produkten av $A\mathbf{x}$ och $B\mathbf{y}$ likamed skalära produkten av $\mathbf{x}$ och $(A^TB)\mathbf{y}$.
11. Bestäm i $\mathbf{R}^3$ alla vektorer som är ortogonala mot både $(1 \quad 1 \quad 1)$ och $(1 \quad -1 \quad 0)$. Konstruera utgående från detta ett system av tre parvis ortogonala enhetsvektorer i $\mathbf{R}^3$ (dvs. ett ortonormerat system).
12. Rad i i matrisen B, som antas inverterbar, är ortogonal mot kolonn j i B^{-1} om $i \neq j$. Varför?
13. Visa att om V och W är ortogonala underrum av ett euklidiskt vektorrum så är nollvektorn den enda vektor de har gemensam.
14. Finns det något värde på k, för vilket det existerar en rät linje $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ som är parallell med de tre planen

$$\begin{aligned}
2x - (k+2)y + z + 1 &= 0\,,\\
kx + \qquad 2y - 4z - 3 &= 0\,,\\
kx - \qquad\ \ y - 3z + 3 &= 0\,.
\end{aligned}$$

   Ange i så fall k och vektorn $(a \quad b \quad c)^T$.
15. Konstruera en matris, vars nollrum spänns upp av vektorn $(1 \quad 0 \quad 1)^T$.
16. (a) Låt W vara det underrum av $\mathbf{R}^5$ som uppspänns av $\mathbf{u} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad -1 \quad 2)^T$ och $\mathbf{v} = (2 \quad 4 \quad 7 \quad 2 \quad -1)^T$. Bestäm en bas i det ortogonala komplementet $W^\perp$ till W.

   (b) Låt U vara det underrum av $\mathbf{R}^3$ som uppspänns av $(1 \quad 1 \quad -2)^T$. Bestäm en bas i $U^\perp$ samt skriv vektorn $\mathbf{x} = (2 \quad 1 \quad -3)^T$ som en summa $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, där $\mathbf{x}_1 \in U$ och $\mathbf{x}_2 \in U^\perp$.

17. (a) Visa att vektorn $\mathbf{b} = (\,9 \quad -6 \quad 3\,)^T$ tillhör kolonnrummet för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Beräkna den entydiga vektor $\mathbf{x}$ i radrummet för A, för vilken $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

18. Visa att om $\{\mathbf{x},\, \mathbf{y}\}$ är ett ON-system i ett euklidiskt vektorrum så är $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{2}$.

19. Antag att V spänns upp av vektorerna $(\,1 \quad 1 \quad 0 \quad 1\,)^T$ och $(\,1 \quad 2 \quad 0 \quad 0\,)^T$. Bestäm ett underrum W av $\mathbf{R}^4$ sådant att $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$ och $V + W = \mathbf{R}^4$ (se uppgift 36 i kapitel 4).

20. (a) Visa att i ett euklidiskt vektorrum gäller att

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2\right)$$

för varje $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.

(b) Visa att i ett euklidiskt vektorrum gäller att

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2,$$

för varje $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Tolka denna formel geometriskt!

21. Visa med hjälp av uppgift 26 i kapitel 3 att

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

uppfyller axiom IV (a) för en skalär produkt (de övriga axiomen följer ur allmänna räkneregler rörande matrisprodukter).

22. Låt $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ vara en mängd ($n \geq 3$) och låt $A_1, \ldots, A_m$ vara äkta delmänger av X (då är $A_k \neq X$ för alla k), sådana att varje par x_i, x_j av olika element i X bägge finns i precis en delmängd A_k. Låt $B = (b_{ik})$ vara den s.k. *incidensmatrisen*, som är definierad av att $b_{ik} = 1$ om $x_i \in A_k$ och $b_{ik} = 0$ om $x_i \notin A_k$

(a) Visa att BB^T är en matris som består av enbart ettor utom i diagonalen, där vi har talen $r_1, \ldots, r_n$. Dessa tal r_i anger för hur många k det gäller att $x_i \in A_k$ (inte sant?).

(b) Notera att $r_i \geq 2$ på grund av att $n \geq 3$.

(c) Matrisen BB^T är icke-singulär enligt uppgift 26 i kapitel 3. Använd formeln för rangen av en matrisprodukt till att visa att $m \geq n$, dvs. använd formeln

$$r(CD) \leq \min(r(C), r(D)).$$