

Matriser

Ingmar Björkfelt och Sten Bjön

ÅBO 2003

Förord

Linjära samband uttrycks enklast, kortast och tydligast med hjälp av matriser. Att matrismetoder är viktiga beror främst på att ett linjärt samband oftast är den första approximationen av ett mera komplicerat samband. T.ex. kan en krokig kurva $y = f(x)$ ju approximeras **lokalt** av sin tangent, vilken beskrivs av en **linjär** ekvation $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$ förutsatt att derivatan $f'(x_0)$ existerar. Då man har en funktion med flera variabler, blir den lokala linjära approximationen mer komplicerad och uttrycks då enklast med hjälp av matriser. I många tillämpningar, t.ex. i ellära, är sambanden färdigt linjära. I dessa fall är den linjära matrisbeskrivningen t.o.m. den fundamentala.

Framställningen av ämnet matriser i detta kompendium strävar till att lära ut både begrepp och metoder. I exemplen visas alltid "små" matriser för att det tydligare skall framgå hur en viss metod fungerar. Man bör emellertid ha klart för sig att metoden i fråga fungerar på samma sätt också för "stora" matriser. Metoderna är oftast algoritmiskt beskrivna så att de utan vidare kan utföras av ett datorprogram. De flesta matematikprogram för datorer innehåller i själva verket färdiga rutiner för större delen av dessa metoder men för att kunna använda rutinerna på ett adekvat sätt bör användaren känna till hur de fungerar. Denna förståelse strävar vi till att ge läsaren genom detta kompendium. För enkelhetens skull behandlas enbart reella matriser även om de flesta begrepp och metoder har sina direkta motsvarigheter för matriser med komplexa element.

Kompendiet är en bearbetning av Ingmar Björkfelts mer än tjugo år gamla kompendium. Alla kapitel har omarbetats. Såväl kapitlens inbördes ordning som ordningsföljden på stoffet inom kapitlen har i någon mån ändrats, nya exempel och övningsuppgifter har tillkommit och några har strukits. Kapitlet om egenvärden och egenvektorer samt kapitlet om diagonalisering är helt nyskrivna. Detsamma gäller avsnittet om spektralframställningen av en symmetrisk matris. De nya avsnitt med finare stil, som finns på några ställen, innehåller stoff som inte nödvändigtvis hör hemma i en grundkurs i ämnet matriser. Bortsett från tilläggen är innehållet i detta förnyade kompendium dock väsentligen detsamma som i det gamla.

STEN BJON

Matematiska institutionen vid Åbo Akademi, Åbo

Den 8 maj 2003

Innehållsförteckning

1. Gausseliminering	1
Triangulära system och system i echelonform	1
Omformning till echelonform	3
Räkneschemat	5
Lösning av ekvationssystem	7
Övningsuppgifter	8
2. Matriser och vektorer	11
Addition och multiplikation med skalär	12
Matrismultiplikation	13
Transponerade matriser	18
Övningsuppgifter	19
3. Gausseliminering genom matrismultiplikation	23
Matrisinverser	25
Uträkning av inverser	27
LU -faktorisering	28
Permutationsmatriser	30
Mera om LU -faktorisering	31
Användningar av LU - och LDU -faktoriseringar	33
Symmetriska matriser	37
Avrundningsfel. Partiell pivotering	37
Övningsuppgifter	38
4. Vektorrum	42
Axiom för vektorrum	42
Underrum	44
Kolonnummet och nollrummet till en matris	46
Strukturen hos lösningen till ett system	48
Linjärt beroende och oberoende	50
Om rader och kolonner i en echelonmatris	52
Baser, koordinater och dimension	54
Bas och dimension för kolonn- och radrum	58
Sambandet mellan rang och defekt	61
Vänsternollrum. Matriser med rangen ett	63
Höger- och vänsterinverser	64
Övningsuppgifter	66
5. Euklidiska vektorrum	73
Avstånd och vinklar	75
Geometriska objekt i \mathbf{R}^n	79
Ortogonal underrum	81
Kolonnum och nollrum för en matrisprodukt	85
Submatriser	86
Övningsuppgifter	86

6. Determinanter	89
Egenskaper hos determinanter	91
Utveckling efter en rad eller en kolonn	96
Matrisinverser	97
Cramers regel	98
Övningsuppgifter	98
7. Egenvärden och egenvektorer	101
Övningsuppgifter	106
8. Ortogonala projektionen	107
Inkonsistenta ekvationen och projektionsmatriser	109
Spektralframställningen	112
Ortogonal matriser och projektionsmatriser	114
Gram–Schmidt-proceduren	117
QR-faktoriseringen	119
Volym	120
Övningsuppgifter	121
9. Diagonalisering	123
Övningsuppgifter	126
10. Linjära operatorer	128
Sambandet mellan linjära operatorer och matriser	130
Matrisen för sammansättningar	132
Bastransformationer	133
Inversa operatorer	136
Övningsuppgifter	137
Svar till övningsuppgifterna	140