Determinanter

Innan vi slår fast en definition av begreppet determinant, behöver vi gå in på några förberedande förklaringar:

En *permutation* av talen $1, \ldots, n$ är en uppräkning $(j_1, \ldots, j_n)$ av dessa samma tal i någon ordning. Mängden av alla permutationer av $1, \ldots, n$ betecknar vi med S_n. Observera att en permutation $\sigma = (j_1, \ldots, j_n)$ också kan uppfattas som en funktion $\sigma : k \mapsto \sigma(k) = j_k$ med indexet k som argument och talet j_k som funktionsvärde.

Exempel 1. Både $(2, 1, 4, 3)$ och $(4, 3, 1, 2)$ är permutationer av talen $1, \ldots, 4$.

En *inversion* förekommer vid (i, k) (och (k, i)) i en permutation $\sigma = (j_1, \ldots, j_n)$ om för två index i och k med $i < k$ gäller $j_i > j_k$, dvs. om talen j_i och j_k kommer i avtagande storleksordning. Det totala antalet inversioner i $\sigma = (j_1, \ldots, j_n)$ är

$$\begin{aligned} t(\sigma) = \quad & \#(k > 1 \quad \text{med} \quad j_1 > j_k) \\ & + \#(k > 2 \quad \text{med} \quad j_2 > j_k) + \cdots + \#(k > n-1 \quad \text{med} \quad j_{n-1} > j_k) \,. \end{aligned}$$

Permutationen σ är *jämn* om $t(\sigma)$ är ett jämnt tal och *udda* om $t(\sigma)$ är udda.

Exempel 2. Om $\sigma = (4, 3, 1, 2)$ så är $t(\sigma) = 3 + 2 + 0 = 5$, dvs. σ är en udda permutation.

Låt nu $A = (a_{ij})$ vara en n/n-matris.

Definition 1. En *elementär produkt* i A är en produkt av n element i A, vilka alla tagits ur **olika** rader och kolonner.

Exempel 3. Om

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

så är t.ex. $a_{12}a_{21}a_{33}$ och $a_{11}a_{23}a_{32}$ elementära produkter i A.

Definition 2. *Determinanten* av matrisen $A = (a_{ik})$ är summan

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \,,$$

(där $\sigma = (j_1, \ldots, j_n)$) av alla de $n!$ elementära produkterna i A försedda med tecken

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{t(\sigma)} = \begin{cases} 1, & \text{om } \sigma \text{ är en jämn permutation} \\ -1, & \text{om } \sigma \text{ är udda.} \end{cases}$$

Oftast använder man beteckningen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

för determinanten $\det(A)$.

Exempel 4. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

har de två elementära produkterna $a_{11}a_{22}$ och $a_{12}a_{21}$. Den första av dessa får ett positivt tecken, eftersom permutationen $(2, 1)$ är jämn, medan den andra får ett negativt tecken, eftersom permutationen $(2, 1)$ är udda. Alltså är

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Exempel 5. För en 3/3-matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

har vi $9 = 3!$ elementära produkter att bestämma tecknet för:

Elementär produkt	$\epsilon(\sigma)$
$a_{11}a_{22}a_{33}$	$+1$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	-1
$a_{12}a_{21}a_{33}$	-1
$a_{12}a_{23}a_{31}$	$+1$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	$+1$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	-1

T.ex. får den elementära produkten i rad två ett minustecken, eftersom permutationen $(1, 3, 2)$ är udda. Tecknen i denna tabell kan sammanfattas i *Sarrus regel*: Upprepa A:s två första kolonner efter A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

De tre produkter som bildas av element på en (åt höger) snett nedåtgående diagonallinje genom denna rektangel av tal är de elementära produkter som får plustecken (t.ex. huvuddiagonalen i A) medan de tre produkter som bildas av element på en snett uppåtgående diagonallinje är de elementära produkter som får minustecken. Observera att **Sarrus regel bara gäller för 3/3-matriser**.

Egenskaper hos determinanter

En n/n-determinant ger upphov till $n!$ elementära produkter. Om n är stort (ja, redan om $n = 4$) innehåller definitionsuttrycket för en determinant alltför många termer för att det skall löna sig att använda detta då man räknar ut determinantens värde. De egenskaper hos determinanter som vi nu skall härleda utgör i själva verket **räkneregler** som kommer att ge oss effektiva metoder att räkna ut värdet av determinanter – både stora och små.

1. *En n/n-matris och dess transponerade matris har samma determinant*

$$\det(A^T) = \det(A)\,.$$

Bevis. Då man bildar en elementär produkt, tar man exakt ett element ur varje rad och kolonn. Alltså ger A och A^T upphov till precis samma elementära produkter. Det återstår för oss bara att förklara varför dessa elementära produkter får samma tecken. I en godtycklig elementär produkt $a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$ i A kan vi byta ordningsföljd på faktorerna så att den (lämpligen) kan tolkas som en elementär produkt för A^T:

$$a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} = a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n}\,.$$

Då är permutationerna $\sigma : i \mapsto j_i$ och $\tau : r \mapsto k_r$ varandras inversa funktioner, $\tau = \sigma^{-1}$. En inversion förekommer i σ vid (i, l) om och endast om $l - i$ och $\sigma(l) - \sigma(i)$ har olika tecken, dvs. om och endast om

$$\frac{\sigma(l) - \sigma(i)}{l - i} = \frac{j_l - j_i}{l - i} < 0\,.$$

Denna kvot är negativ om och endast om den inverterade kvoten är negativ,

$$\frac{\tau(j_l) - \tau(j_i)}{j_l - j_i} = \frac{l - i}{j_l - j_i} < 0\,,$$

och detta gäller precis då det förekommer en inversion i τ vid (j_l, j_i). Permutationerna σ och τ innehåller alltså lika många inversioner och ger upphov till samma tecken. $\diamondsuit$

Anmärkning. På grund av egenskap 1 har rader och kolonner i en determinant samma ställning. Därför kan räknereglerna 2 till 6, som vi nedan formulerar för kolonner, utan vidare formuleras också för rader.

2. *Låt* $A = (\mathbf{a}_1 \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_i \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_k \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_n)$ *vara en matris och låt* A' *vara den matris som uppkommer då kolonnerna* $\mathbf{a}_i$ *och* $\mathbf{a}_k$ *byter plats i* A*. Då är*

$$\det(A') = -\det(A)\,.$$

(En motsvarande regel gäller för rader.)

Bevis. Låt $\sigma = (j_1, \ldots, j_i, \ldots, j_k, \ldots, j_n)$ beteckna en en godtycklig permutation och låt σ' vara den permutation som uppstår då j_i och j_k byter plats i σ. Ett resonemang som är lite komplicerat (men som vi för fullständighetens skull återger nedan) visar att $t(\sigma) - t(\sigma') = u$ alltid är ett udda tal. Därför är

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{\sigma'\in S_n} -\epsilon(\sigma') a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} = -\det(A')\,.\end{aligned}$$

Bevis för att u är udda: Bara inversioner av typerna

$$\begin{aligned}&(1) \qquad j_i > j_l, \qquad i < l < k\,, \\ &(2) \qquad j_l > j_k, \qquad i < l < k\,,\end{aligned}$$

kan uppkomma eller försvinna då j_i och j_k byter plats i σ. Låt I vara mängden av alla heltal l mellan i och k och sätt

$$\begin{aligned}n_1 &= \#(l \in I \text{ med } j_i < j_l), \quad m_1 = \#(l \in I \text{ med } j_l < j_k), \\ n_2 &= \#(l \in I \text{ med } j_i > j_l), \quad m_2 = \#(l \in I \text{ med } j_l > j_k)\,.\end{aligned}$$

Antalet inversioner förändras med

$u_1 = n_1 - n_2$, pga. att j_i flyttas till andra sidan av j_l,
$u_2 = m_1 - m_2$, pga. att j_k flyttas till andra sidan av j_l,
$u_3 = \pm 1$, pga. att j_i och j_k byter plats.

Eftersom $n_1 + n_2 = m_1 + m_2 = (k - i) - 1$ är konstant, så förändras u_1 och u_2 med steglängden ± 2 då n_1, n_2 respektive m_1, m_2 ändras. Således är antingen u_1 och u_2 bägge udda (då $(k - i) - 1$ är udda) eller bägge jämna (då $(k - i) - 1$ är jämnt). Men då är ju $u_1 + u_2$ alltid jämnt och den totala förändringen av antalet inversioner $u = u_1 + u_2 + u_3 = u_1 + u_2 \pm 1$ alltid udda. $\diamondsuit$

3. *Om två kolonner* (eller rader) *är lika i matrisen A, så är*

$$\det(A) = 0\,.$$

Bevis. Om $A = (\ldots\ \mathbf{a}_i\ \ldots\ \mathbf{a}_k\ \ldots)$ och $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_k$, så är enligt regel 2

$$\det(A) = \det(\ldots\ \mathbf{a}_i\ \ldots\ \mathbf{a}_k\ \ldots) = -\det(\ldots\ \mathbf{a}_k\ \ldots\ \mathbf{a}_i\ \ldots) = -\det(A)$$

och därmed $\det(A) = 0$. $\diamondsuit$

Nästa egenskap följer direkt ur definitionen på en determinant och kräver därför inget bevis:

4. *Om en kolonn* (eller rad) *innehåller en gemensam faktor, så kan denna faktor flyttas ut ur determinanten:*

$$\det(\mathbf{a}_1\ \ldots\ \lambda\mathbf{a}_i\ \ldots\ \mathbf{a}_n) = \lambda \det(\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_i\ \ldots\ \mathbf{a}_n)\,.$$

Exempel 6. I nedanstående determinant tar vi ut faktorn 2 ur första raden och faktorn 3 ur andra raden och får värdet

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 0 = 0\,,$$

eftersom två rader är lika (regel 3).

5. *En determinant är additiv i varje kolonn* (och rad)

$$\det(\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i\ \ldots\ \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_i\ \ldots\ \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}'_i\ \ldots\ \mathbf{a}_n)\,.$$

Bevis. De elementära produkterna i vänstra ledet kan (enligt distributionslagen för tal) skrivas

$$a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i} + a'_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} = a_{1j_1} \cdots a'_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}\,.$$

Regeln följer ur detta och definitionen på en determinant. $\diamondsuit$

Exempel 7. Om vi tillämpar regel 5 på rader får vi t.ex. att

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 2+3 & 1+0 & 3+1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Som en direkt följd av reglerna 5, 4 och 3 fås:

6. *Om $i \neq k$ så är*

$$\det(\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_i\ \ldots\ \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_i - \lambda\mathbf{a}_k\ \ldots\ \mathbf{a}_n)\,, \qquad (i \neq k)\,.$$

Anmärkning. Formulerad för rader säger denna regel att en determinants värde förblir oförändrat vid användning av $(BO1)$:

$$\det\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{a}}_i \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{a}}_i - \lambda\overline{\mathbf{a}}_k \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix}\,, \qquad (i \neq k)\,.$$

Om vi således med en följd av användningar av $(BO1)$ kan överföra en matris A på en uppåt triangulär form U,

$$A \to \cdots \to U = \begin{pmatrix} u_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & u_{22} & \cdots & * \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}\,,$$

så är $\det(A) = \det(U) = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$. I en triangulär matris är nämligen produkten av diagonalelementen den enda elementära produkt som kan vara olik noll. Alla andra elementära produkter innehåller minst en nolla.

Detta ger oss en effektiv metod att räkna ut värdet på en determinant. Reglerna 2 och 4 utgör ju något modifierade varianter av $(BO2)$ och $(BO3)$, så i praktiken har vi Gausselimineringens hela arsenal till vårt förfogande:

Exempel 8. För att kunna använda det "enkla" pivotelementet 1 flyttar vi i nedanstående determinant först ut den gemensamma faktorn 2 i andra raden och låter samtidigt de två första raderna byta plats ... :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$
$$= -(-2)(-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6\cdot 1\cdot 1\cdot 2 = -12\,.$$

7. *En kvadratisk matris A är singulär om och endast om* $\det(A) = 0$.

Bevis. Matrisen A kan överföras på en uppåt triangulär matris U med hjälp av enbart $(BO1)$ och $(BO2)$. Nu är

$$\begin{aligned} A \text{ singulär} &\iff U \text{ singulär} \\ &\iff \text{ngt diagonalelement i } U \text{ är } 0 \\ &\iff \det(U) = 0 \\ &\iff \det(A) = 0\,, \end{aligned}$$

ty $\det(A) = \pm\det(U)$ där vi har ett minustecken om $(BO2)$ har använts ett udda antal gånger.

8. *Om A och B är n/n-matriser, så är*

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)\,.$$

Determinanter kan alltså multipliceras med varandra på samma sätt som man multiplicerar ihop matriser.

Bevis. (a) Vi visar först att formeln gäller om A är en diagonalmatris. Om

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix},$$

så är enligt regel 4

$$\det(AB) = \det\begin{pmatrix} d_1\overline{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots \\ d_n\overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} = d_1\cdots d_n\cdot\det\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(B)\,.$$

(b) Antag nu att A är en godtycklig n/n-matris. Om A är singulär, så är också A^T och följaktligen också $B^T A^T = (AB)^T$ singulära. Nu är både $\det(A) = 0$ och $\det(AB) = \det((AB)^T) = 0$ enligt regel 7. Formeln gäller alltså i detta fall, eftersom bägge leden är noll.

Om A inte är singulär, så kan A överföras på en diagonalmatris D med hjälp av enbart ($BO1$) och ($BO2$):

$$A \to \cdots \to D = \text{ diagonalmatris}\,, \tag{1}$$

där $\det(A) = \pm\det(D)$. Det första steget i (1) får i det fortsatta resonemanget representera vilket steg som helst. Om detta är ($BO1$)-operationen

$$A = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_1 \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_i \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_1 \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_i - \lambda\overline{\mathbf{a}}_k \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix} = A_1\,,$$

så fås med samma basoperation och samma λ, att

$$AB = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_1 B \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_i B \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_n B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_1 B \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_i B - \lambda\overline{\mathbf{a}}_k B \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_n B \end{pmatrix} = A_1 B\,.$$

Är det första steget i (1) igen en ($BO2$)-operation

$$A = \begin{pmatrix} : \\ \overline{\mathbf{a}}_i \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_k \\ : \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} : \\ \overline{\mathbf{a}}_k \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_i \\ : \end{pmatrix} = A_1\,,$$

så fås med ombyte av samma rader

$$AB = \begin{pmatrix} : \\ \overline{\mathbf{a}}_i B \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_k B \\ : \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} : \\ \overline{\mathbf{a}}_k B \\ : \\ \overline{\mathbf{a}}_i B \\ : \end{pmatrix} = A_1 B\,.$$

Precis samma sekvens av basoperationer som i (1) men använda på produkten AB, leder alltså till

$$AB \to \cdots \to DB\,,$$

där det enligt tidigare regler och enligt fall (a) gäller att

$$\det(AB) = \pm\det(DB) = \pm\det(D)\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B)\,.$$

Formeln i regel 8 gäller alltså generellt för godtyckliga matriser A och B. $\diamondsuit$

Utveckling efter en rad eller en kolonn

Termerna i definitionsuttrycket för en derminant kan grupperas så att varje grupp representer ett element i determinanten multiplicerat med determinanten för en submatris (föresedd med plus- eller minustecken). Vi illustrerar detta med hjälp av en 3/3-determinant:

Exempel 9. Med hjälp av definitionen (eller Sarrus regel) utvecklar vi determinanten samt grupperar ihop de termer som vi nedan har skrivit under varandra:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ =& a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ =& a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}\,.\end{aligned}$$

Det som står på nästsista och sista raden är utvecklingen av determinanten efter första raden. Genom att gruppera termerna på annat sätt fås utvecklingar efter andra rader eller kolonner.

Den "subdeterminant" med tecken som vi i ovanstående exempel betecknat med A_{ik} kallas *kofaktorn* (eller *komplementet*) till elementet a_{ik}. Allmänt fås på detta sätt:

Sats 1. *Om $A = (a_{ik})$ är en n/n-matris och $\hat{A}_{ik}$ betecknar den submatris som uppstår då rad i och kolonn k stryks i A, så är*

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

utvecklingen av $\det(A)$ *efter rad i, där* kofaktorerna A_{ik} *fås ur*

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\det(\hat{A}_{ik})\,.$$

På motsvarande sätt kan $\det(A)$ *utvecklas efter en kolonn.*

Tecknet på en kofaktor bestäms enklast genom att man kommer ihåg att matriselementet längst uppe till vänster är associerat med en kofaktor med ett plustecken (framför en subdeterminant). De övriga elementen är sedan omväxlande associerade med plus- och minustecken precis som rutorna på ett schackbräde omväxlande är vita och svarta.

Exempel 10. Om vi vill utveckla följande 3/3-determinant efter 2:a kolonnen, så bör vi alltså associera ett minustecken med elementen 6 och 2 och ett plustecken med elementet -1 i andra kolonnen. Vi får utvecklingen:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\,.$$

Matrisinverser

Betrakta utvecklingen efter rad k av determinanten för en n/n-matris $A = (a_{lm})$:

$$\det(A) = a_{k1}A_{k1} + \cdots + a_{kn}A_{kn} \,. \tag{2}$$

Den likartade summan

$$a_{i1}A_{k1} + \cdots + a_{in}A_{kn} \,, \qquad (i \neq k) \,,$$

kan uppenbarligen betraktas som utvecklingen efter rad k av den determinant som vi får ur $\det(A)$ genom att ersätta rad k med en kopia av rad i. Eftersom två rader är lika i denna determinant, är dess värde noll:

$$a_{i1}A_{k1} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \,, \qquad (i \neq k) \,. \tag{3}$$

Likheterna (2) och (3) kan skrivas på en enda rad med hjälp av Kroneckers delta,

$$a_{i1}A_{k1} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \det(A) \cdot \delta_{ik} \,.$$

Vänstra ledet kan nu tolkas som ett matriselement i produkten av A med

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(observera att det första indexet här är kolonnindex och det andra radindex), vilken ibland kallas den *adjungerade matrisen* till A. Vi har alltså likheten $A\tilde{A} = \det(A) \cdot I$, vilket ger formeln

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$$

för matrisinversen om $\det(A) \neq 0$ (dvs. om A är icke-singulär).

Anmärkning. Denna formel är intressant ur teoretisk synvinkel men olämplig för numerisk uträkning av matrisinverser. Alla de n^2 matriselementen är ju $(n-1)/(n-1)$-determinanter, som var och en skall räknas ut separat.

Exempel 11. Om $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, så är

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \,,$$

ifall $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

Cramers regel

Om n/n-matrisen A är inverterbar, så kan lösningen till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skrivas

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\mathbf{b}\,,$$

vilket i komponentform ger

$$x_j = \frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^{n} A_{kj}b_k\,, \qquad (j = 1, \ldots, n)\,.$$

Summan i högerledet kan uppfattas som utvecklingen efter kolonn j av en determinant $\det(B_i)$, där B_j är den matris som uppstår ur A då kolonn j ersätts med $\mathbf{b}$:

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vi får därmed *Cramers regel* för komponenterna av $\mathbf{x}$:

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}\,, \qquad (j = 1, \ldots, n)\,.$$

Anmärkning. Cramers regel är inte lämplig för numeriska kalkyler. För det första kan den användas bara om $\det(A) \neq 0$. För det andra är den oekonomisk, eftersom den kräver väsentligt fler räkneoperationer än Gausseliminering. I nedanstående tabell jämförs lösning av ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ medelst Gausseliminering med användning av formeln $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ och med Cramers regel vad beträffar antalet räkneoperationer. Som räkneoperationer räknas här addition (= subtraktion) och multiplikation (= division):

Metod	Antal operationer
Gausseliminering	$\approx \frac{2}{3}n^3$
$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$	$\approx 2n^3$
Cramers regel	$\approx \frac{2}{3}n^4$

Om $n = 10$ så kräver alltså Cramers regel ungefär 10 gånger fler operationer än lösning genom Gausseliminering, om $n = 100$ kräver den ungefär 100 gånger fler operationer.

Övningsuppgifter (nya)

1. Räkna ut $\det(A)$ både för

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Beräkna determinanten

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix},$$

genom att överföra den på triangulär form.

3. För vilka 2/2-matriser A gäller att $\det(3A) = 3\det(A)$?

4. Visa utan att utveckla determinanterna att

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

5. Visa att

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & .. & a_1 \\ 0 & 1 & .. & a_2 \\ - & - & .. & - \\ 0 & 0 & .. & a_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & .. & b_1 \\ 0 & 1 & .. & b_2 \\ - & - & .. & - \\ 0 & 0 & .. & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & ... & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & ... & a_2 b_n \\ - & - & ... & - \\ a_n b_1 & a_n b_2 & ... & a_n b_n \end{vmatrix}.$$

6. För vilka värden på k är matriserna

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} k-2 & 1 \\ -5 & k+4 \end{pmatrix}, \qquad (ii) \quad B = \begin{pmatrix} k-4 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 3 & k-1 \end{pmatrix}$$

inte inverterbara (använd determinantteori!)?

Egenvärden och egenvektorer

Låt A beteckna en n/n-matris. I vissa riktningar $\mathbf{x} \neq 0$ beter sig matrisen A enkelt i den meningen att $\mathbf{x}$ och $A\mathbf{x}$ råkar vara parallella:

Definition 1. Talet λ sägs vara ett *egenvärde* till A om

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

för någon vektor $\mathbf{x} \neq 0$. Vektorn $\mathbf{x}$ sägs då vara en *egenvektor* till A som svarar mot egenvärdet λ.

Observera att om $\mathbf{x}$ är en egenvektor till A som svarar mot ett visst egenvärde λ, så är för varje $c \neq 0$ också $c\mathbf{x}$ en egenvektor som svarar mot egenvärdet λ. Längden av vektorn $\mathbf{x}$ är alltså irrelevant, endast riktningen har någon betydelse.

Egenvärden och egenvektorer är karakteristika för en matris A och berättar en hel del om matrisens egenskaper precis som t.ex typen och rangen också gör det. Vi kommer att se att i många fall innehåller egenvärdena och egenvektorerna t.o.m. *all* information om A.

> **Exempel 1.** För en enhetsmatris I gäller att $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ för varje $\mathbf{x}$. Således är talet 1 ett egenvärde till I och varje $\mathbf{x} \neq 0$ är en motsvarande egenvektor.

Om λ är ett egenvärde till A och $\mathbf{x}$ är en motsvarande egenvektor, så är

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \\ \text{för ngt } \mathbf{x} \neq 0 \end{matrix}\right\} &\iff \left\{\begin{matrix} (A-\lambda I)\mathbf{x} = 0 \\ \text{för ngt } \mathbf{x} \neq 0 \end{matrix}\right\} \\
&\iff A - \lambda I \quad \text{är singulär} \\
&\iff \det(A - \lambda I) = 0\,.
\end{aligned}$$

Således gäller:

Sats 1. *Om A är en n/n-matris, så fås A:s egenvärden genom att man löser den s.k.* karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0\,.$$

Därefter fås de egenvektorer som svarar mot ett visst egenvärde λ genom att man löser den homogena ekvationen $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$.

Då man utvecklar determinanten i den karakteristiska ekvationen, så fås alltid en polynomekvation av n:te graden, i vilken koefficienten för λ^n är $(-1)^n$. En sådan har ju alltid exakt n (reella eller komplexa) lösningar då multipliciteten beaktas. Den karakteristiska ekvationen kan alltså skrivas i den ekvivalenta formen

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{n_p} = 0\,,$$

där λ_k $(k = 1, \ldots, p)$ betecknar A:s **olika** egenvärden och n_k är (den algebraiska) *multipliciteten* hos egenvärdet λ_k. Om multipliciteten hos ett egenvärde är 1, 2, 3 ... sägs detta vara *enkelt*, *dubbelt*, *tredubbelt* ....

Definition 2. *Egenrummet* $V(\lambda)$ *till en* n/n*-matris* A *med egenvärdet* λ *är nollrummet* $N(A - \lambda I)$.

Egenrummet $V(\lambda)$ är alltså ett underrum av $\mathbf{R}^n$ och består av nollvektorn och alla egenvektorer till A som svarar mot egenvärdet λ. Eftersom $N(A - 0 \cdot I) = N(A)$, så *är 0 ett egenvärde till A om och endast om A är singulär.*

Exempel 2. Den karakteristiska ekvationen för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

är

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1\,.$$

Ur denna löser vi ut egenvärdena 3 och 1. De egenvektorer som svarar mot egenvärdet 3 fås nu genom att man löser ekvationen $(A - 3I)\mathbf{x} = 0$:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösningarna är alltså $\mathbf{x} = t\,(1 \quad 1)^T$ och varje sådan vektor utom nollvektorn är en egenvektor som svarar mot egenvärdet 3. På samma sätt löser vi $(A - I)\mathbf{x} = 0$ med hjälp av räkneschemat

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och får fram de egenvektorer $\mathbf{x} = t\,(-1 \quad 1)^T$ $(t \neq 0)$ som svarar mot egenvärdet 1.

Om matrisen A är reell och ett egenvärde λ inte är reellt (dvs. äkta komplext), så måste åtminstone någon komponent av en motsvarande egenvektor $\mathbf{x}$ vara icke-reell för att likheten $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ skall kunna gälla. Om däremot både A och egenvärdet λ är reella, så kan motsvarande egenvektorer $\mathbf{x}$ väljas reella.

Exempel 3. Den karakteristiska ekvationen för matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

är $\lambda^2 + 1 = 0$, varför egenvärdena är $\pm i$. De egenvektorer som svarar mot t.ex. egenvärdet i har formen $t\,(1 \quad -i)^T$, där $t \neq 0$ är ett reellt (eller komplext) tal.

Eftersom reella matriser således kan ha icke-reella egenvärden, så inser vi att teorin för egenvärden och egenvektorer egentligen borde utformas för komplexa matriser. I fortsättningen väljer vi emellertid alltid som exempel bara sådana matriser, som har reella egenvärden. I många fall är egenvärdena alltid t.o.m. automatiskt reella, såsom följande sats visar:

Sats 2. *Antag att A är en* symmetrisk *n/n-matris. Då gäller:*

(i) *Alla egenvärden till A är reella;*

(ii) *Om λ och μ är* olika *egenvärden till A så är $V(\lambda) \perp V(\mu)$.*

Bevis. (*i*) Låt λ är ett egenvärde och låt $\mathbf{x}$ ($\neq 0$) vara en motsvarande egenvektor. Här måste vi temporärt acceptera att $\mathbf{x}$ kan ha icke-reella komponenter eftersom vi inte ännu vet att λ i själva verket måste vara reellt. Om $\mathbf{x} = (\, x_1 \quad \ldots \quad x_n \,)^T$, sätt $\mathbf{x}^* = (\, \overline{x_1} \quad \ldots \quad \overline{x_n} \,)$, där beteckningen $\overline{c} = a - ib$ står för konjugattalet till ett givet komplext tal $c = a + ib$. Om ekvationen $A\mathbf{x} = \lambda x$ multipliceras från vänster med $\mathbf{x}^*$ fås $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{x}$, dvs.

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} \,.$$

Nämnaren $\mathbf{x}^* \mathbf{x} = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0$ är en summa av kvadrater av belopp av komplexa tal och är således reell. Täljaren är ett komplext tal som sammanfaller med sitt eget konjugattal, ty eftersom $A = (a_{ik})$ är reell och symmetrisk, är

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}} &= \overline{\sum_{i,k} \overline{x_i} a_{ik} x_k} = \sum_{i,k} x_i a_{ik} \overline{x_k} \\ &= \sum_{i,k} \overline{x_k} a_{ki} x_i = \mathbf{x}^* A\mathbf{x} \,. \end{aligned}$$

Då därmed både täljaren och nämnaren i uttrycket för λ är reella, så är λ reellt.

(*ii*) Vi skall visa att om vi tar godtyckliga (reella) vektorer $\mathbf{x} \in V(\lambda)$ och $\mathbf{y} \in V(\mu)$, så är $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \\ A\mathbf{y} = \mu \mathbf{y} \end{array} \right\} &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \mu \mathbf{x}^T \mathbf{y} \end{array} \right\} \\ &\Longrightarrow (\lambda - \mu)\mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0 \Longrightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \,. \diamondsuit \end{aligned}$$

För en matris A som inte är symmetrisk, behöver det inte gälla att egenvektorer som svarar mot olika egenvärden är ortogonala. Däremot måste de nog vara linjärt oberoende:

Sats 3. *Antag att $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ vara* olika *egenvärden till en n/n-matris och låt $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ vara en uppsättning motsvarande egenvektorer, så att*

$$A\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k \qquad (k = 1, \ldots, p) \,.$$

Då är $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ linjärt oberoende.

Bevis. Satsen bevisas enklast genom induktion. Vi konstaterar först att påståendet gäller om $p = 1$. Sedan antar vi att påståendet gäller om vi har $p = k - 1$ egenvektorer $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ och skall bevisa att påståendet också gäller då antalet är $p = k$. Vi bildar därför en linjärkombination av de k egenvektorerna och sättar denna likamed $\mathbf{0}$:

$$c_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + c_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \,. \tag{1}$$

Vi multiplicera från vänster med A, beaktar att $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ och får:

$$c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{c}_k\lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}\,. \tag{2}$$

Vektorn $\mathbf{x}_k$ elimineras genom att vi bildar skillnaden mellan (2) och λ_k gånger (1):

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}\,.$$

Nu följer att $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$, eftersom $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ är linjärt oberoende. Enligt (1) är därför $c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ och därmed $c_k = 0$. Induktionen ger att satsens påstående gäller för varje antal p av egenvektorer. $\diamondsuit$

Exempel 4. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

har den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(8-\lambda)\,.
\end{aligned}$$

Matrisen A har alltså egenvärdena 2 (dubbelt) och 8 (enkelt).

$\underline{\lambda = 2}$: En bas i egenrummet $V(2) = N(A - 2I)$ fås ur

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

och resulterer i $\{(-1 \quad 1 \quad 0)^T, (-1 \quad 0 \quad 1)^T\}$.

$\underline{\lambda = 8}$: En motsvarande kalkyl

$$A - 8I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ger basen $\{(1 \quad 1 \quad 1)^T\}$ i $V(8) = N(A - 8I)$. Observera att vektorn $(1 \quad 1 \quad 1)^T$ är ortogonal mot basvektorerna i $V(2)$ men att basvektorerna i $V(2)$ inte (automatiskt) behöver bli ortogonala mot varandra (jfr. Sats 2).

Exempel 5. Efter en stunds kalkyler finner man att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

har den karakteristiska ekvationen $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$.

$\underline{\lambda = 2}$: En bas i $V(2)$ fås ur

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $\{(0 \quad 1 \quad 0)^T, (-1 \quad 0 \quad 1)^T\}$.

$\underline{\lambda = 1}$: Räkneschemat blir

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och en bas i $V(1)$ består alltså av den enda vektorn $(-2 \quad 1 \quad 1)^T$, som uppenbarligen *inte* är ortogonal mot basvektorerna i $V(2)$. Däremot bildar unionen av basvektorerna i $V(2)$ och $V(1)$ en linjärt oberoende mängd (jfr. Sats 3).

På basen av de två senaste exemplen kunde man få uppfattningen att om multipliciteten hos ett egenvärde λ är t.ex. 2, så finner vi precis 2 basvektorer i egenrummet $V(\lambda)$. Detta behöver inte alltid vara fallet men för symmetriska matriser är det så:

Märk! Man kan visa att om A är en symmetrisk n/n-matris med den karakteristiska ekvationen

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{n_p} = 0,$$

där $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ är olika egenvärden och $\sum_i n_i = n$, så är

$$\dim V(\lambda_i) = n_i\,.$$

Vi ger ett exempel på en (icke-symmetrisk) matris, som saknar denna egenskap:

Exempel 5. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har den karakteristiska ekvationen $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2$, varför det enda egenvärdet 0 har multipliciteten 2. Matrisen är redan i reducerad echelonform, så vi kan direkt avläsa att $\{(1 \quad 0)\}$ en bas i motsvarande egenrum $V(0)$. Dimensionen hos $V(0)$ är således bara 1, inte 2.

Anmärkning. Matriserna i exemplen i denna kurs är så små att det fortfarande är möjligt att utveckla determinanten i den karakteristiska ekvationen. Om matrisen är stor, blir detta oftast en uppgift som överstiger krafterna. Andra metoder krävs då för att man skall få fram egenvärdena till matrisen. Som ett exempel på en sådan metod nämner vi att koefficienterna i den karakteristiska ekvationen

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

till en n/n-matris kan fås genom att man löser ekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ S_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ S_{n-1} & S_{n-2} & S_{n-3} & \cdots & S_1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ c_{n-3} \\ - \\ c_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ - \\ S_n \end{pmatrix},$$

där $S_k = \operatorname{tr}(A^k)$ för $k = 1, 2, \ldots, n$ är spåret av potensen A^k av matrisen A. Egenvärdena kan sedan bestämmas genom att man löser den karakteristiska ekvationen med numeriska metoder.

Övningsuppgifter

1. Finn alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till matriserna

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Bestäm egenvärden och baser i egenrummen till matriserna

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix},$$

$$(c)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (d)\ \begin{pmatrix} 5 & -12 & 6 \\ -1 & 5 & -1 \\ -5 & 18 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Bestäm egenvärden och baser i egenrummen för A^{62} då A är någon av matriserna

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Visa att den karakteristiska ekvationen för en (reell) $2/2$-matris A kan skrivas

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0\,.$$

   Bestäm villkoret för att A skall ha enbart reella egenvärden samt verifiera att detta villkor är uppfyllt för alla symmetriska $2/2$-matriser.

5. Visa att A och A^T har samma egenvärden. Hur är egenvektorerna till A och A^T relaterade till varandra?

6. Visa att om A är en uppåt (nedåt) triangulär matris eller en diagonalmatris, så är A:s egenvärden precis matriselementen i huvuddiagonalen i A.

7. En matris A sägs vara *nilpotent* om $A^k = 0$ för något positivt heltal k. Visa att en nilpotent matris bara har egenvärdet 0.

8. Låt $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ vara ett polynom och sätt $p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$. Visa att om λ är ett egenvärde till A, så är $p(\lambda)$ ett egenvärde till $p(A)$.

Spektralframställningen

Sats 1. *Antag att A är en symmetrisk n/n-matris. Låt $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ vara de* olika *egenvärdena för A. Låt vidare P_i beteckna* (den ortogonala) *projektionsmatrisen på egenrummet $V(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$. Då gäller den s.k.* spektralframställningen *av A:*

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_p P_p\,.$$

Bevis. Eftersom $\sum_i \dim V(\lambda_i) = n$ och egenrummen $V(\lambda_i)$ är parvis ortogonala, kan varje $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ skrivas

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p\,,$$

där $\mathbf{x}_i = P_i\mathbf{x} \in V(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$. Genom att multiplicera från vänster med A fås

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A\mathbf{x}_1 + \cdots + A\mathbf{x}_p \\ &= \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_p\mathbf{x}_p \\ &= \lambda_1 P_1\mathbf{x} + \cdots + \lambda_p P_p\mathbf{x} \\ &= (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p)\mathbf{x}\,. \end{aligned}$$

Eftersom detta gäller för varje $\mathbf{x}$, så är $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p$. $\diamondsuit$

Låt oss se hur spektralframställningen kan användas i praktiken. Eftersom A är symmetrisk, är $V(\lambda_i) \perp V(\lambda_k)$ om $i \neq k$. Därmed är

$$P_i P_k = 0 \quad \text{om } \ i \neq k\,,$$

ty för varje $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ är $P_k\mathbf{x} \in V(\lambda_k) \subseteq N(P_i)$, varför $P_i(P_k\mathbf{x}) = 0$ för varje $\mathbf{x}$. Om vi nu bildar potenser av A, t.ex. A:s kvadrat, försvinner alla korstermer:

$$\begin{aligned} A^2 &= (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p)(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p) \\ &= \lambda_1^2 P_1 + \cdots + \lambda_p^2 P_p\,. \end{aligned}$$

Allmänt fås på samma sätt för en godtycklig heltalsexponent $m \geq 1$:

$$A^m = \lambda_1^m P_1 + \cdots + \lambda_p^m P_p\,. \tag{1}$$

Om $\lambda_i \neq 0$ för varje i så gäller denna formel också om exponenten är 0 eller ett negativt heltal, förutsatt att vi definierar A^0 och A^{-m} genom $A^0 = I$ och $A^{-m} = (A^{-1})^m$. För $m = 0$ har vi ju för varje $\mathbf{x}$ den uppdelning i en summa som vi har använt ovan,

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = P_1\mathbf{x} + \cdots + P_p\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p\,.$$

Ur

$$(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p)\left(\frac{1}{\lambda_1}P_1 + \cdots + \frac{1}{\lambda_p}P_p\right) = P_1 + \cdots + P_p = I$$

följer att

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} P_1 + \cdots + \frac{1}{\lambda_p} P_p \,.$$

Då bägge leden i denna formel upphöjs till potensen m, ser man att (1) gäller också för negativa heltalsexponenter.

Exempel 1. En kalkyl visar att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

har egenvärdena 3 och 1 och att vektorn $\mathbf{a}_1 = (\,1 \quad 1\,)^T$ respektive $\mathbf{a}_2 = (\,-1 \quad 1\,)^T$ bildar en bas i $V(3)$ respektive $V(1)$. Projektionsmatriserna på dessa egenrum är alltså

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T}{\|\mathbf{a}_1\|^2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\,1 \quad 1\,) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ P_2 &= \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T}{\|\mathbf{a}_2\|^2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (\,1 \quad -1\,) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

och spektralframställningen av A blir $A = 3P_1 + P_2$. Heltalspotenser A^n av A fås nu genom att att man upphöjer egenvärdena till potensen n:

$$\begin{aligned} A^n &= 3^n P_1 + P_2 \\ &= 3^n \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

för varje $n \in \mathbf{Z}$. Notera att detta kan användas t.ex. då man bestämmer gränsvärdet av A^n då $n \to -\infty$: Eftersom gränsvärden av matriser bildas elementvis, är

$$\lim_{n \to -\infty} A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P_2 \,.$$

Övningsuppgifter

1. Bestäm spektralframställningen för matrisen A då

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skriv ut en formel för A^n samt bestäm en tredjerot ur A, dvs. en matris X sådan att $X^3 = A$.

Diagonalisering

Låt A vara en given n/n-matris. Vi ställer som en uppgift för oss själva att finna en inverterbar matris B, sådan att

$$B^{-1}AB = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

är en diagonalmatris.

Definition 1. En sådan matris B sägs *diagonalisera* A och A sägs vara *diagonaliserbar* om det existerar en matris B som diagonaliserar A.

För att få ett grepp om hur matrisen B skall konstrueras, antar vi att vi redan har hittat en matris B sådan att (1) gäller och undersöker hur B då måste se ut:

Genom att multiplicera med B från vänster skriver vi om (1) i formen $AB = BD$. Sedan sätter vi $B = (\,\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_n\,)$ och får

$$\begin{aligned} AB = BD &\iff A\,(\,\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_n\,) = (\,\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_n\,)\,D \\ &\iff (\,A\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad A\mathbf{b}_n\,) = (\,\lambda_1\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \lambda_n\mathbf{b}_n\,) \\ &\iff A\mathbf{b}_i = \lambda_i\mathbf{b}_i \quad (i = 1, \dots, n)\,. \end{aligned}$$

Av detta ser vi att diagonalelementen λ_i i D kommer att vara egenvärden till A och att kolonnerna $\mathbf{b}_i$ i B är motsvarande egenvektorer till A. Eftersom matrisen B dessutom måste vara inverterbar (dvs. icke-singulär), så måste egenvektorerna $\mathbf{b}_i$ väljas så att att de är linjärt oberoende.

Vi sammanfattar:

Sats 1. *En n/n-matris A är diagonaliserbar om och endast om det finns n stycken linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ till A. Matrisen $B = (\,\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_n\,)$, som har dessa egenvektorer som kolonner, är en matris som diagonaliserar A:*

$$B^{-1}AB = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till A uppträder i D:s diagonal i en ordning som svarar mot egenvektorernas ordning i B.

Anmäkning. Om A:s alla egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är **olika** så finns det n stycken linjärt oberoende egenvektorer till A. Matrisen A är alltså diagonaliserbar i detta fall. Om A är **symmetrisk** så finns det också alltid n linjärt oberoende egenvektorer (också om vissa egenvärden är lika). Alla symmetriska matriser är således diagonaliserbara.

Exempel 1. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

har den karakteristiska ekvationen $(2-\lambda)^2 - 4 = 0$, varför egenvärdena blir 0 och 4. Efter en enkel kalkyl finner vi baser $\{\mathbf{b}_1\}$ respektive $\{\mathbf{b}_2\}$ i $V(0)$ respektive $V(4)$, där $\mathbf{b}_1 = (\,-1 \quad 2\,)^T$ och $\mathbf{b}_2 = (\,1 \quad 2\,)^T$. På grund av Sats 1 vet vi att matrisen $B = (\,\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2\,)$ är en matris som diagonaliserar A, så att

$$B^{-1}AB = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observera att vi inte behöver utföra matrismultiplikationerna i vänstra ledet för att få fram D utan vi skriver bara ut A:s egenvärden i D:s diagonal i samma ordning som som vi har placerat egenvektorerna i B. För kontrollens skull kan man emellertid utföra multiplikationerna i $AB = BD$ för att upptäcka om man gjort räknefel.

En annan matris som diagonaliserar A är t.ex. $B_1 = (\,2\mathbf{b}_1 \quad 3\mathbf{b}_2\,)$, eftersom $2\mathbf{b}_1$ och $3\mathbf{b}_2$ är två linjärt oberoende egenvektorer till A.

Det finns matriser som inte kan diagonaliseras. Vi ger ett exempel på en sådan:

Exempel 2. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har det enda egenvärdet 0 och vektorn $\mathbf{b} = (\,1 \quad 0\,)^T$ bildar en bas i egenrummet $V(0)$. Alla egenvektorer till A är alltså multipler av $\mathbf{b}$. Därför finns det bara *en* linjärt oberoende egenvektor till A, inte *två*, vilket vi ju skulle behöva för att kunna skriva ut en inverterbar matris B som diagonaliserar A. Således är A inte diagonaliserbar.

Det som vi hittills har sagt om diagonalisering gäller för alla matriser men om matrisen är symmetrisk kan vi till och med visa att diagonaliseringen alltid kan göras med hjälp av en ortogonal matris:

Sats 2. *Om A är en symmetrisk n/n-matris så existerar det en ortogonal matris Q* (varvid $Q^{-1} = Q^T$), *sådan att*

$$Q^TAQ = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

där $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ är A:s egenvärden.

Bevis. I varje egenrum räknar man ut en bas, som sedan ortonormeras med hjälp av Gram–Schmidt-proceduren till ett ON-system. Unionen av dessa baser i egenrummen bildar sedan en ON-bas $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ i $\mathbf{R}^n$, eftersom egenrummen i detta fall färdigt är parvis ortogonala. Sätt $Q = (\,\mathbf{q}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{q}_n\,)$. Då är Q en ortogonal matris, som enligt Sats 1 diagonaliserar A. $\diamondsuit$

Exempel 3. Den symmetriska matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

har egenvärdena -2 och 1. Genom att lösa ekvationen $(A + 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hittar vi basvektorerna

$$\mathbf{a}_1 = (\,-1 \quad 1 \quad 0\,)^T \quad \text{och} \quad \mathbf{a}_2 = (\,-1 \quad 0 \quad 1\,)^T$$

i egenrummet $V(-2)$. Dessa ortonormerar vi med hjälp av Gram–Schmidt-proceduren till två ortogonala enhetsvektorer

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\,-1 \quad 1 \quad 0\,)^T\,, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\,-1 \quad -1 \quad 2\,)^T\,.$$

I egenrummet $V(1)$ hittar vi på liknande sätt en enda basvektor $\mathbf{a}_3 = (\,1 \quad 1 \quad 1\,)^T$, som vi normerar till en enhetsvektor

$$\mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\,1 \quad 1 \quad 1\,)^T$$

(steg 2 i Gram–Schmidt-proceduren!). Om vi nu sätter

$$Q = (\,\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3\,) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

så är Q en ortogonal matris som diagonaliserar A:

$$Q^T A Q = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

På grund av att m:te potenser av en diagonalmatris D fås genom att diagonalelementen i D upphöjs till potensen m, kan en diagonalisering $B^{-1}AB = D$ av A användas till att på ett enkelt sätt räkna ut potenser (och funktioner) av A:

$$\begin{aligned} A &= BDB^{-1} \\ A^2 &= BDB^{-1}BDB^{-1} = BD^2B^{-1} \\ &- - - - \\ A^m &= BD^mB^{-1}\,. \end{aligned}$$

Ur detta följer att om $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r$ är ett polynom så att $p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_r A^r$, så är

$$p(A) = Bp(D)B^{-1} = B \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}\,.$$

Exempel 4. För t.ex. den matris som vi diagonaliserade i exempel 1 i detta avsnitt, är

$$p(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) & 0 \\ 0 & p(4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) & 0 \\ 0 & p(4) \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

för varje polynom p.

Övningsuppgifter

1. Avgör om följande matriser är diagonaliserbara:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (c) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Beräkna A^n genom att först diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm också en kvadratrot ur A, dvs. en matris X sådan att $X^2 = A$.

3. Diagonalisera den symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

med hjälp av en ortogonal matris.

4. Diagonalisera den symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad (b \neq 0),$$

med hjälp av en ortogonal matris samt räkna ut matrisen A^n.

5. Bestäm en 2/2-matris A med 2 och -3 som egenvärden och $(\,-1 \quad 2\,)^T$ respektive $(\,1 \quad 1\,)^T$ som motsvarande egenvektorer.

6. I en djurpopulation, där en individ lever högst n år, låter vi $x_i^{(k)}$ beteckna antalet honor med åldern i år k ($k \geq 0$). Vidare låter vi f_i beteckna den bråkdel av honorna med åldern i som överlever till nästa år och b_i må beteckna medelantalet ungar av honkön som en hona med åldern i föder ett visst år. Med $x^{(k)} = \left(\, x_0^{(k)} \ldots x_n^{(k)} \,\right)^T$ betecknar vi *åldersfördelningsvektorn* år k. (a) Skriv ut den matris A (*Leslie-matrisen*) som ger följande åldersfördelningsvektor enligt formeln $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$. (b) Visa att $x^{(k)}$ *kan* vara konstant (år efter år) om och endast om A har egenvärdet 1. (c) Antag att en viss skalbagge har Leslie-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Är en konstant åldersfördelning möjlig? Har arten stora chanser att överleva?

7. (Exempel på en *Markovkedja*) Mor Stava har egenheten att vara glad eller ledsen en hel dag i sträck. Om hon är glad en viss dag, är sannolikheten för att hon skall vara glad resp. ledsen följande dag $0,6$ och $0,4$. Hon orkar inte vara ledsen särskilt länge, så att om hon är ledsen en viss dag så är sannolikheten för att hon är glad resp. ledsen följande dag $0,8$ och $0,2$. Om vektorn $(p \quad q)^T$ anger sannolikheterna p och $q = 1 - p$ för att Stava är glad resp. ledsen dag 0, så anger (enligt elementär sannolikhetslära) vektorn

$$\begin{pmatrix} 0,6p + 0,8q \\ 0,4p + 0,2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

motsvarande sannolikheter för dag 1 samt $A^n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ motsvarande sannolikheter för dag n. En hur stor andel av sina levnadsdagar är mor Stava glad? (Ledning: Diagonalisera A och låt $n \to \infty$.)