

Hemuppgifter i Matriser

Paragraf 6: 10, 11

A. Beräkna A^n genom att först diagonalisera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(dvs. bestäm B så att $B^{-1}AB$ är en diagonalmatris).

B. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

med hjälp av en ortogonal matris Q .

C. I en djurpopulation, där en individ lever högst n år, låter vi $x_i^{(k)}$ beteckna antalet honor med åldern i år k ($k \geq 0$). Vidare låter vi f_i beteckna den bråkdel av honorna med åldern i som överlever till nästa år och b_i må beteckna medelantalet ungar av honkön som en hona med åldern i föder ett visst år. Med $x^{(k)} = (x_0^{(k)} \dots x_n^{(k)})^T$ betecknar vi åldersfördelningsvektorn år k . (a) Skriv ut den matris A (Leslie-matrisen) som ger följande åldersfördelningsvektor enligt formeln $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$. (b) Visa att $x^{(k)}$ kan vara konstant (år efter år) om och endast om A har egenvärdet 1. (c) Antag att en viss skalbagge har Leslie-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Är en konstant åldersfördelning möjlig? Har arten stora chanser att överleva?

D. (Exempel på en *Markovkedja*) Mor Stava har egenheten att vara glad eller ledsen en hel dag i sträck. Om hon är glad en viss dag, är sannolikheten för att hon skall vara glad resp. ledsen följande dag 0,6 och 0,4. Hon orkar inte vara ledsen särskilt länge, så att om hon är ledsen en viss dag så är sannolikheten för att hon är glad resp. ledsen följande dag 0,8 och 0,2. Om vektorn $(p \ q)^T$ anger sannolikheterna p och $q = 1 - p$ för att Stava är glad resp. ledsen dag 0, så anger (enligt elementär sannolikhetslära) vektorn

$$\begin{pmatrix} 0,6p + 0,8q \\ 0,4p + 0,2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

motsvarande sannolikheter för dag 1 samt $A^n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ motsvarande sannolikheter för dag n .

En hur stor andel av sina levnadsdagar är mor Stava glad? (Ledning: Diagonalisera A och låt $n \rightarrow \infty$.) Paragraf 7: 2.