Hemuppgifter i Matriser

A. Visa att i ett euklidiskt vektorrum gäller att

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(x + y^2 - x - y^2\right)$$

för varje x och y.

B. Låt $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ vara en mängd ($n \geq 3$) och låt $A_1, \ldots, A_m$ vara äkta delmänger av X (då är $A_k \neq X$ för alla k), sådana att varje par x_i, x_j av olika element i X bägge finns i precis en delmängd A_k. Låt $B = (b_{ik})$ vara den s.k. *incidensmatrisen*, som är definierad av att $b_{ik} = 1$ om $x_i \in A_k$ och $b_{ik} = 0$ om $x_i \notin A_k$

(a) Visa att BB^T är en matris som består av enbart ettor utom i diagonalen, där vi har talen $r_1, \ldots, r_n$. Dessa tal r_i anger för hur många k det gäller att $x_i \in A_k$ (inte sant?).

(b) Notera att $r_i \geq 2$ på grund av att $n \geq 3$.

(c) Matrisen BB^T är icke-singulär enligt hemuppgift B vecka 8. Använd formeln för rangen av en matrisprodukt till att visa att $m \geq n$, dvs. använd formeln

$$r(CD) \leq \min(r(C), r(D))\,,$$

där $r(X)$ betecknar rangen av en matris X.

C. Visa att om $\{x,\, y\}$ är ett ON-system i ett euklidiskt vektorrum, så är $x - y = \sqrt{2}$.

D. Låt U vara det underrum av $\mathbf{R}^3$ som uppspänns av $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$. Skriv vektorn $x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$ på formen $x = x_1 + x_2$, där $x_1 \in U$ och $x_2 \in U^{\perp}$. Paragraf 5: Uppgifterna 8, 15, 16.

E. Beräkna det A både för

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$