Hemuppgifter i Matriser

Paragraf 3: Uppgift 21.

A. En *kubisk ri-funktion* $f(x)$ genom givna punkter (x_0, y_0),..., (x_n, y_n) är definierad i varje intervall $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ som ett tredjegradspolynom $q_i(x)$. Dessa polynom är valda så att $f(x)$, $f'(x)$ och $f''(x)$ blir kontinuerliga i skarvningspunkterna x_1,..., x_{n-1}. Om man dessutom kräver att $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$ så sägs den kubiska ri-funktionen vara *naturlig*. Om alla intervall har samma längd $h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, så är

$$q_i(x) = ty_i + (1-t)y_{i-1} + ht(1-t)\left[(k_{i-1} - d_i)(1-t) - (k_i - d_i)t\right] ,$$

där $x = x_{i-1} + th$, $d_i = (y_i - y_{i-1})/h$ och talen $k_0, \ldots, k_n$ fås ur matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & .. & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & .. & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ - \\ k_{n-1} \\ k_n \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_1 + d_2 \\ d_2 + d_3 \\ - \\ d_{n-1} + d_n \\ d_n \end{pmatrix} .$$

Bestäm den naturliga kubiska ri-funktionen genom $(0, 1)$, $(1, 3)$ och $(2, 2)$.

B. Låt A vara en n/n-matris som har talen $d_1, \ldots, d_n$ i diagonalen men i övrigt består ettor. Antag att $d_i > 1$ för varje i. Visa att $x^T Ax > 0$ för varje $n/1$-vektor $x \neq 0$ och slut härav att A är icke-singulär. (Ledning: Skriv A som summan av en diagonalmatris med talen $d_i - 1$ i diagonalen och en matris som består av enbart ettor.)

C. Är följande delmängder underrum av vektorrummet P av alla polynom:

(a) $U = \{p \in P \mid p(x) = ax^7, a \in \mathbf{R}\}$;

(b) $V = \{p \in P \mid p(x) = a + 2x, a \in \mathbf{R}\}$;

(c) $W = \{p \in P \mid p(-1) = p(1) = 0\}$; Paragraf 4: Uppgifterna 8, 10, 11, 13 b).

D. Undersök om mängden av vektorer $\{(3 \quad 2 \quad 5 \quad 1), (2 \quad 3 \quad 3 \quad 2), (1 \quad -1 \quad 2 \quad -1), (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)\}$ är linjärt beroende eller linjärt oberoende.