7. Linjära operatorer på komplexa vektorrum, Jordans kanoniska form

Vi antar genomgående att $V \neq \{0\}$ är ett ändligt dimensionellt vektorrum över $\mathbb{K}$. De flesta resultat i detta kapitel har vi bevisat för komplexa vektorrum.

generaliserade egenvektorer

En egenvektor till $T \in L(V)$ är en vektor $v \neq 0$ i V med $Tv = \lambda v$ för ngt egenvärde $\lambda \in \mathbb{K}$ till T.

Tyvärr har en del operatorer inte tillräckligt med egenvektorer, så att en bra beskrivning av operatorn är möjlig. Därför inför vi begreppet generaliserade egenvektorer vilka spelar en avgörande roll i vår beskrivning av strukturen av linjära operatorer.

Fixera $T \in L(V)$. Vi försöker beskriva T genom att hitta en "trevlig" direkt summauppdelning

$$(*) \qquad V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n,$$

där varje U_j är ett underrum av V invariant under T.

Betrakta $T \in L(\mathbb{C}^3)$ som är definierad genom

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_2, 0, z_3).$$

Denna operator har endast två egenvärden (Visa!), nämligen 0 och 1 och endast två 1-dimensionella invarianta underrum

$$\{(z_1, 0, 0) : z_1 \in \mathbb{C}\} \text{ och } \{(0, 0, z_3) : z_3 \in \mathbb{C}\}$$

vilka är mängderna av egenvektorer svarande mot egenvärdena 0 och 1.
För att ha en direkt summauppdelning som (*), där varje U_j har dimensionen 1 och är invariant under T, skulle vi behöva 3 1-dimensionella invarianta underrum.

Generaliserade egenvektorer, som vi nu skall införa, kommer att klarlägga vårt problem.

Antag att $T \in \mathcal{L}(V)$ och λ är ett egenvärde till T.
En vektor $v \in V$ kallas en <u>generaliserad egenvektor</u> till T svarande mot λ, om

(**) $$(T-\lambda I)^j v = 0$$

för ngt positivt heltal j. Notera att varje egenvektor till T är en generaliserad egenvektor till T. Gäller omvändningen?

Låt $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, $T(z_1, z_2, z_3) = (z_2, 0, z_3)$, som ger att $T^2(z_1, z_2, 0) = (0,0,0)$ för alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Således är varje vektor i $\mathbb{C}^3$ vars <u>sista</u> komponent är noll en generaliserad egenvektor. Följaktligen är svaret på vår fråga nekande.

Nu gäller (Visa!)

$$\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, 0) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} \oplus \{(0,0,z_3) : z_3 \in \mathbb{C}\},$$

där det första underrummet på högra sidan är mängden av generaliserade egenvektorer till detta T svarande mot egenvärdet 0 och det andra rummet på högra sidan är mängden av generaliserade egenvektorer svarande mot egenvärdet 1.

Fastän j tillåts vara ett godtyckligt positivt heltal i definitionen av en generaliserad egenvektor, så skall vi snart se att varje generaliserad egenvektor satisfierar en ekvation av formen (**) med $j = \dim V$.

För att visa detta skall vi studera nollrummen $N(T^k)$, där $k \in \mathbb{N}$ och $T \in \mathcal{L}(V)$.

Om $T^k v = 0$, så är $T^{k+1} v = T(T^k v) = T(0) = 0$, dvs.

$$N(T^k) \subseteq N(T^{k+1}).$$

eller, med andra ord,

$$\{0\} = N(T^0) = N(I) \subseteq N(T) \subseteq \dots \subseteq N(T^k) \subseteq N(T^{k+1}) \subseteq \dots$$

<u>Sats 7.1</u> Om $T \in \mathcal{L}(V)$ och m är ett icke-negativt heltal sådant att $N(T^m) = N(T^{m+1})$, så är

$$N(I) \subseteq N(T) \subseteq \dots \subseteq N(T^m) = N(T^{m+1}) = N(T^{m+2}) = \dots .$$

<u>Bevis:</u> Antag att $T \in \mathcal{L}(V)$ och $N(T^m) = N(T^{m+1})$ för ett icke-negativt heltal m. Låt k vara ett positivt heltal. Vi önskar visa att

$$N(T^{m+k}) = N(T^{m+k+1}).$$

Vi vet redan att $N(T^{m+k}) \subseteq N(T^{m+k+1})$. Nu låt $v \in N(T^{m+k+1})$. Då är

$$0 = T^{m+k+1} v = T^{m+1}(T^k v).$$

Alltså $T^k v \in N(T^{m+1}) = N(T^m)$.
Således är $0 = T^m(T^k v) = T^{m+k} v$, varför $v \in N(T^{m+k})$, dvs. $N(T^{m+k+1}) \subseteq N(T^{m+k})$.

Ovanstående resultat ger upphov till frågan om det alltid existerar ett icke-negativt heltal m med $N(T^m) = N(T^{m+1})$. Följande sats säger ngt om denna fråga.

Sats 7.2 Om $T \in L(V)$, då gäller att

$$N(T^{\dim V}) = N(T^{\dim V+1}) = N(T^{\dim V+2}) = \ldots .$$

Bevis: Antag att $T \in L(V)$ enligt Sats 7.1 behöver vi endast visa att $N(T^{\dim V}) = N(T^{\dim V+1})$. Antag att så ej är fallet. Då ger Sats 7.1 att

$$\{0\} = N(T^0) \subsetneq N(T) \subsetneq N(T^2) \subsetneq \cdots \subsetneq N(T^{\dim V}) \subsetneq N(T^{\dim V+1})$$

där $\subsetneq$ betyder äkta delmängd. Eftersom vi har äkta delmängder måste dimensionen i varje "steg" stiga med åtminstone 1, varför vi får

$$\dim N(T^{\dim V}) \geq \dim V \text{ och således } \dim N(T^{\dim V+1}) \geq \dim V+1,$$

vilket är en motsägelse ty ett underrum av V kan inte ha högre dimension än $\dim V$.

Nu kan vi ge beskrivningen av generaliserade egenvektorer.

<u>Korollarium 7.3</u> Antag att $T \in L(V)$ och λ är ett egenvärde till T. Då gäller att mängden av generaliserade egenvektorer till T svarande mot λ är lika med $N((T-\lambda I)^{\dim V})$.

<u>Bevis:</u> Om $v \in N((T-\lambda I)^{\dim V})$, dvs.

$$\left((T-\lambda I)^{\dim V}\right)v = 0,$$

så är v en generaliserad egenvektor. Omvänt, antag att $v \in V$ är en generaliserad egenvektor till T svarande mot λ. Då finns ett positivt heltal j sådant att

$$v \in N((T-\lambda I)^j).$$

Från satserna 7.1 och 7.2 (med $T-\lambda I$ istället för T) följer att $v \in N((T-\lambda I)^{\dim V})$, som vi önskade.

En operator $T \in L(V)$ kallas <u>nilpotent</u>, om det existerar ett positivt heltal k med $T^k = \Theta$, dvs. $T^k v = 0$ för varje $v \in V$.

<u>Exempel</u> Betrakta $T \in L(\mathbb{K}^4)$ definierad genom $T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_3, z_4, 0, 0)$. Då är T nilpotent, ty $T^2 = \Theta$. Vidare betrakta $D: P_m(\mathbb{K}) \to P_m(\mathbb{K})$, $Dp = p'$. Då gäller att $D^{m+1}p = 0$ för varje $p \in P_m(\mathbb{K})$, dvs. $D^{m+1} = \Theta$, så D är nilpotent. Notera att $\dim P_m(\mathbb{K}) = m+1$.

Följande korollarium visar att vi aldrig behöver en högre potens än dimensionen av rummet. Notera också att 0 är enda egenvärdet till en nilpotent operator (hemuppgift).

Korollarium 7.4 Antag att $T \in L(V)$ är nilpotent. Då är $T^{\dim V} = \Theta$.

Bevis: Emedan T är nilpotent, så är varje vektor i V en generaliserad egenvektor svarande mot egenvärdet 0. Således ger Kor. 7.3 att $N(T^{\dim V}) = V$, dvs. $(T^{\dim V})v = 0$ för varje $v \in V$. Alltså $T^{\dim V} = \Theta$.

Låt oss nu titta på värderummet av $T^k \in L(V)$, där k är ett icke-negativt heltal. Om $y \in T^{k+1}(V)$, så finns $x \in V$ med
$$y = T^{k+1}(x) = T^k(Tx) \in T^k(V).$$
Alltså $T^{k+1}(V) \subseteq T^k(V)$, eller med andra ord,
$$V = T^0(V) \supseteq T(V) \supseteq T^2(V) \supseteq \ldots \supseteq T^k(V) \supseteq T^{k+1}(V) \supseteq \ldots .$$

Sats 7.5 Om $T \in L(V)$, så gäller
$$T^{\dim V}(V) = T^{\dim V+1}(V) = T^{\dim V+2}(V) = \ldots .$$

Bevis: Antag att $m > \dim V$. Då gäller
$$\begin{aligned} \dim T^m(V) &= \dim V - \dim N(T^m) && (\text{Sats } 2.3) \\ &= \dim V - \dim N(T^{\dim V}) && (\text{Sats } 7.2) \\ &= \dim T^{\dim V}(V) && (\text{sats } 2.3) \end{aligned}$$
Emedan $T^{\dim V}(V) \supseteq T^m(V)$ och $\dim T^m(V) = \dim T^{\dim V}(V)$ ger hemuppgift att $T^{\dim V}(V) = T^m(V)$, som vi önskade.

Det karakteristiska polynomet

Antag att V är ett komplext vektorrum och $T \in L(V)$.
Vi vet att V har en bas med avseende på vilken T har en uppåt triangulär matrisframställning (Sats 4.8).
I allmänhet är matrisen inte entydig, dvs. V kan ha många olika baser med avseende på vilka T har en uppåt triangulär matris och med avseende på dessa olika baser kan vi få olika uppåt triangulära matrisframställningar.

Men diagonalen av dessa matriser måste exakt innehålla egenvärdena till T (Sats 4.7).
Alltså om T har $\dim V$ olika egenvärden måste var och en av egenvärdena exakt en gång förekomma på diagonalen av en uppåt triangulär matris för T.

Vad händer om T har färre än $\dim V$ olika egenvärden vilket ofta kan inträffa? Då måste varje egenvärde förekomma åtminstone en gång på diagonalen av en uppåt triangulär matris men några av dem måste förekomma flera gånger.

Man kan gissa att talet λ förekommer på diagonalen av en uppåt triangulär matris exakt $\dim N(T-\lambda I)$ gånger. I allmänhet är detta inte sant.

Låt $T \in L(\mathbb{C}^2)$ med matrisframställningen

$$M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då är $\dim N(T) = 1$ men $\lambda = 0$ förekommer 2 gånger på diagonalen. Emellertid gäller att $\dim N(T^2) = 2$ för denna operator.

Vi skall nu visa att detta illustrerar den allmänna situationen. Följande resultat är vårt nyckelresultat då vi analyserar strukturen av en operator på ett komplext vektorrum.

<u>Sats 7.6</u> Låt $T \in L(V)$ och $\lambda \in \mathbb{K}$. För varje bas i V med avseende på vilken T har en uppåt triangulär matris $M(T)$ förekommer λ på diagonalen av $M(T)$ exakt $\dim N((T-\lambda I)^{\dim V})$ gånger.

<u>Bevis:</u> Vi antar att $\lambda = 0$, ty då vi bevisat satsen i detta fall erhåller vi det allmänna fallet genom att byta ut T mot $T - \lambda I$.

Låt $\dim V = n$. Vi visar satsen genom induktion över n. Klart att det önskade resultatet gäller för $n = 1$. Antag att $n > 1$ och att det önskade resultatet gäller för vektorrum med dimensionen $n-1$.

Antag att $e_1, \ldots, e_n$ är en bas i V med avseende på vilken T har en uppåt triangulär matris

$$(*) \qquad M(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sätt $U = [e_1, \dots, e_{n-1}]$. Då är U invariant under T enligt Sats 4.5, och matrisen av T/U med avseende på basen $e_1, \dots, e_{n-1}$ är

(*)
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

Induktionsantagandet ger att 0 förekommer på diagonalen av denna matris $\dim N((T/U)^{n-1})$ gånger.
Emedan $\dim U = n-1$ ger Sats 7.2 att

$$\dim N((T/U)^{n-1}) = \dim N((T/U)^n).$$

ANT 8

(**) 0 förekommer på diagonalen av (*) $\dim N((T/U)^n)$ gånger.

Beviset kan indelas i två fall, beroende på om $\lambda_n = 0$.
Betrakta först fallet då $\lambda_n \neq 0$. Vi visar att då gäller

(***)
$$N(T^n) \subseteq U.$$

Om detta gäller, så är $\dim N(T^n) = \dim N((T/U)^n)$, och således ger (**) att 0 förekommer på diagonalen av (+) exakt $\dim N(T^n)$ gånger, och satsen är bevisad i det fall att $\lambda_n \neq 0$.
Vi har att

$$M(T^n) = M(T)^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1}^n & \\ 0 & & & \lambda_n^n \end{pmatrix}.$$

Detta visar att $T^n e_n = u + \lambda_n^n e_n$ för något $u \in U$. För att visa (***) (och vi antar att $\lambda_n \neq 0$), tag $x \in N(T^n)$. Emedan $x \in V$ får vi

$$x = y + a e_n, \text{ där } y \in U \text{ och } a \in K.$$

Alltså

$$0 = T^n x = T^n y + a T^n e_n = T^n y + a u + a \lambda_n^n e_n.$$

Emedan $T^n y \in U$ och $a u \in U$ samt $e_n \notin U$ ger detta att $a \lambda_n^n = 0$. Men $\lambda_n \neq 0$, så $a = 0$. Därför $x = y \in U$, dvs. $N(T^n) \subseteq U$.

Nu skall vi betrakta fallet att $\lambda_n = 0$. I detta fall visar vi att

$$(****) \qquad \dim N(T^n) = \dim N((T|_U)^n) + 1,$$

vilket tillsammans med (**) ger beviset då $\lambda_n = 0$.

Nu gäller

$$\dim N(T^n) \overset{\text{sats 1.15}}{=} \dim(U \cap N(T^n)) + \dim(U + N(T^n)) - \dim U$$

$$= \dim N((T|_U)^n) + \dim(U + N(T^n)) - (n-1).$$

Antag att vi kan visa att $N(T^n)$ innehåller en vektor som <u>inte</u> finns i U. Då är

$$n = \dim V \geq \dim(U + N(T^n)) > \dim U = n-1,$$

vilket implicerar att $\dim(U + N(T^n)) = n$, vilket tillsammans med ovanstående formel ger att (****) gäller.

Låt oss nu fundera hur vi kan hitta en vektor i $N(T^n)$ som inte finns i U. Vi försöker med en vektor av formen

$$x - e_n, \text{ där } x \in U.$$

Denna vektor finns inte i U. Kan vi välja $x \in U$, så att denna vektor finns i $N(T^n)$?

Låt oss kalkylera:
$$T^n(x-e_n) = T^n x - T^n e_n.$$

För att denna vektor skall vara 0 måste vi välja (om möjligt) $x \in U$, så att $T^n x = T^n e_n$. Vi kan göra detta om $T^n e_n \in (T|_U)^n(U)$. Emedan $M(T)$ är en matris till T med avseende på $e_1, \ldots, e_n$, ser vi att $Te_n \in U$ emedan $\lambda_n = 0$. Alltså
$$T^n e_n = T^{n-1}(Te_n) \in (T|_U)^{n-1}(U) = (T|_U)^n(U),$$
enligt Sats 7.5. Med andra ord, vi kan välja $x \in U$ så att $x - e_n \in N(T^n)$ och beviset är slutfört.

Antag att $T \in L(V)$. Multipliciteten av ett egenvärde λ till T definieras som dimensionen av mängden av alla generaliserade egenvektorer svarande mot λ. Med andra ord, multipliciteten av ett egenvärde λ till T är lika med $\dim N((T-\lambda I)^{\dim V})$ enligt Kor. 7.3.

Låt oss betrakta $T \in L(\mathbb{K}^3)$ definierad genom
$$T(z_1, z_2, z_3) = (0, z_1, 5z_3).$$
Då är 0 ett egenvärde till T med multipliciteten 2, vidare är 5 ett egenvärde till T med multipliciteten 1 samt T har inte andra egenvärden (Visa!). Alltså summan av multipliciteterna av egenvärdena är 3, vilket är dimensionen av definitionsrummet för T.

Vi visar nu att detta gäller allmänt.

Sats 7.7 Om $T \in L(V)$ och V är ett komplext vektorrum, så är summan av multiplicitetena av alla egenvärdena till T lika med $\dim V$.

Bevis: Enligt Sats 4.8 finns det en bas i V med avseende på vilken matrisen $M(T)$ till T är uppåt triangulär. Vidare ger Sats 7.6 att multipliciteten av ett egenvärde λ till T är lika med antalet gånger λ förekommer på diagonalen av $M(T)$. Emedan diagonalen av $M(T)$ har exakt $\dim V$ element är summan av multipliciteterna av alla egenvärdena till T lika med $\dim V$.

Antag att V är komplext och $T \in L(V)$. Låt $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ vara de olika egenvärdena till T. Låt d_j beteckna multipliciteten av λ_j. Polynomet

$$(z-\lambda_1)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (z-\lambda_m)^{d_m}$$

kallas det karakteristiska polynomet av T. Enligt Sats 7.7 är graden av det karakteristiska polynomet lika med $\dim V$. Uppenbarligen är rötterna till det karakteristiska polynomet av T lika med egenvärdena till T.

Det karakteristiska polynomet av $T \in L(\mathbb{C}^3)$ på föregående sida ges av $z^2(z-5)$.

Betrakta nu en bas i V med avseende på vilken T har en uppåt triangulär matris

$$M(T)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Sats 7.7 ger att det karakteristiska polynomet av T ges av

$$(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n).$$

Sats 7.8 (Cayley–Hamilton) Antag att V är ett komplext vektorrum och låt $T\in L(V)$. Låt q beteckna det karakteristiska polynomet av T. Då är $q(T)=\Theta$.

Bevis: Antag att $e_1,\dots,e_n$ är en bas i V med avseende på vilken T har en uppåt triangulär matris

$$M(T)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_j & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Från matrisen $M(T)$ ser vi att $Te_j=\lambda_j e_j+u$, där $u\in[e_1,\dots,e_{j-1}]$, dvs. $(T-\lambda_j I)e_j\in[e_1,\dots,e_{j-1}]$. (*)

Vi bör visa att

$$q(T)=(T-\lambda_1 I)\circ\cdots\circ(T-\lambda_n I)=\Theta.$$

Vi visar genom induktion över j att

$$(**) \qquad (T-\lambda_1 I)\circ \dots \circ (T-\lambda_j I)x = 0$$

för alla $x \in [e_1, \dots, e_j]$, $j = 1, \dots, n$. Då $j = n$ ger detta det önskade resultatet.

Antag att $j = 1$. Då ger matrisen $M(T)$ att $Te_1 = \lambda e_1$, dvs. $(**)$ gäller för $j = 1$. Låt $j > 1$ och antag att påståendet är bevisat för $j-1$. Varje element i $[e_1, \dots, e_j]$ kan skrivas som $u + ce_j$, där $u \in [e_1, \dots, e_{j-1}]$ och $c \in \mathbb{K}$.

Sats 4.5 ger att $Tu \in [e_1, \dots, e_{j-1}]$. Eftersom $\lambda_j u \in [e_1, \dots, e_{j-1}]$ följer således att $(T-\lambda_j I)u \in [e_1, \dots, e_{j-1}]$. Induktionsantagandet ger att

$$(T-\lambda_1 I)\circ \dots \circ (T-\lambda_{j-1} I)\circ(T-\lambda_j I)u = 0.$$

Å andra sidan, då $(T-\lambda_j I)(ce_j) \in [e_1, \dots, e_{j-1}]$ enligt $(*)$, ger induktionsantagandet att

$$(T-\lambda_1 I)\circ \dots \circ (T-\lambda_{j-1} I)\circ(T-\lambda_j I)(ce_j) = 0.$$

För varje $x \in [e_1, \dots, e_j]$ följer därmed att

$$(T-\lambda_1 I)\circ \dots \circ (T-\lambda_j I)x = 0,$$

dvs. $(**)$ gäller och satsen är bevisad.

Uppdelning av en operator

I detta avsnitt skall vi visa att varje operator på ett komplext vektorrum har tillräckligt med generaliserade egenvektorer för att förse oss med en intressant teori.

Notera att om $T \in L(V)$, så är $N(T)$ invariant under T.

<u>Sats 7.9</u> Om $T \in L(V)$ och $p \in P(\mathbb{K})$, så är $N(p(T))$ invariant under T.

<u>Bevis:</u> Antag att $T \in L(V)$ och $p \in P(\mathbb{K})$. Då är $p(T) \in L(V)$. Låt $x \in N(p(T))$, dvs. $p(T)x = 0$. Nu gäller

$$p(T)(Tx) = (p(T) \circ T)x = (T \circ p(T))x = T(p(T)x) = 0,$$

varför $Tx \in N(p(T))$. Alltså $N(p(T))$ är invariant under T.

Som vi kommer ihåg så kallas $T \in L(V)$ nilpotent om $T^k = \Theta$ för något positivt heltal k.

Följande grundläggande struktursats visar att varje operator på ett komplext vektorrum kan uppfattas som en sammansättning av delar av vilka alla är en nilpotent operator plus en skalär gånger identitetsoperatorn.

<u>Sats 7.10</u> Låt $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vara de <u>olika</u> egenvärden till $T \in L(V)$ och låt $F_1, \dots, F_n$ vara motsvarande underrum av generaliserade egenvektorer. Då gäller:

(a) $V = F_1 \oplus \dots\dots \oplus F_n$;

(b) varje F_j är invariant under T;

(c) varje $(T - \lambda_j I)\big|_{F_j}$ är nilpotent.

Bevis: Notera att $F_j = N((T-\lambda_j I)^{\dim V})$ för varje j enligt Kor. 7.3. Således är varje F_j ett underrum av V. Sats 7.9 ger att (b) gäller. Vidare följer (c) direkt från definitionerna. För att visa (a), notera att $\dim F_j$ är lika med multiplicitetet av λ_j som ett egenvärde till T. Alltså

$$\dim V = \dim F_1 + \cdots + \dim F_n$$

enligt Sats 7.7.

Sätt $F = F_1 + \cdots + F_n$. Då är F invariant under T. Således kan vi definiera $S \in L(F)$ genom $S = T|_F$.

Notera att S har samma egenvärden med samma multiplicitet som T, ty alla generaliserade egenvektorer till T finns i F som är definitionsrummet för S. Alltså om vi tillämpar Sats 7.7 på S, så följer att

$$\dim F = \dim F_1 + \cdots + \dim F_n,$$

varför $\dim F = \dim V$. Eftersom F är ett underrum av V, följer att $V = F$, dvs.

$$V = F_1 + \cdots + F_n.$$

Detta och $\dim V = \dim F_1 + \ldots + \dim F_n$ ger enligt Sats 1.16 att $V = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$.

Som vi vet behöver en operator på ett komplext vektorrum inte ha tillräckligt med egenvektorer för att bilda en bas i definitionsrummet. Följande resultat visar att på ett komplext vektorrum finns det tillräckligt med generaliserade egenvektorer för att att dessa bildar en bas i rummet.

Korollarium 7.11 Antag att V är ett komplext vektorrum och $T \in L(V)$. Då finns det en bas i V bestående av generaliserade egenvektorer till T.

Bevis: Välj en bas i varje F_j i Sats 7.10.
Om vi sätter ihop alla dessa baser, så ger Sats 7.10(a) att denna mängd utgör en bas för V bestående av generaliserade egenvektorer till T.

Låt $T \in L(V)$. Vi önskar hitta en bas i V så att matrisframställningen $M(T)$ av T med avseende på denna bas blir så enkel som möjligt, dvs vi vill att $M(T)$ innehåller många nollor.

Vi börjar med att visa att om $T \in L(V)$ är nilpotent, så kan vi välja en bas i V så att matrisen $M(T)$ med avseende på denna bas har mera än hälften av elementen lika med noll.

Lemma 7.12 Antag att $T \in L(V)$ är nilpotent. Då finns det en bas i V med avseende på vilken matrisen $M(T)$ har formen

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

dvs. alla element på och nedanför diagonalen är 0.

Bevis: Välj en bas i $N(T)$. Komplettera denna till en bas i $N(T^2)$ (se Sats 7.1). Fortsätter vi på detta sätt får vi en bas i V, ty för tillräckligt stort k gäller att $N(T^k) = V$ emedan T är nilpotent.

Låt oss nu titta på hur $M(T)$ ser ut med avseende på denna bas. Den första kolonnen, och kanske några kolonner till i början, består av endast nollor, emedan motsvarande basvektorer tillhör $N(T)$.

Följande mängd av kolonner kommer från basvektorerna i $N(T^2)$. Genom att operera med T på vilken som helst sådan vektor får vi en vektor i $N(T)$. Med andra ord, vi får en vektor som är en linjärkombination av de tidigare basvektorerna i $N(T)$. Alltså alla element som inte är noll i dessa kolonner måste ligga ovanför diagonalen.

Följande mängd av kolonner kommer från basvektorerna i $N(T^3)$. Genom att operera med T på vilken som helst sådan vektor får vi en vektor i $N(T^2)$. Med andra ord, vi får en vektor som är en linjärkombination av tidigare basvektorer. Alltså igen måste alla element som inte är noll i dessa kolonner ligga ovanför diagonalen.

Genom att fortsätta på detta sätt bevisar vi påståendet.

Sats 7.13 Antag att V är ett komplext vektorrum och $T \in L(V)$. Låt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ vara de olika egenvärdena till T. Då existerar det en bas i V med avseende på vilken T har en block diagonalmatris av formen

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix},$$

där varje A_j är en uppåt triangulär matris av formen

$$(*) \qquad A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Bevis: För $j=1,\ldots,m$, låt F_j beteckna mängden av generaliserade egenvektorer till T svarande mot λ_j, dvs. $F_j = N((T-\lambda_j I)^{\dim V})$.
Sats 7.10 (c) ger att varje $(T-\lambda_j I)/_{F_j}$ är nilpotent. För varje j, välj en bas i F_j så att matrisen

$$M((T-\lambda_j I)/_{F_j}) = M(T/_{F_j}) - M(\lambda_j I/_{F_j})$$

med avseende på denna bas är som i Lemma 7.12. Då kommer matrisen $M(T/_{F_j})$ med avseende på denna bas att se ut som (*).

Genom att sammanslå baserna för alla F_j får vi en bas för V enligt Sats 7.10 (a). Matrisen $M(T)$ med avseende på denna bas har den önskade formen (se Sats 7.10 (a) och (b)).

Det minimala polynomet

Ett monisk<u>t polynom</u> är ett polynom med koefficienten 1 för termen med det högsta gradtalet. Till exempel, $2+3z^2+z^8$ är ett moniskt polynom.

Antag att $T \in L(V)$, där $\dim V = n$. Då gäller att

$$I, T, T^2, \ldots\ldots, T^{n^2}$$

inte kan vara linjärt oberoende i $L(V)$, ty $\dim L(V) = n^2$ och vi har n^2+1 linjära operatorer. Låt m vara det minsta positiva heltal sådant att

$$I, T, T^2, \ldots, T^m$$

är linjärt beroende. Då existerar det skalärer $c_0, \ldots, c_{m-1} \in K$ med

$$c_0 I + c_1 T + c_2 T^2 + \cdots + c_{m-1}T^{m-1} + T^m = 0.$$

Valet av skalärerna $c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{K}$ ovan är entydiga, ty antag att $b_0, \dots, b_{m-1} \in \mathbb{K}$ är ett annat val. Då fås att

$$(c_0 - b_0)I + (c_1 - b_1)T + \dots + (c_{m-1} - b_{m-1})T^{m-1} = \Theta,$$

vilket ger att $c_0 = b_0, \dots, c_{m-1} = b_{m-1}$ på grund av vårt val av m.
Polynomet

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m$$

kallas ett <u>minimalt polynom</u> av T. Det är det moniska polynomet $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ av minsta grad så att $p(T) = \Theta$.

Klart att graden av ett minimalt polynom av varje operator på V är högst $(\dim V)^2$.
Sats 7.8 (Cayley-Hamilton) säger att om V är ett <u>komplext</u> vektorrum, så har det minimala polynomet av varje operator <u>högst</u> grad V.

Ett polynom $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ kallas en <u>delare</u> av ett polynom $q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ om det existerar ett polynom $s \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ så att $q = sp$.

Följande resultat karakteriserar fullständigt sådana polynom som då de opererar på en operator ger nolloperatorn.

<u>Sats 7.14</u> Låt $T \in \mathcal{L}(V)$ och låt $q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. Då är $q(T) = \Theta$ om och endast om det minimala polynomet av T är en delare av q.

<u>Bevis:</u> Låt p beteckna det minimala polynomet av T.
Antag först att p är en delare av q. Då finns ett $s \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ med $q = sp$. Vi har

$$q(T) = (sp)(T) = s(T) \circ p(T) = s(T) \circ \Theta = \Theta,$$

som vi önskade.

Omvänt, antag att $q(T) = \Theta$. Då är grad $p \leq$ grad q. Nu existerar $r, s \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ med grad $r <$ grad p så att $q = sp + r$.
Nu gäller

$$\Theta = q(T) = s(T) \circ \underbrace{p(T)}_{=\Theta} + r(T) = r(T).$$

Emedan p är det minimala polynomet av T och grad $r <$ grad p, följer att $r = 0$. Alltså $q = sp$.

Nu skall vi beskriva egenvärdena till en operator i termer av dess minimala polynom.

<u>Sats 7.15</u> Låt $T \in \mathcal{L}(V)$. Då är rötterna till det minimala polynomet av T exakt egenvärdena till T.

<u>Bevis:</u> Låt $p(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m$ vara det minimala polynomet av T.
Antag först att $\lambda \in \mathbb{K}$ är en rot till p. Då gäller

$$p(z) = (z - \lambda) q(z),$$

där $q(z)$ är ett moniskt polynom med koefficienter i $\mathbb{K}$.
Emedan $p(T) = \Theta$, följer att

$$\left((T - \lambda I) \circ q(T)\right) v = \Theta(v) = 0$$

för alla $v \in V$. Emedan grad $q <$ grad p och p är det minimala polynomet av T måste det finnas ett $v \in V$ med $q(T)v \neq 0$.
Detta ger att λ är ett egenvärde till T.
Omvänt, antag att λ är ett egenvärde till T. Låt $v \neq 0$ i V med $Tv = \lambda v$. Härur följer att $T^j v = \lambda^j v$ för varje icke-negativt heltal j. Alltså

$$0 = p(T)v = (c_0 I + c_1 T + \cdots + c_{m-1} T^{m-1} + T^m) v$$
$$= (c_0 + c_1 \lambda + \cdots + c_{m-1} \lambda^{m-1} + \lambda^m) v = p(\lambda) v.$$

Emedan $v \neq 0$, följer att $p(\lambda) = 0$, som vi önskade.

Antag nu att en matris $M(T)$ är given med avseende på någon bas i V för $T \in \mathcal{L}(V)$. För att hitta det minimala polynomet av T, betrakta $M(I), M(T), M(T)^2, \ldots\ldots, M(T)^m$ för $m = 1, 2 \ldots$ tills denna följd är linjärt beroende. Notera att $M(I)$ är en diagonalmatris med endast ettor på diagonalen, dvs. en enhetsmatris. Sedan söker vi skalärerna $c_0, \ldots c_{m-1} \in \mathbb{K}$, så att

$$c_0 M(I) + c_1 M(T) + \ldots + c_{m-1} M(T)^{m-1} + M(T)^m = 0,$$

dvs. $c_0 I + c_1 T + \ldots + c_{m-1} T^{m-1} + T^m = \theta$. Skalärerna $c_0, \ldots, c_{m-1}, 1 \in \mathbb{K}$ kommer då att vara koefficienterna till det minimala polynomet av T.

Att detta kan beräknas genom att använda en känd procedur som kallas gausselimination.

Till exempel, betrakta $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^5)$ vars matris ges av

$$M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Emedan vi har många nollor i matrisen behövs ej gausselimination. Vi beräknar endast

$$M(T)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(T)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(T)^4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad M(T)^5 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 6 & -3 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Vi noterar att

$$M(T)^5 - 6M(T) + 3M(I) = 0,$$

varför det minimala polynomet av T ges av

$$z^5 - 6z + 3.$$

Vad kan vi säga om egenvärdena till denna speciella operator?

Sats 7.15 ger att egenvärdena till T är lika med lösningarna till ekvationen

$$z^5 - 6z + 3 = 0.$$

Tyvärr kan ingen lösning till denna ekvation beräknas med användandet av rationella tal, godtyckliga rötter av rationella tal och vanliga räkneregler i aritmetiken, dvs med algebraiska metoder. Det finns metoder att ge oss goda approximationer av egenvärdena till T. Egenvärdena för denna speciella operator är approximativt

$$-1{,}67\ ,\ 0{,}51\ ,\ 1{,}40\ ,\ -0{,}12 + 1{,}59i \text{ och } -0{,}12 - 1{,}59i.$$

Antag att V är ett <u>komplext</u> vektorrum och $T \in L(V)$.
Cayley-Hamiltons sats och Sats 7.14 ger att det minimala polynomet av T är en delare av det karakteristiska polynomet av T.
Alltså: om det minimala polynomet har grad V, så måste det vara lika med det karakteristiska polynomet av T enligt Sats 7.7.

I det ovannämnda exemplet ges det karakteristiska polynomet till $T \in L(\mathbb{C}^5)$, liksom även det minimala polynomet till T, av $z^5 - 6z + 3$.

Mer om det karakteristiska polynomet

Låt $T \in L(V)$, vars matris $M(T)$ i en viss bas är känd.
Att söka $\lambda \in \mathbb{K}$ och $v \neq 0$ så att $Tv = \lambda v$ är detsamma som att söka ett tal λ och en kolonnmatris $M(v)$ i den givna basen sådana att

$$M(T)M(v) = \lambda M(v) \quad \text{och} \quad M(v) \neq 0.$$

Detta är ekvivalent med

$$M(T)M(v) - \lambda M(v) = 0, \quad M(v) \neq 0.$$

Med avseende på vilken bas som helst i V har den identiska operatorn $I \in L(V)$ en diagonalmatrisframställning

$$M(I) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

dvs.

$$(*) \qquad (M(T) - \lambda M(I))M(v) = 0, \quad M(v) \neq 0.$$

En icke-trivial lösning $M(v) \neq 0$ till ekvationssystemet $(*)$ ger alltså en egenvektor till T och omvänt.
Enligt matriskursen vet vi att ovanstående ekvationssystem $(*)$ har icke-trivial lösning om och endast om dess determinant är noll, dvs.

$$\det(M(T) - \lambda M(I)) = 0.$$

De tal $\lambda \in \mathbb{K}$, som uppfyller denna ekvation, är alltså egenvärdena till den linjära operatorn T. Således är också

$$P_T(\lambda) = \det(M(T) - \lambda M(I)) \text{ det karakteristiska polynomet}$$

av T. Om det minimala polynomet av $T \in L(V)$ har grad V, så är det karakteristiska polynomet av T lika med det minimala polynomet av T. Att beräkna det minimala polynomet är ofta en effektiv metod att hitta det karakteristiska polynomet.

<u>Exempel</u> Låt $T \in L(\mathbb{R}^2)$ vara definierad genom

$$T(x,y) = (x+2y, 3x+4y).$$

I standardbasen i $\mathbb{R}^2$ ges T av

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Därför ges det karakteristiska polynomet av T genom

$$p_T(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

eller

$$p_T(z) = z^2 - 5z - 2.$$

<u>Jordanblock</u>

Om $v_1, \dots, v_n$ är en bas i V och om $Tv_i = \lambda_i v_i$ för $i=1,\dots,n$, då gäller

$$M(T, v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Vi vet att finns operatorer som <u>inte</u> har en bas av egenvektorer. Vårt mål är att hitta baser som är nästan lika bra.

Exempel Betrakta operatorn $T \in L(\mathbb{K}^2)$, $T(x,y) = (x+y, y)$.
I standardbasen i $\mathbb{K}^2$ ges T av matrisen

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

och det karakteristiska polynomet av T ges av

$$p_T(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

Således är $\lambda = 1$ det enda egenvärdet till T. Det är lätt att se att $c(1,0)$, $c \in \mathbb{K}$, är de motsvarande egenvektorerna. Därför har $\mathbb{K}^2$ inte en bas som består av egenvektorer till T.

Definition Jordanblocket av dimensionen m och egenvärdet λ ges av $m \times m$ matrisen

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

dvs. $J_m(\lambda)$ är en $m \times m$ matris med λ på huvuddiagonalen och 1 just ovanför huvuddiagonalen och alla andra element är 0.

Sats 7.16 Låt $J_m(\lambda)$ vara ett Jordanblock. Det enda egenvärdet till $J_m(\lambda)$ är λ och de enda egenvektorerna till $J_m(\lambda)$ är skalärer gånger standardbasvektorn $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$.

<u>Bevis:</u> Låt $J = J_m(\lambda)$. Matrisen J är en uppåt triangulärmatris, så ~~dess~~ karakteristiska polynom ges av

$$p_J(\mu) = \det\left(J - \begin{pmatrix} \mu & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu \end{pmatrix}\right) = (\lambda-\mu)^m.$$

Således är λ det enda egenvärdet till J. Antag nu att $Jx = \lambda x$, så

$$(J-\lambda I)x = 0,$$

där I är enhetsmatrisen. Detta kan skrivas som

$$(J-\lambda I)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \end{pmatrix},$$

Alltså $(J-\lambda I)x = 0$ om och endast om $x_2 = x_3 = \cdots = x_m = 0$, dvs. $x = x_1 e_1$.

Med standardbasvektorerna i K^m får vi med $J = J_m(\lambda)$ att

$$\begin{aligned} Je_1 &= \lambda e_1 \\ Je_2 &= e_1 + \lambda e_2 \\ Je_3 &= \qquad e_2 + \lambda e_3 \\ &\vdots \\ Je_m &= \qquad\cdots\qquad e_{m-1} + \lambda e_m. \end{aligned}$$

Det är ofta lämpligt att skriva Jordanblock som

$$J_m(\lambda) = J = \lambda I + N, \text{ där } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\ 0 \end{pmatrix}$$

och I är enhetsmatrisen.

Antag att $T \in L(V)$. En bas i V kallas en <u>Jordanbas</u> för T om T med avseende på denna bas har en blockdiagonalmatris

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & 0 \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

där varje $J(\lambda_j)$ är ett Jordanblock med T:s egenvärde λ_j, $j=1,\ldots,k$.
Det kan finnas flera Jordanblock som svarar mot samma egenvärde. Således är $\dim V \geq k \geq m$, där $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ är de <u>olika</u> egenvärdena till T.
Vårt mål är att visa att varje operator på ett <u>komplext</u> vektorrum har en Jordanbas.

Betrakta den nilpotenta operatorn $N \in L(\mathbb{K}^5)$ definierad genom

$$N(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) = (0,z_1,z_2,0,z_4).$$

För denna operator finns det <u>inte</u> något $v \in \mathbb{K}^5$ så att v, Nv, N^2v, N^3v, N^4v är en bas för $\mathbb{K}^5$.
Men om $v_1 = (1,0,0,0,0)$ och $v_2 = (0,0,0,1,0)$, då är $v_1, Nv_1, N^2v_1, v_2, Nv_2$ en bas för $\mathbb{K}^5$ och (N^2v_1, Nv_2) en bas för $\mathcal{N}(N)$ som har dimensionen 2.

Antag att $N \in L(V)$ är nilpotent. För varje $0 \neq v \in V$ låt $m(v)$ beteckna det <u>största</u> icke-negativa heltal sådant att $N^{m(v)}v \neq 0$.
Till exempel i ovanstående exempel är $m(1,0,0,0,0) = 2$.

Lemma 7.17 Om $N \in L(V)$ är nilpotent, så finns det vektorer $v_1, \ldots, v_k \in V$ sådana att

(a) $v_1, Nv_1, \ldots N^{m(v_1)} v_1, \ldots\ldots, v_k, Nv_k, \ldots, N^{m(v_k)} v_k$ är en bas i V

och

(b) $N^{m(v_1)} v_1, \ldots\ldots, N^{m(v_k)} v_k$ är en bas för nollrummet av N.

Bevis: Antag att $N \in L(V)$ är nilpotent. Då är N inte injektiv och därför $\dim R(N) < \dim V$.

Vi bevisar lemmat med induktion över $\dim V$. Klart att lemmat gäller om $\dim V = 1$. Antag nu att resultaten (a) och (b) gäller för komplexa vektorrum med dimensionen mindre än $\dim V$.

Vi använder $R(N)$ istället för V och $N|_{R(N)}$ istället för N. Då finns vektorer $u_1, \ldots, u_j \in R(N)$ sådana att

(i) $u_1, Nu_1, \ldots, N^{m(u_1)} u_1, \ldots\ldots, u_j, Nu_j, \ldots, N^{m(u_j)} u_j$ är en bas för $R(N)$

och

(ii) $N^{m(u_1)} u_1, \ldots, N^{m(u_j)} u_j$ är en bas i $\mathcal{N}(N) \cap R(N)$.

Emedan varje $u_r \in R(N)$ kan vi välja $v_1, \ldots, v_j \in V$ så att $Nv_r = u_r$ för $r = 1, \ldots, j$. Notera att $m(v_r) = m(u_r) + 1$ för varje r.

Låt nu W vara ett underrum av $\mathcal{N}(N)$ sådant att

$$\mathcal{N}(N) = (\mathcal{N}(N) \cap R(N)) \oplus W$$

och välj en bas i W som vi betecknar $v_{j+1}, \ldots, v_k$.

Emedan $v_{j+1}, \ldots, v_k \in \mathcal{N}(N)$ har vi att $m(v_{j+1}) = \ldots = m(v_k) = 0$.

Nu då vi har konstruerat $v_1, \ldots, v_k$ så bör vi visa att (a) och (b) gäller.

Vi visar först att vektorerna i (a) är linjärt oberoende. Antag att

$$(*) \qquad 0 = \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=0}^{m(v_r)} a_{r,s} N^s(v_r),$$

där varje $a_{r,s} \in K$. Vi opererar med N på båda sidorna av ekvationen och får

$$0 = \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=0}^{m(v_r)} a_{r,s} N^{s+1}(v_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{j} \sum_{s=0}^{m(v_r)+1} a_{r,s} N^{s+1}(v_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{j} \sum_{s=0}^{m(U_r)} a_{r,s} N^s(U_r).$$

Härav följer med hjälp av (i) att $a_{r,s} = 0$ för $1 \le r \le j$ och $0 \le s \le m(U_r) = m(v_r) - 1$. Således reduceras $(*)$ till

$$0 = a_{1,m(v_1)} N^{m(v_1)} v_1 + \ldots + a_{j,m(v_j)} N^{m(v_j)} v_j$$

$$+ a_{j+1,0} v_{j+1} + \ldots + a_{k,0} v_k.$$

Det första uttrycket tillhör $N(N) \cap R(N)$ och det andra tillhör W. Emedan $N(N) = (N(N) \cap R(N)) \oplus W$, följer att

$$0 = a_{1,m(v_1)} N^{m(v_1)} v_1 + \ldots + a_{j,m(v_j)} N^{m(v_j)} v_j$$

$$= a_{1,m(v_1)} N^{m(U_1)} U_1 + \ldots + a_{j,m(v_j)} N^{m(U_j)} U_j$$

och

$$a_{j+1,0} v_{j+1} + \dots + a_{k,0} v_k = 0$$

Enligt (ii) följer att $a_{1,m(v_1)} = \dots = a_{j,m(v_j)} = 0$ och emedan $v_{j+1}, \dots, v_k$ är en bas i W får att $a_{j+1,0} = \dots = a_{k,0} = 0$. Således är vektorerna i (a) linjärt oberoende.

Enligt (ii) följer att $\dim(\mathcal{N}(N) \cap R(N)) = j$. Således

$$\dim \mathcal{N}(N) = j + \dim W = k.$$

Vidare ger (i) att

$$\dim R(N) = \sum_{r=1}^{j} (m(v_r) + 1) = \sum_{r=1}^{j} m(v_r)$$

Antalet vektorer i (a) är

$$\sum_{r=1}^{k} (m(v_r) + 1) = k + \sum_{r=1}^{k} m(v_r)$$

$$= \dim \mathcal{N}(N) + \dim R(N) = \dim V.$$

Således är vektorerna i (a) en bas för V.

Slutligen noterar vi att

$$N^{m(v_1)} v_1 = N^{m(u_1)} u_1$$

$$\vdots$$

$$N^{m(v_j)} v_j = N^{m(u_j)} u_j$$

$$N^{m(v_{j+1})} v_{j+1} = v_{j+1}$$

$$\vdots$$

$$N^{m(v_k)} v_k = v_k$$

Nu ger (ii) och $N(N) = (N(N) \cap R(N)) \oplus W$ att $N^{m(u_1)}u_1, \ldots, N^{m(u_j)}u_j, v_{j+1}, \ldots, v_k$ är en bas i nollrummet av N, och lemmat är beviset.

Nu är vi färdiga att bevisa <u>Jordans normalform</u>.

<u>Sats 7.18</u> Antag att V är ett komplext vektorrum. Om $T \in L(V)$, så finns det en bas i V som är en Jordanbas för T.

<u>Bevis:</u> Antag först att N är en nilpotent operator, dvs. $N \in L(V)$. Då finns det vektorer $v_1, \ldots, v_k \in V$ sådana att (a) och (b) gäller i Lemma 7.17. För varje j gäller att

$$
\begin{aligned}
N(N^{m(v_j)}v_j) &= 0\\
N(N^{m(v_j)-1}v_j) &= N^{m(v_j)}v_j\\
&\vdots\\
N(Nv_j) &= N^2v_j\\
N(v_j) &= Nv_j,
\end{aligned}
$$

dvs.

$$
M(N, N^{m(v_j)}v_j, \ldots, v_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Följaktligen finns det en bas i V med avseende på vilken N har en block diagonalmatris, där varje matris har ovanstående form. Således gäller satsen för nilpotenta operatorer.

Slutligen antag att $T \in L(V)$. Låt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ vara de olika egenvärdena till T och låt $U_1, \ldots, U_m$ vara de motsvarande underrum ~~bestående~~ av generaliserade egenvektorer.
Då gäller enligt Sats 7.10 att

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

och

$$T - \lambda_j I : U_j \to U_j \text{ nilpotent för varje } j.$$

Då finns det en bas i varje U_j som utgör en Jordanbas för $(T-\lambda_j I)|_{U_j}$. Genom att sammanslå dessa baser får vi en bas i V som är en Jordanbas för T. Därmed är satsen bevisad.

<u>Exempel</u> Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi antar att $A = M(T)$ för $T \in L(K^3)$ i någon bas i K^3. Det karakteristiska polynomet för T ges av $p_T(z) = z^2(z-2)$, emedan $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 2$ är de enda egenvärdena med multipliciteterna $d_1 = 2$ och $d_2 = 1$.

Det minimala polynomet måste vara $z(z-2)$ eller $z^2(z-2)$. Vi får att

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A(A-2I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

och $A^2(A-2I)=0$, så det minimala polynomet ges av $z^2(z-2)$. Detta ger att ett Jordanblock är en 2×2 matris svarande mot egenvärdet $\lambda_1=0$ och ett Jordanblock är en 1×1 matris svarande mot egenvärdet $\lambda_2=2$. (Se Sats 7.20). Således kan vi sluta oss till att Jordans normalform för T är

$$J=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Låt λ vara ett egenvärde till T. Då finns det en bas för rummet av generaliserade egenvektorer till T svarande mot λ dvs. $N((T-\lambda I)^{\dim V})$, som består av vektorer såsom i Lemma 7.17 för $T-\lambda I/_{N((T-\lambda I)^{\dim V})}$, och brukar kallas <u>Jordankedjor</u>. Se beviset av Sats 7.18. Hur många sådana Jordankedjor finns det? De sista vektorerna i dessa Jordankedjor utgör en bas för egenrummet $N(T-\lambda I)$ enligt Lemma 7.17, där $T-\lambda I\in L(N((T-\lambda I)^{\dim V}))$. Alltså

<u>Sats 7.19</u> Antalet Jordanblock i Jordans normalform av $T\in L(V)$ svarande mot λ är lika med $\dim N(T-\lambda I)$.

Vi är intresserade att bestämma Jordans normalform av en operator T. Det karakteristiska polynomet berättar oss hur många gånger ett egenvärde λ finns i denna Jordans normalform. Dessutom anger $\dim N(T-\lambda I)$ hur många Jordanblock det finns för egenvärdet λ.

Kan vi säga något om storleken av själva Jordanblocken?

Sats 7.20 Storleken av det största Jordanblocket svarande mot egenvärdet λ till T är exakt graden av $z-\lambda$ i det minimala polynomet av T.

Om J är ett $k \times k$ Jordanblock, så är $(J-\lambda I)^m = 0$ för $m \geq k$ och olika noll för $m < k$. Således behöver vi polynomet $(z-\lambda)^k$. Alla mindre Jordanblock med samma egenvärde kommer också att vara noll då vi opererar med detta polynom. Därmed följer ovanstående sats.

Slutligen skall vi bevisa:

Sats 7.21 Låt $T \in L(V)$ och antag att det minimala polynomet av T ges av $m_T(z) = (z-\lambda_1)^{s_1} \cdots\cdots (z-\lambda_k)^{s_k}$, där $1 \leq s_i \leq d_i$, $i=1,..,k$. Då kan T framställas som en diagonalmatris om och endast om $s_1 = \ldots = s_k = 1$.

Vi behöver följande hjälpresultat.

Lemma 7.22 Om $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,W)$, så gäller att
$$\dim N(ST) \leq \dim N(S) + \dim N(T).$$

Bevis: Notera att $T^{-1}(N(S)) = \{x \in U : Tx \in N(S)\} = N(ST)$.
Definiera en operator
$$F : T^{-1}(N(S)) \longrightarrow N(S).$$
$$x \longmapsto Tx$$

Klart att $F \in L(T^{-1}(N(S)), N(S))$. Nu gäller

$$\dim N(ST) = \dim T^{-1}(N(S)) \overset{\text{sats 2.3}}{=} \dim R(F) + \dim N(F)$$
$$\le \dim N(S) + \dim N(T).$$

Bevis av Sats 7.21: Antag först att det minimala polynomet av T ges av

$$m(z) = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_k).$$

Då gäller $m(T) = (T-\lambda_1 I)\circ\cdots\circ(T-\lambda_k I) : V \to V$ är nolloperatorn. Med beaktande av Lemma 7.22 fås

$$V = \dim N((T-\lambda_1 I)\circ\cdots\circ(T-\lambda_k I)) \le \dim N(T-\lambda_1 I) + \dots + \dim N(T-\lambda_k I)$$
$$= \dim N(T-\lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \dim N(T-\lambda_k I).$$

Således ger sats 1.16 att $V = N(T-\lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus N(T-\lambda_k I)$, så egenvektorerna till T utgör en bas för V. Således kan T framställas som en diagonalmatris.

Omvänt, antag att T kan framställas som en diagonalmatris. Då har V en bas som består av egenvektorer till T med de olika egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Det minimala polynomet för T ges av $m(z) = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_k)$, ty låt $u_1, \dots, u_k$ vara egenvektorer svarande mot egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Då gäller $U = [u_1, \dots, u_k] \subseteq V$ och $T|_U : U \to U$ är en operator som kan framställas som en diagonalmatris i basen $u_1, \dots, u_k$. Klart att $m(T) = 0$. Därmed är satsen bevisad.