6. Linjära avbildningar på inre produktrum

De djupaste resultaten för inre produktrum har att göra med ett ämnesområde som vi nu skall behandla. Det är fråga om linjära avbildningar på inre produktrum. Som vi kommer att se, så hör till varje linjär avbildning på ett inre produktrum en annan linjär avbildning som kallas den adjungerade avbildningen. Genom att utforska egenskaper hos denna adjungerade avbildning skall vi utveckla en detaljerad beskrivning av linjära avbildningar på inre produktrum.

I detta kapitel antar vi genomgående att V är ett ändligtdimensionellt inre produktrum olika $\{0\}$ över talkroppen $\mathbb{K}$.

Linjära funktionaler och adjungerade avbildningar

En *linjär funktional* på V är en linjär avbildning från V till $\mathbb{K}$. Till exempel funktionen $\varphi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ som är definierad genom

$$(*) \qquad \varphi(z_1, z_2, z_3) = 2z_1 - 5z_2 + z_3$$

är en linjär funktional på $\mathbb{K}^3$. Som ett annat exempel betrakta inre produktrummet $P_6(\mathbb{R})$ med inre produkten definierad genom

$$\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Funktionen $\varphi : P_6(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definierad genom

(**) $$\varphi(p) = \int_0^? p(t)\cos t\, dt$$

är en funktional på $P_6^0(\mathbb{R})$.

Om $v \in V$, så är avbildningen $u \mapsto \langle u,v\rangle$ en linjär funktional på V. Följande resultat visar att <u>alla</u> linjära funktionaler är av denna form.
För att illustrera denna sats, notera att för den linjära funktionalen i (*) kan vi välja $v = (2,-5,1) \in K^3$.
Den linjära funktionalen φ i (**) illustrerar bättre styrkan av nedanstående sats för denna linjära funktional, eftersom det inte existerar någon uppenbar kandidat för v. Notera att $\cos t \notin P_6(\mathbb{R})$, varför $\cos t$ inte kan komma ifråga.

<u>Sats 6.1</u> Antag att φ är en linjär funktional på V. Då existerar det en <u>entydig</u> vektor $v \in V$ sådan att

$$\varphi(u) = \langle u,v\rangle \text{ för alla } u \in V.$$

<u>Bevis:</u> Vi visar först att det existerar en vektor $v \in V$ sådan att $\varphi(u) = \langle u,v\rangle$ för alla $u \in V$.

Låt $e_1, \ldots, e_n$ vara en ortonormerad bas i V. Då gäller

$$\varphi(u) = \varphi(\langle u, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle u, e_n\rangle e_n)$$
$$= \langle u, e_1\rangle \varphi(e_1) + \cdots + \langle u, e_n\rangle \varphi(e_n)$$
$$= \langle u, \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{\varphi(e_n)} e_n\rangle$$

för varje $u \in V$. Sätt alltså $v = \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{\varphi(e_n)} e_n \in V$. Då är $\varphi(u) = \langle u, v\rangle$ för alla $u \in V$.

Antag nu att v_1 och v_2 är två vektorer i V med $\varphi(u) = \langle u, v_1\rangle = \langle u, v_2\rangle$ för alla $u \in V$.

Då gäller

$$0 = \langle u, v_1\rangle - \langle u, v_2\rangle = \langle u, v_1 - v_2\rangle \text{ för alla } u \in V.$$

Med $u = v_1 - v_2$ följer att $v_1 = v_2$, och beviset är klart.

I fortsättningen antar vi att W också är ett ändligtdimensionellt inre produktrum olika $\{0\}$ över $\mathbb{K}$.

Låt $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Den <u>adjungerade</u> avbildningen till T, som vi betecknar T^*, är en funktion från W till V definierad på följande sätt: Fixera $v \in W$. Betrakta den linjära funktionalen på V som avbildar

$$u \longmapsto \langle Tu, v\rangle \in \mathbb{K}.$$

Låt T^*v vara den entydiga vektorn i V för vilken gäller att

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle \text{ för alla } u \in V.$$

Sats 6.1 garanterar existensen och entydigheten av en vektor i V med denna egenskap.

Låt oss nu med ett exempel belysa hur den adjungerade avbildningen beräknas. Definiera $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ genom

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 3x_3, 2x_1).$$

Således är T^* en funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$. För att beräkna T^* fixera en punkt $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Då gäller

$$\begin{aligned}\langle (x_1,x_2,x_3), T^*(y_1,y_2)\rangle &= \langle T(x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2)\rangle \\ &= \langle (x_2+3x_3, 2x_1), (y_1,y_2)\rangle \\ &= x_2y_1 + 3x_3y_1 + 2x_1y_2 \\ &= \langle (x_1,x_2,x_3), (2y_2, y_1, 3y_1)\rangle\end{aligned}$$

för alla $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$. Detta visar att $T^*(y_1,y_2) = (2y_2, y_1, 3y_1)$. Notera att T^* är en linjär avbildning.

Detta gäller allmänt, dvs. om $T \in \mathcal{L}(V,W)$ så $T^* \in \mathcal{L}(W,V)$. För att visa detta, antag att $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Fixera $w_1, w_2 \in W$. Då gäller

$$\begin{aligned}\langle Tu, w_1 + w_2\rangle &= \langle Tu, w_1\rangle + \langle Tu, w_2\rangle \\ &= \langle u, T^*w_1\rangle + \langle u, T^*w_2\rangle \\ &= \langle u, T^*w_1 + T^*w_2\rangle \text{ för alla } u \in V,\end{aligned}$$

vilket visar att $T^*(v_1+v_2) = T^*v_1 + T^*v_2$. Om $\alpha \in \mathbb{K}$, så gäller

$$\langle Tu, \alpha v\rangle = \bar\alpha \langle Tu, v\rangle = \bar\alpha \langle u, T^*v\rangle$$
$$= \langle u, \alpha T^* v\rangle \text{ för alla } u \in V,$$

varför $T^*(\alpha v) = \alpha T^* v$. Således är T^* linjär.

Som <u>hemuppgift</u> skall vi visa att funktionen från $L(V,W)$ till $L(W,V)$ definierad genom $T \mapsto T^*$, har följande egenskaper:

$(S+T)^* = S^* + T^*$ för alla $S, T \in L(V,W)$

$(\alpha T)^* = \bar\alpha T^*$ för alla $\alpha \in \mathbb{K}$, alla $T \in L(V,W)$,

$(T^*)^* = T$ för alla $T \in L(V,W)$.

$I^* = I$, där I är den identiska avbildningen på V,

$(ST)^* = T^* S^*$ för alla $T \in L(V,W)$ och alla $S \in L(W,U)$, och U är ett inre produktrum över $\mathbb{K}$.

Som en tillämpning av de tre sista egenskaperna bevisar vi följande resultat.

<u>Sats 6.2</u> Låt $T \in L(V)$. Då är T inverterbar om och endast om T^* är inverterbar.

Bevis: Antag att T är inverterbar. Då existerar $S \in L(V)$ sådan att
$$ST = TS = I.$$
Då följer att $(ST)^* = (TS)^* = I^* = I$, dvs. $T^*S^* = S^*T^* = I$. Således är T^* inverterbar med inversen S^*.

Av ovanstående följer att om T^* är inverterbar, så är också $(T^*)^*$ inverterbar. Men $(T^*)^* = T$, varför T är inverterbar.

Antag att $e_1, \ldots, e_n$ är en ortonormerad bas i V och att $f_1, \ldots, f_m$ är en ortonormerad bas i W. Låt oss se hur vi kan hitta
$$M(T^*, f_1, \ldots, f_m, e_1, \ldots, e_n)$$
utgående från $M(T, e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$. Enligt Sats 5.7 gäller
$$Te_j = \langle Te_j, f_1\rangle f_1 + \cdots + \langle Te_j, f_m\rangle f_m.$$
Detta ger
$$M(T) = \begin{pmatrix} \langle Te_1, f_1\rangle & \cdots & \langle Te_n, f_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle Te_1, f_m\rangle & \cdots & \langle Te_n, f_m\rangle \end{pmatrix}.$$
Vidare gäller att $T^*f_j \in W$ och Sats 5.7 ger att
$$\begin{aligned} T^*f_j &= \langle T^*f_j, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle T^*f_j, e_n\rangle e_n \\ &= \overline{\langle T(e_1), f_j\rangle} e_1 + \cdots + \overline{\langle T(e_n), f_j\rangle} e_n. \end{aligned}$$

Alltså

$$M(T^*) = \begin{pmatrix} \overline{\langle T(e_1), f_1\rangle} & \cdots & \overline{\langle T(e_1), f_m\rangle} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{\langle T(e_n), f_1\rangle} & \cdots & \overline{\langle T(e_n), f_m\rangle} \end{pmatrix}$$

Med andra ord, <u>matrisen till T^* fås från matrisen $M(T)$ genom att bilda den transponerade och komplexkonjugerade matrisen av $M(T)$</u>.

Om $V = W$ och $e_1, \ldots, e_n$ är en ortonormerad bas i V sådan att $M(T) = M(T^*)$, så följer att $\overline{\langle Te_j, e_i\rangle} = \langle Te_i, e_j\rangle$ för $i,j = 1, \ldots, n$.

<u>Sats 6.3</u> Antag att $T \in L(V,W)$. Då gäller

(a) $N(T^*) = T(V)^\perp$

(b) $T^*(W) = N(T)^\perp$

(c) $N(T) = T^*(W)^\perp$

(d) $T(V) = N(T^*)^\perp$.

<u>Bevis</u>: (a): Låt $v \in W$. Då gäller $v \in N(T^*) \Leftrightarrow T^*v = 0$
$\Leftrightarrow \langle u, T^*v\rangle = 0 \ \forall u \in V \Leftrightarrow \langle Tu, v\rangle = 0 \ \forall u \in V$
$\Leftrightarrow v \in T(V)^\perp$, d.v.s. $N(T^*) = T(V)^\perp$.
(d): Då $N(T^*) = T(V)^\perp$ följer $T(V) = (T(V)^\perp)^\perp = N(T^*)^\perp$
(b) och (c): Byt T mot T^* i (a) och (d).

Självadjungerade avbildningar

En avbildning $T \in L(V)$ kallas självadjungerad om $T^* = T$. Notera att också $T^* \in L(V)$.

Den adjungerade avbildningen i $L(V)$ spelar en liknande roll som komplex konjugat i $\mathbb{C}$. Ett komplext tal z är reellt om och endast om $z = \bar{z}$. Således är en självadjungerad operator $T^* = T$ analog med ett reellt tal. Vi kommer att se att denna analogi reflekteras i några viktiga egenskaper hos självadjungerade operatorer början med egenvärden.

Sats 6.4 Varje egenvärde till en självadjungerad operator är reellt.

Bevis: Antag att $T = T^*$ och $Tu = \lambda u$, $u \neq 0$. Nu gäller

$$\lambda \|u\|^2 = \lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle Tu, u \rangle$$
$$= \langle u, Tu \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \bar{\lambda} \|u\|^2.$$

Alltså: $\lambda = \bar{\lambda}$, dvs. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Anm. Om $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, så är varje egenvärde per definition reellt, varför ovanstående sats är av intresse endast då $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Följande sats är falsk för <u>reella</u> inre produktrum. Betrakta till exempel $T \in L(\mathbb{R}^2)$ definierad genom $T(u,v) = (-v,u)$. Då gäller

$$\langle T(u,v), (u,v)\rangle = \langle(-v,u),(u,v)\rangle = -vu + uv$$
$$= 0 \text{ för varje } (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

fastän $T \neq \Theta$.

<u>Sats 6.5</u> Om V är ett komplext inre produktrum och $T \in L(V)$ sådan att $\langle Tu,u\rangle = 0$ för alla $u \in V$. Då är $T = \Theta$.

<u>Bevis:</u> Nu gäller

$$4\langle Tu,v\rangle = \langle T(u+v),u+v\rangle - \langle T(u-v),u-v\rangle$$
$$+ i\langle T(u+iv),u+iv\rangle - i\langle T(u-iv),u-iv\rangle$$

för alla $u,v \in V$. Notera att varje term på högra sidan är av formen $\langle Tu,u\rangle$ för <u>lämpligt</u> $u \in V$. Om $\langle Tu,u\rangle = 0$ för alla $u \in V$, så ger ovanstående ekvation att $\langle Tu,v\rangle = 0$ för alla $u,v \in V$. Detta ger $T = \Theta$ genom att välja $v = Tu$.

Följande resultat är också falskt för <u>reella</u> inre produktrum vilket inses genom att betrakta vilken linjär operator som helst på ett reellt inre produktrum som <u>inte</u> är självadjungerad.

Sats 6.6 Låt V vara ett komplext inre produktrum och låt $T \in L(V)$. Då gäller $T = T^*$ om och endast om $\langle Tu, u\rangle \in \mathbb{R}$ för varje $u \in V$.

Bevis: Låt $u \in V$. Då gäller

$$\langle Tu,u\rangle - \overline{\langle Tu,u\rangle} = \langle Tu,u\rangle - \langle u,Tu\rangle$$
$$= \langle Tu,u\rangle - \langle T^*u,u\rangle$$
$$= \langle (T-T^*)u,u\rangle.$$

Om $\langle Tu,u\rangle \in \mathbb{R}$ för varje $u \in V$, så följer att $\langle (T-T^*)u,u\rangle = 0$ för varje $u \in V$. Sats 6.5 ger att $T = T^*$. Omvänt, om $T^* = T$, så är $\langle Tu,u\rangle = \overline{\langle Tu,u\rangle}$ för varje $u \in V$. Detta ger att $\langle Tu,u\rangle \in \mathbb{R}$ för varje $u \in V$.

På ett reellt inre produktrum V kan en operator $T \neq 0$ satisfiera $\langle Tu,u\rangle = 0$ för alla $u \in V$. Detta kan inte gälla för en självadjungerad operator som nästa resultat visar.

Sats 6.7 Om $T \in L(V)$ är självadjungerad sådan att $\langle Tu,u\rangle = 0$ för alla $u \in V$, så är $T = 0$.

Bevis: Vi har tidigare visat detta då V är komplext och utan att $T = T^*$ (Sats 6.5).
Antag nu att V är ett reellt inre produktrum och

att $T=T^*$. För $u,v\in V$ gäller

$$\langle Tu,v\rangle = \frac{1}{4}\{\langle T(u+v),u+v\rangle - \langle T(u-v),u-v\rangle\},$$

ty $\langle Tu,v\rangle = \langle u,T^*v\rangle = \langle u,Tv\rangle = \overline{\langle Tv,u\rangle} = \langle Tv,u\rangle$.
Om $\langle Tu,u\rangle = 0$ för alla $u\in V$, så är $\langle Tu,v\rangle = 0$ för alla $u,v\in V$. Alltså med $v=Tu$, fås att $T=0$.

Följande lemma kan upptäckas genom att resonera på följande sätt: Antag att $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ och $\alpha^2<4\beta$. Låt $t\in\mathbb{R}$. Då gäller

$$t^2+\alpha t+\beta = \left(t+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right) > 0.$$

Speciellt, är $t^2+\alpha t+\beta$ ett inverterbart reellt tal, dvs. $t^2+\alpha t+\beta\neq 0$. Genom att ersätta det reella talet t med en självadjungerad operator förs vi till följande resultat.

<u>Lemma 6.8</u> Antag att $T\in\mathcal{L}(V)$ är självadjungerad. Om $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ och $\alpha^2<4\beta$, så är

$$T^2+\alpha T+\beta I \text{ inverterbar.}$$

<u>Bevis</u>: Antag $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ och att $\alpha^2<4\beta$. Låt $u\neq 0$ i V. Då gäller

$$\begin{aligned}\langle (T^2+\alpha T+\beta I)u,u\rangle &= \langle T^2u,u\rangle + \alpha\langle Tu,u\rangle + \beta\langle u,u\rangle\\ &= \langle Tu,Tu\rangle + \overset{\in\mathbb{R}}{\alpha}\overset{\in\mathbb{R}}{\langle Tu,u\rangle} + \beta\|u\|^2\\ &\geq \|Tu\|^2 - |\alpha|\,\|Tu\|\cdot\|u\| + \beta\|u\|^2\\ &= \left(\|Tu\| - \frac{|\alpha|\,\|u\|}{2}\right)^2 + \left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)\|u\|^2\\ &> 0,\end{aligned}$$

För den första olikheten följer av Cauchy-Schwarz olikhet. Således är $(T^2+\alpha T+\beta I)u \neq 0$, dvs. $T^2+\alpha T+\beta I$ är injektiv, vilket implicerar att $T^2+\alpha T+\beta I$ är inverterbar enligt Sats 2.11 .

Vi har tidigare visat att varje operator på ett komplext inre produktrum har ett egenvärde (se Sats 4.4), så följande lemma berättar oss något nytt endast för reella inre produktrum.

Lemma 6.9 Antag att $T \in L(V)$ är självadjungerad. Då har T ett egenvärde.

Bevis: Vi kan anta att V är ett reellt inre produktrum. Låt $\dim V = n$ och välj $u \neq 0$ i V. Då kan

$$u, Tu, T^2u, \ldots, T^nu$$

inte vara linjärt oberoende ty antalet vektorer är $n+1$ och $\dim V = n$.
Således finns det reella tal $c_0, c_1, \ldots, c_n$, alla inte 0, så att

$$c_0u + c_1Tu + \ldots + c_nT^nu = 0.$$

Betrakta polynomet $c_0 + c_1t + \ldots + c_nt^n = 0$. Detta kan skrivas i formen

$$0 = c_0+c_1t+\ldots+c_nt^n = c(t^2+\alpha_1t+\beta_1)\ldots(t^2+\alpha_Mt+\beta_M)(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_m)$$

där $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha_j, \beta_j, \lambda_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 < 4\beta_j$, $m+M \geq 1$ samt ekvationen gäller för varje $t \in \mathbb{R}$ (Sats 3.8).

Då gäller

$$\begin{aligned} 0 &= (c_0 I + c_1 T + \dots + c_n T^n)u \\ &= c(T^2+\alpha_1 T+\beta_1 I)\dots(T^2+\alpha_M T+\beta_M I)(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_m I)u. \end{aligned}$$

Varje $T^2+\alpha_j T+\beta_j I$ är inverterbar, ty T är självadjungerad och varje $\alpha_j^2 < 4\beta_j$, enligt lemma 6.8. Då också $c \neq 0$ ger ovanstående ekvation att

$$(T-\lambda_1 I)\dots(T-\lambda_m I)u = 0.$$

Således är $T-\lambda_j I$ inte injektiv för åtminstone ett j, dvs. T har ett egenvärde.

De "trevligaste" operatorerna på V är de för vilka det finns en ortonormerad bas i V som består av egenvektorer. Låt $T \in L(V)$ och antag att $e_1, \dots, e_n$ är en ortonormerad bas i V sådan att $Te_j = \lambda_j e_j$, $j=1,\dots,n$. Matrisen $M(T)$ för T med avseende på denna bas får utseendet

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Matrisen är i detta fall en <u>diagonalmatris</u> som har mycket flera nollor än en uppåt triangulär matris. Om en operator $T \in L(V)$ i en viss bas ges av en diagonalmatris, så ger sats 4.7 att diagonalelementen är exakt egenvärdena till T och basvektorerna är egenvektorerna. Därmed kan vi formulera:

<u>Lemma 6.10</u> Operatorn $T \in L(V)$ framställs i en viss bas av en diagonalmatris om och endast om basvektorerna är egenvektorer till T. Matrisens diagonalelement är motsvarande egenvärden.

Vårt nästa resultat, som kallas spektralsatsen, är kanske det nyttigaste resultatet i detta ämnesområde. Spektralsatsen säger att varje självadjungerad operator på V har tillräckligt med egenvektorer att bilda en ortonormerad bas i V.
För att illustrera spektralsatsen, betrakta den självadjungerade operatorn på K^2 som i den naturliga basen ges av

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Man kan visa att $(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ är en ortonormerad bas i K^2 som utgör egenvektorer till denna operator.

<u>Sats 6.11</u> (Spektralsatsen) Om $T \in L(V)$ är självadjungerad, så har V en ortonormerad bas som består av egenvektorer till T.

<u>Bevis:</u> Antag att $T \in L(V)$ är självadjungerad. Vi skall visa att V har en ortonormerad bas bestående av egenvektorer till T genom induktion över dimensionen av V.

Klart att resultatet gäller om $\dim V = 1$.
Antag att $\dim V = n > 1$ och att resultatet gäller för rum med mindre dimension.

Låt λ vara ett egenvärde till T, som existerar enligt Lemma 6.9. Låt e_1 vara motsvarande egenvektor med $\|e_1\| = 1$. Sätt

$$W = \{\alpha e_1 : \alpha \in K\}.$$

Notera att $\dim W = 1$ och att $u \in W^\perp$ om och endast om $\langle e_1, u\rangle = 0$.
Antag att $u \in W^\perp$. Då gäller

$$\langle e_1, Tu\rangle = \langle Te_1, u\rangle = \lambda \langle e_1, u\rangle = 0,$$

varför $Tu \in W^\perp$. Alltså $T(W^\perp) \subseteq W^\perp$, dvs. $W^\perp$ är invariant under T.
Således kan vi definiera en operator $S \in L(W^\perp)$ genom $S := T|_{W^\perp}$.
Om $u, v \in W^\perp$, så gäller

$$\langle Su, v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = \langle u, Sv\rangle,$$

vilket visar att S är självadjungerad. Notera att $\dim W^\perp = n-1$. Således ger induktionsantagandet att det existerar en ortonormerad bas i $W^\perp$ som består av egenvektorer till S. Låt $e_2, \dots, e_n$ vara en sådan bas. Emedan $Su = Tu$ för varje $u \in W^\perp$, följer att $e_2, \dots, e_n$ är egenvektorer till T.
Emedan $V = W \oplus W^\perp$ enligt Sats 5.13 följer att $e_1, e_2, \dots, e_n$ är en ortonormerad bas av egenvektorer till T.

Normala operatorer

En operator $T \in L(V)$ är **normal**, om $TT^* = T^*T$. Klart att varje självadjungerad operator är normal. Betrakta den linjära operatorn på $\mathbb{K}^2$ med avseende på den naturliga basen i $\mathbb{K}^2$ har matrisframställningen

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Denna operator är inte självadjungerad men den är normal.

Vi skall snart se varför det lönar sig att studera normala operatorer. Följande resultat ger ett villkor som karakteriserar normala operatorer.

Sats 6.12 $T \in L(V)$ är normal om och endast om $\|Tu\| = \|T^*u\|$ för alla $u \in V$.

Bevis: Låt $T \in L(V)$. Nu gäller

$$\begin{aligned} T \text{ normal} &\iff T^*T - TT^* = \Theta \\ &\iff \langle (T^*T - TT^*)u, u\rangle = 0 \quad \forall u \in V \\ &\iff \langle T^*Tu, u\rangle = \langle TT^*u, u\rangle \quad \forall u \in V \\ &\iff \|Tu\|^2 = \|T^*u\|^2 \quad \forall u \in V, \end{aligned}$$

där vi använde Sats 6.7 och att $T^*T - TT^*$ är självadjungerad.

Korollarium 6.13 Antag att $T \in L(V)$ är normal. Om $u \in V$ är en egenvektor till T med egenvärdet $\lambda \in K$, så är också u en egenvektor till T^* med egenvärdet $\bar{\lambda}$.

Bevis: Låt $(T-\lambda I)u = 0$. Då T är normal, så är också $T-\lambda I$ normal. Alltså

$$0 = \|(T-\lambda I)u\| = \|(T-\lambda I)^* u\| = \|(T^*-\bar{\lambda} I)u\|$$

enligt Sats 6.12. Således är u en egenvektor till T^* med egenvärdet $\bar{\lambda}$.

Spektralsatsen säger att varje självadjungerad operator på ett inre produktrum har en diagonalmatris med avseende på någon ortonormerad bas. Följande resultat kallas en komplex spektralsats och den ger en fullständig beskrivning av operatorer på ett komplext inre produktrum vilka har en diagonalmatris med avseende på någon ortonormerad bas.

Sats 6.14 (Komplexa spektralsatsen) Antag att V är ett komplext inre produktrum och $T \in L(V)$. Då har V en ortonormerad bas bestående av egenvektorer till T om och endast om T är normal.

Bevis: Antag först att V har en ortonormerad bas bestående av egenvektorer till T. Med avseende på denna bas är $M(T)$ en diagonalmatris. Matrisen $M(T^*)$ med avseende på samma bas fås genom att bilda den transponerade och komplexkonjugerade matrisen av $M(T)$ (se sid. 110). Således är $M(T^*)$ också en diagonalmatris. Emedan två diagonalmatriser alltid kommuterar, följer att

$$M(T)M(T^*) = M(T^*)M(T)$$

Tidigare har vi visat att $M(TT^*) = M(T)M(T^*)$ och $M(T^*T) = M(T^*)M(T)$, dvs.

$$M(TT^*) = M(T^*T),$$

Sats 2.9 ger att $M : L(V) \longrightarrow Mat(n,n,K)$ är inverterbar, och följaktligen fås att $TT^* = T^*T$, dvs. T är normal.

För att visa omvändningen, antag nu att T är normal. Med stöd av Korollarium 5.12 finns det en ortonormerad bas $e_1, \dots, e_n$ för V sådan att $M(T)$ är uppåt triangulär

$$(*) \qquad M(T) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Vi skall visa att $M(T)$ är en diagonalmatris, vilket innebär att $e_1, \ldots, e_n$ är egenvektorer till T. Ur (*) erhålls:

$$\|Te_1\|^2 = \langle Te_1, Te_1\rangle = \langle a_{1,1}e_1, a_{1,1}e_1\rangle$$
$$= |a_{1,1}|^2.$$

Vidare följer ur (*) att

$$\|T^*e_1\|^2 = \langle T^*e_1, T^*e_1\rangle$$
$$= \langle \bar{a}_{1,1}e_1 + \ldots + \bar{a}_{1,n}e_n, \bar{a}_{1,1}e_1 + \ldots + \bar{a}_{1,n}e_n\rangle$$
$$= |a_{1,1}|^2 + \ldots\ldots + |a_{1,n}|^2.$$

Eftersom T är normal gäller att $\|Te_1\| = \|T^*e_1\|$. Då följer

$$a_{1,2} = a_{1,3} = \ldots = a_{1,n} = 0.$$

Ur (*) erhålls nu: $\|Te_2\|^2 = |a_{2,2}|^2$ (ty $a_{1,2} = 0$) och

$$\|T^*e_2\|^2 = |a_{2,2}|^2 + \ldots + |a_{2,n}|^2.$$

Då T är normal erhålls analogt med tidigare att $\|Te_2\| = \|T^*e_2\|$, så

$$a_{2,3} = a_{2,4} = \ldots = a_{2,n} = 0.$$

Genom att fortsätta på detta vis erhåller vi att alla element ovanför diagonalen är nollor i (*). Därmed är $M(T)$ en diagonalmatris, vilket betyder att $e_1, \ldots, e_n$ är en ortonormerad bas av egenvektorer.

Om V är ett reellt inre produktrum, så gäller också omvändningen till spektralsatsen (Sats 6.11). Antag således att V har en ortonormerad bas $e_1, \dots, e_n$ bestående av egenvektorer till $T \in L(V)$. Vi skall visa att T är självadjungerad.

Låt $Te_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$, där alla $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Då gäller

$$M(T, e_1, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

och

$$M(T^*, e_1, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alltså $M(T) = M(T^*)$, dvs. $T = T^*$ enligt Sats 2.9. Således gäller en motsvarighet till den komplexa spektralsatsen för reella inre produktrum och självadjungerade operatorer. Nu kan man fråga sig om detta resultat gäller för komplexa inre produktrum? Svaret är nej. Låt nämligen V vara ett komplext inreproduktrum och $T = iI$. Alla vektorer $u \neq 0$ i V är egenvektorer till T, ty $Tu = iu$ för alla $u \in V$. Enligt Korollarium 5.12 har V en ortonormerad bas och denna är således egenvektorer till T. Men $T^* = -iI \neq T$.

Den komplexa spektralsatsen ger en fullständig beskrivning av normala avbildningar på komplexa inre produktrum. Vårt nästa mål är att ge en fullständig beskrivning av normala operatorer på reella inre produktrum. Vi börjar med en beskrivning av operatorer på ett 2-dimensionellt reellt inre produktrum som är normala men inte självadjungerade.

Lemma 6.15 Antag att V är ett reellt inre produktrum med $\dim V = 2$ och låt $T \in L(V)$. Följande påståenden är ekvivalenta.

(a) T är normal men inte självadjungerad.

(b) Matrisen $M(T)$ med avseende på alla ortonormerade baser i V har formen

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{med } b \neq 0$$

(c) Matrisen $M(T)$ med avseende på någon ortonormerad bas i V har formen

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{med } b > 0.$$

Bevis: Antag att (a) gäller. Låt e_1, e_2 vara en ortonormerad bas i V. Antag att matrisen $M(T)$ med avseende på denna bas är

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Emedan $Te_1 = ae_1 + be_2$ och $T^*e_1 = ae_1 + ce_2$, så följer att $\|Te_1\|^2 = a^2 + b^2$ och $\|T^*e_1\|^2 = a^2 + c^2$. Då T är normal ger Sats 6.12 att $\|Te_1\|^2 = \|T^*e_1\|^2$, varför $b^2 = c^2$. Alltså $b = c$ eller $b = -c$. (125)

Om $b = c$, så är
$$M(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Då är
$$M(T, e_1, e_2) = M(T^*, e_1, e_2), \text{ varför } T^* = T.$$
Men T är inte självadjungerad, så $b = -c$. Därför är
$$M(T, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Nu är $M(T^*, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix}$. Låt oss beräkna $M(T)M(T^*) = M(TT^*)$ och $M(T^*)M(T) = M(T^*T)$, dvs.
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab-bd \\ ab-bd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$
och
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & -ab+bd \\ -ab+bd & b^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Då är T är normal, är dessa produktmatriser lika med varandra, varför $ab = bd$. Nu är $b \neq 0$, ty annars är T självadjungerad.
Således är $a = d$, och därmed har vi visat att (a) $\Rightarrow$ (b).

Antog att (b) gäller. Vi skall visa att (c) gäller. Välj en godt. ortonormerad bas e_1, e_2 i V. Enligt antagandet är

$$M(T, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ där } b \neq 0.$$

Om $b > 0$, så gäller (c) och vi är klara. Om $b < 0$, betrakta basen $e_1, -e_2$. Emedan $Te_1 = ae_1 - b(-e_2)$ och $T(-e_2) = be_1 + a(-e_2)$, följer att

$$M(T, e_1, -e_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -(-b) \\ -b & a \end{pmatrix}$$

där $-b > 0$. Så i detta fall följer också att (b) implicerar (c).

Antog nu att (c) gäller. Låt e_1, e_2 vara en ortonormerad bas i V sådan att

$$M(T, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ med } b > 0.$$

Emedan $b \neq 0$ och $M(T^*, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ är $M(T, e_1, e_2) \neq M(T^*, e_1, e_2)$. Alltså $T \neq T^*$, så T är inte självadjungerad. Man kan visa att (se tidigare)

$$M(TT^*, e_1, e_2) = M(T^*T, e_1, e_2),$$

och följaktligen är $TT^* = T^*T$, dvs. T är normal och vi har visat att (c) medför (a).

Beviset till nästa resultat innehåller en <u>ny teknik</u>. Man kan ofta förstå en matris bättre om man tänker på den som en sammansättning av flera små matriser. Till exempel, betrakta matrisen

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi kan skriva denna matris i formen

$$D=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

där $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ och 0, betecknar som vanligt, en matris med endast nollelement. I detta fall är 0 en 3×2 matris.

Följande resultat spelar en nyckelroll i vår karakterisering av normala avbildningar på ett reellt inre produktrum.

<u>Sats 6.16</u> Antag att $T\in L(V)$ är normal och U är ett underrum av V som är invariant under T. Då gäller

(a) $U^{\perp}$ är invariant under T,

(b) U är invariant under T^*,

(c) $(T|_U)^* = (T^*)|_U$,

(d) $T|_U$ är normal på U,

(e) $T|_{U^{\perp}}$ är normal på $U^{\perp}$.

<u>Bevis:</u> (a) Låt $e_1, \ldots, e_m$ vara en ortonormerad bas i U. Enligt Kor. 5.10 kan vi utvidga den till en ortonormerad bas $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n$ i V. Eftersom $T(U) \subseteq U$, så gäller att varje $Te_j \in [e_1, \ldots, e_m]$. Således ges matrisen av T med avseende på basen $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n$ i formen

$$M(T) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_1 \cdots e_m & f_1 \cdots f_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{array},$$

där A betecknar en $m \times m$ matris, 0 betecknar en $n \times m$ matris med endast nollelement, B betecknar en $m \times n$ matris och C en $n \times n$ matris.

För varje $j \in \{1, \ldots, m\}$, utgör den j:te kolonnen av $M(T)$ de skalärer som behövs för att skriva Te_j som en linjärkombination av basvektorerna. Således är $\|Te_j\|^2 =$ summan av absolutbeloppet av elementen i kvadrat i den j:te kolonnen av A enligt Sats 5.7. Därför är

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{m} \|Te_j\|^2 = \text{summan av absolutbeloppet av varje element i kvadrat i matrisen } A.$$

För varje j erhålles den j:te kolonnen av $M(T^*)$ genom att bilda komplexa konjugatet av den j:te raden i $M(T)$. Således följer

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{m} \|T^*e_j\|^2 = \text{summan av absolutbeloppet av varje element i kvadrat i matriserna } A \text{ och } B.$$

Emedan T är normal, så gäller $\|Te_j\| = \|T^*e_j\|$ för varje j, varför

$$\sum_{j=1}^{m} \|Te_j\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|T^*e_j\|^2.$$

Denna ekvation tillsammans med (*) och (**) ger att summan av absolutbeloppet av varje element i kvadrat i matrisen B måste vara noll. Med andra ord, B måste vara en matris bestående av endast nollelement. Alltså

$$M(T) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} e_1 \ \ldots \ e_m \ f_1 \ \ldots \ f_n \\ \left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & C \end{array}\right) \end{array}.$$

Speciellt, visar denna framställning att för varje k, gäller att $Tf_k \in [f_1, \ldots, f_n]$. Emedan $f_1, \ldots, f_n$ är en bas i $U^\perp$, följer härav att $Tx \in U^\perp$ för varje $x \in U^\perp$, dvs. $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

(b) Notera att $M(T^*)$ har ett block av nollor i det nedre vänstra hörnet, emedan $M(T)$, som den är given ovan, har ett block av nollor i det övre högra hörnet. Med andra ord, varje T^*e_j kan skrivas som en linjärkombination av $e_1, \ldots, e_m$. Således är U invariant under T^*.

(c) Sätt $S = T|_U$. Fixera $y \in U$. Då gäller

$$\langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \text{ för alla } x \in U.$$

Då $T^*y \in U$ enligt (b), visar ovanstående ekvation att $S^*y = T^*y$. Med andra ord, $(T|U)^* = (T^*)|U$.

(d) Notera att $T^*T = TT^*$ och $(T|U)^* = (T^*)|_U$. Således följer att $(T|U)^*(T|U) = (T^*)|_U(T|U) = (T|U)(T^*)|_U = (T|U)(T|U)^*$, dvs. $T|U$ är normal.

(e) I (d) visade vi att restriktionen av T till vilket invariant underrum som helst är normal. Emedan $U^\perp$ är invariant under T enligt (a) följer att $T|U^\perp$ är normal.

Då vi bevisade sats 6.16 tänkte vi oss en matris som en sammansättning av flera små matriser. Vi skall använda denna idé på nytt.

En <u>block diagonalmatris</u> är en kvadratisk matris av formen

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{pmatrix},$$

där $A_1, \ldots, A_n$ är kvadratiska matriser längs diagonalen och alla andra matriselement är 0. Till exempel, matrisen

$$(+) \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

är en block diagonalmatris med

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_3 \end{pmatrix},$$

där $A_1 = (4)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ och $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Om A och B är block diagonalmatriser av formen

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix}$$

där A_j och B_j, $j=1,\ldots,m$, är av samma storlek, så är AB en block diagonalmatris av formen

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_nB_n \end{pmatrix}.$$

med andra ord, att multiplicera två block diagonalmatriser med varandra (med samma storlek av varje block) innebär att man multiplicerar de motsvarande matriserna på diagonalerna med varandra.

En diagonalmatris är ett specialfall av en block diagonalmatris där varje block har storleken 1×1. Det andra extremfallet är varje kvadratisk matris som är en block diagonalmatris med endast ett block som är hela matrisen. Alltså, att säga att en linjär avbildning har en block diagonalmatris med avseende på någon bas säger oss inget om vi inte vet något om storleken av blocken. Ju mindre blocken är, desto "trevligare" är den linjära avbildningen (i den vaga betydelsen att matrisen då innehåller flera nollor). Den bästa situationen är att ha en ortonormerad bas som ger en diagonalmatris. Vi har visat att detta inträffar på ett reellt inre produktrum exakt för självadjungerade avbildningar (sats 6.11, se sid 123) och på ett komplext inre produktrum exakt för normala avbildningar (Sats 6.14).

Vårt nästa resultat säger att varje normal avbildning på ett reellt inre produktrum har en matris som är mycket nära en diagonalmatris, närmare bestämt får vi en block diagonalmatris med avseende på någon ortonormerad

bas som har block som högst har storleken 2x2.
Vi kan inte vänta oss att erhålla ett bättre resultat, ty på ett reellt inre produktrum finns det en normal avbildning som inte har en diagonalmatrisframställning med avseende på någon bas.
Till exempel, avbildningen $T \in L(\mathbb{R}^2)$ definierad genom $T(x,y) = (-y,x)$ är normal (visa!) men saknar egenvärden. Således har T inte ens en uppåt triangulär matrisframställning med avseende på någon bas i $\mathbb{R}^2$, enligt Sats 4.7.

Notera att matrisen i (+) är av den typ som följande sats lovar. Speciellt, gäller att varje block i (+) har storleken högst 2x2 och alla av de 2x2 blocken har formen (++).

<u>Sats 6.17</u> Antag att V är ett reellt inre produktrum och $T \in L(V)$. Då är T normal om och endast om det finns en ortonormerad bas i V med avseende på vilken T har en blockdiagonalmatris och varje block är en 1x1 matris eller en 2x2 matris av formen

$$(++) \qquad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ med } b > 0.$$

<u>Bevis:</u> Antag först att det existerar en ortonormerad bas i V sådan att matrisen till T är en blockdiagonalmatris och varje block är en 1x1 matris eller en 2x2 matris av formen (++). Med avseende på denna bas är $M(T^*)$ den <u>adjungerade</u> matrisen av $M(T)$, och således en blockdiagonalmatris. Med beaktande av formeln på sidan 131 för produkten av två blockdiagonalmatriser följer att

$$M(T^*T) = M(T^*)\,M(T) = M(T)\,M(T^*) = M(T\,T^*),$$

varför $T^*T = T\,T^*$, dvs. T är normal.

För att bevisa omvändningen, antag att T är normal.
Vi visar det önskade resultatet genom induktion över dimensionen av V.
Om $\dim V = 1$, så är resultatet trivialt.
Låt $\dim V = 2$. Om T är självadjungerad kan vi använda spektralsatsen (Sats 6.11) och resultatet följer. Om T inte är självadjungerad ger Lemma 6.15 det önskade resultatet.
Antag nu att $\dim V > 2$, och att det önskade resultatet gäller för linjära rum med mindre dimension.
Låt U vara ett underrum av V med dimensionen 1 som är invariant under T, om ett sådant underrum existerar, dvs. om T har en egenvektor skild från noll, låt U vara linjära höljet av egenvektorn.
Om ett sådant underrum inte existerar, låt U vara ett underrum av V med $\dim U = 2$ som är invariant under T. Enligt sats 4.9 existerar alltid ett invariant underrum med dimensionen 1 eller 2.
Om $\dim U = 1$, välj en vektor i U med normen 1. Denna vektor är en ortonormerad bas i U, och $M(T|U)$ med avseende på denna bas är en 1×1 matris.
Om $\dim U = 2$, så ger sats 6.16 att $T|U$ är normal. Men $T|U$ är inte självadjungerad, ty annars skulle spektralsatsen 6.11 ge att $T|U$ har en egenvektor skild från noll.
Således kan vi välja en ortonormerad bas i U med avseende på vilken $M(T|U)$ har formen (++) enligt Lemma 6.15.
Sats 6.16 ger nu att $U^{\perp}$ är invariant under T och vidare att $T|U^{\perp}$ är en normal avbildning på $U^{\perp}$.
Induktionsantagandet ger att det existerar en ortonormerad bas i $U^{\perp}$ med

avseende på vilken matrisen $M(T|_{U^\perp})$ har det önskade utseendet.
Genom att lägga till basen i U till denna bas får vi en ortonormerad bas i V med avseende på vilken $M(T)$ har det önskade utseendet.

Positiva linjära operatorer

En operator $T \in L(V)$ kallas *positiv* om T är självadjungerad och
$$\langle Tu, u \rangle \geq 0 \quad \text{för alla } u \in V.$$

Notera att om V är ett *komplext* inre produktrum, så kan vi skippa antagandet att T är självadjungerad från definitionen med beaktande av Sats 6.6.

Man kan visa att varje ortogonal projektion är positiv. För en annan typ av exempel, titta på beviset till Lemma 6.8 där vi visade att om $T = T^*$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ är sådana att $\alpha^2 < 4\beta$, då är $T^2 + \alpha T + \beta I$ positiv.

En *kvadratrot* av en operator $T \in L(V)$ är en operator $S \in L(V)$ så att $S^2 = T$.

Följande resultat är huvudresultatet för positiva avbildningar. Observera att följande karakterisering av positiva avbildningar svarar mot karakteriseringar av icke-negativa tal i $\mathbb{C}$. Ett tal $z \in \mathbb{C}$ är icke-negativt om och endast det har en icke-negativ kvadratrot svarande mot villkor (c) i nedanstående sats. Vidare är z icke-negativ om och endast om z har en reell kvadratrot svarande mot villkor (d) i nedanstående sats. Slutligen, talet z är icke-negativt om och endast om det existerar $w \in \mathbb{C}$ så att $z = \bar{w}w$, dvs. villkor (e) i nedanstående sats.

Sats 6.18 Låt $T \in L(V)$. Då är följande påståenden ekvivalenta:

(a) T är positiv,

(b) T är självadjungerad och alla egenvärden till T är icke-negativa,

(c) T har en positiv kvadratrot,

(d) T har en självadjungerad kvadratrot,

(e) det existerar en avbildning $S \in L(V)$ med $T = S^* S$.

Bevis: Vi visar att (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b): Då T är positiv, så gäller $T^* = T$. Låt λ vara ett egenvärde till T så att $Tx = \lambda x$ och $x \neq 0$. Då gäller

$$0 \leq \langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2,$$

dvs. $\lambda \geq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Enligt spektralsatsen 6.11 finns det en ortonormerad bas $e_1, \dots, e_n$ i V bestående av egenvektorer till T. Låt $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vara egenvärdena till T svarande mot $e_1, \dots, e_n$. Då är varje $\lambda_j \geq 0$, enligt antagandet. Definiera $S \in L(V)$ genom

$$Se_j = \sqrt{\lambda_j}\, e_j, \quad \text{för } j = 1, \dots, n.$$

Tag godt. $x \in V$. Då existerar skalärer $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ med $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$. Vi får

$$\langle Sx, x\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j \sqrt{\lambda_j}\, e_j, \sum_{i=1}^n c_i e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n |c_j|^2 \sqrt{\lambda_j} \geq 0,$$

och vidare är det klart att $S = S^*$, så S är positiv. Emedan $S^2 e_j = \lambda_j e_j = T e_j$ för varje $j = 1, \dots, n$, fås att $S^2 = T$. Därmed har vi visat (c).

(c) $\Rightarrow$ (d) är klart.

(d) $\Rightarrow$ (e): Nu existerar en självadjungerad avbildning $S \in L(V)$ med

med $S^2 = T$. Emedan $S = S^*$ följer att $T = S^*S$, och (e) gäller.

(e) $\Rightarrow$ (a): Tag $S \in L(V)$ så att $T = S^*S$. Då gäller

$$T^* = (S^*S)^* = S^*(S^*)^* = S^*S = T,$$

dvs. T är självadjungerad. För varje $v \in V$,

$$\langle Tv, v\rangle = \langle S^*(Sv), v\rangle = \langle Sv, Sv\rangle = \|Sv\|^2 \geq 0.$$

Således är T positiv.

<u>Exempel</u> Antag att V är ett inre produktrum. Visa att om $T \in L(V)$ är en positiv operator som är inverterbar, så är även T^{-1} en positiv operator.

Då T är positiv, så är $T^* = T$ och alla egenvärden till T är reella och icke-negativa.

Emedan $T = T^*$ ger Sats 6.11 att det existerar en ortonormerad bas $e_1, \ldots, e_n$ i V av egenvektorer till T, dvs.

$$Te_j = \lambda_j e_j, \; j = 1, \ldots, n \text{ och alla } \lambda_j \geq 0.$$

Då fås

$$M(T, e_1, \ldots, e_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Vi vet att T^{-1} existerar, varför $\lambda_j > 0, j = 1, \ldots, n$, och

$$M(T^{-1}) = M(T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

emedan $T^{-1}e_j = \frac{1}{\lambda_j} e_j$, $j = 1, \ldots, n$. Vidare gäller $(T^{-1})^* e_j = \frac{1}{\lambda_j} e_j$, ty $\frac{1}{\lambda_j} \in \mathbb{R}$, Således gäller att

$$T^{-1}(e_j) = (T^{-1})^*(e_j) \quad \text{för } j = 1, \ldots, n.$$

Detta innebär att T^{-1} är självadjungerad. Vi vet också att egenvärdena $1/\lambda_j > 0$ till T^{-1}, så Sats 6.18 ger att T^{-1} är positiv.

Sats 6.19 Varje positiv operator på V har en entydig positiv kvadratrot.

Bevis: Antag att $T \in L(V)$ är positiv. Låt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ vara de olika egenvärden till T. Sats 6.18 ger att varje $\lambda_j \geq 0$.
Nu gäller

(*)
$$V = N(T-\lambda_1 I) \oplus \ldots\ldots \oplus N(T-\lambda_m I)$$

Detta inses på följande sätt: Spektralsatsen 6.11 ger att V har en ortonormerad bas som består av egenvektorer till T. Således kan varje vektor i V skrivas som en linjärkombination av egenvektorer till T. Alltså

$$V = N(T-\lambda_1 I) + \ldots\ldots + N(T-\lambda_m I).$$

För att visa att denna summa är en direktsumma antar vi att $0 = u_1 + \ldots + u_m$, där varje $u_j \in N(T-\lambda_j I)$.
Enligt Sats 4.1 är $u_1, \ldots, u_m$ linjärt oberoende, varför alla $u_j = 0$. Således är summan direkt enligt Sats 1.4.
Sats 6.18 ger att det existerar en positiv operator $S \in L(V)$ med $S^2 = T$, dvs. en positiv kvadratrot till T.
Antag att α är ett egenvärde till S. Om $v \in N(S-\alpha I)$ så är

$Su = \alpha u$, vilket implicerar att $Tu = S^2u = \alpha^2 u$, dvs. $u \in N(T-\alpha^2 I)$. Alltså $N(S-\alpha I) \subseteq N(T-\alpha^2 I)$. Således är α^2 ett egenvärde till T, vilket betyder att $\alpha^2 = \lambda_j$ för något j. Alltså $\alpha = \sqrt{\lambda_j} \geq 0$ för något j. Därför är

(**) $$N(S-\sqrt{\lambda_j} I) \subseteq N(T-\lambda_j I).$$

Ovan visade vi att endast $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_m}$ kan vara egenvärden till S. Då S är självadjungerad ger Sats 6.1 som ovan att

(***) $$V = N(S-\sqrt{\lambda_1} I) \oplus \ldots \oplus N(S-\sqrt{\lambda_m} I).$$

Nu ger (*), (**) och (***) att $N(S-\sqrt{\lambda_j} I) = N(T-\lambda_j I)$ för alla j. Med andra ord, på $N(T-\lambda_j I)$ är operatorn S multiplikation med $\sqrt{\lambda_j}$. Således är S, den positiva kvadratroten till T, entydigt bestämd av T.

Om T är en positiv operator, så betecknar vi den entydigt bestämda positiva kvadratroten av T med $\sqrt{T}$.

Isometrier

En operator $S \in L(V)$ kallas en *isometri*, om $\|Su\| = \|u\|$ $\forall u \in V$. Med andra ord, en operator är en isometri om den bibehåller normen. Antag att $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ med $|\lambda_j| = 1$, $j=1,\ldots,n$, och att $S \in L(V)$ satisfierar $S(e_j) = \lambda_j e_j$ för någon ortonormerad bas $e_1, \ldots, e_n$ i V. Då gäller för $u \in V$ att

$$u = \langle u, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle u, e_n\rangle e_n$$

och

$$\|u\|^2 = |\langle u, e_1\rangle|^2 + \ldots + |\langle u, e_n\rangle|^2.$$

Nu fås $Su = \langle u, e_1\rangle Se_1 + \ldots + \langle u, e_n\rangle Se_n$. Emedan $|\lambda_j| = 1$ och $Se_j = \lambda_j e_j$ följer att

$$\|Su\|^2 = |\langle u, e_1\rangle|^2 + \ldots + |\langle u, e_n\rangle|^2 = \|u\|^2.$$

Alltså $\|Su\| = \|u\|$ för varje $u \in V$, dvs. S är en isometri.

Om $S \in L(V)$ är en isometri, så är S injektiv. Bevis: Antag att $Sx = 0$. Då är $\|x\| = \|Sx\| = 0$, dvs. $x = 0$. Således är varje isometri inverterbar enligt sats 2.11.

Sats 6.20 Låt $S \in L(V)$. Då är följande påståenden ekvivalenta:

(a) S är en isometri;

(b) $\langle Sx, Sy \rangle = \langle x, y \rangle$ för alla $x, y \in V$;

(c) $S^* S = I$;

(d) $Se_1, \dots, Se_n$ är ortonormerad då $e_1, \dots, e_n$ är ortonormerad i V;

(e) Det existerar en ortonormerad bas $e_1, \dots, e_n$ i V sådan att $Se_1, \dots, Se_n$ är ortonormerad;

(f) S^* är en isometri;

(g) $\langle S^*x, S^*y \rangle = \langle x, y \rangle$ för alla $x, y \in V$;

(h) $S S^* = I$;

(i) $S^*e_1, \dots, S^*e_n$ är ortonormerad då $e_1, \dots, e_n$ är ortonormerad i V;

(j) Det existerar en ortonormerad bas $e_1, \dots, e_n$ i V sådan att $S^*e_1, \dots, S^*e_n$ är ortonormerad.

Bevis: (a) $\Leftrightarrow$ (b) enligt Hemuppgift.

Antag (b) gäller. Då

$$\langle (S^*S - I)x, y \rangle = \langle Sx, Sy \rangle - \langle x, y \rangle = 0$$

för alla $x, y \in V$. Sätt $y = (S^*S - I)x$. Då fås att $S^*S - I = \Theta$, dvs. $S^*S = I$ och (c) gäller.

Antag att (c) gäller och att $e_1, \dots, e_n$ är ortonormerad mgd i V. Då fås $\langle Se_j, Se_k \rangle = \langle S^*Se_j, e_k \rangle = \langle e_j, e_k \rangle$.

Således är $Se_1, \ldots, Se_n$ ortonormerad och (d) gäller.
Klart att (d) $\Rightarrow$ (e).
Antag att (e) gäller. Låt $e_1, \ldots, e_n$ vara en ortonormerad bas i V så dan att $Se_1, \ldots, Se_n$ är ortonormerad. Om $x \in V$, så gäller

$$\|Sx\|^2 = \|S(\langle x,e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle x,e_n\rangle e_n)\|^2$$
$$= \|\langle x,e_1\rangle Se_1 + \ldots \ldots + \langle x,e_n\rangle Se_n\|^2$$
$$= |\langle x,e_1\rangle|^2 + \ldots\ldots\ldots + |\langle x,e_n\rangle|^2$$
$$= \|x\|^2 \text{ enligt sats 5.7.}$$

Alltså $\|Sx\| = \|x\|$ för alla $x \in V$. Alltså (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e). Genom att byta ut S mot S^* ser vi att (f) $\Leftrightarrow$ (g) $\Leftrightarrow$ (h) $\Leftrightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (j). Vi visar att (c) $\Leftrightarrow$ (h) och därmed är beviset klart. Antag först att $S^*S = I$. Då är S en isometri och således inverterbar. Alltså $S^* = S^{-1}$ varför $SS^* = I$. Om $SS^* = I$, så är S^* inverterbar, varför $S = (S^*)^{-1}$. Alltså $S^*S = S^*(S^*)^{-1} = I$.

Ovanstående sats visar att varje isometri är normal (se (a), (c) och (h) i sats 6.20). Således kan vi använda vår beskrivning av normala avbildningar för att ge en fullständig beskrivning av isometrier. Detta skall vi göra i följande två satser. Vi börjar med komplexa linjära rum.

Sats 6.21 Antag att V är ett komplext inre produktrum och låt $S \in L(V)$. Då är S en isometri om och endast om det existerar en ortonormerad bas i V bestående av egenvektorer till S vars alla motsvarande egenvärden har absolutbeloppet 1.

Bevis: I början av detta avsnitt visade vi redan att om det finns en

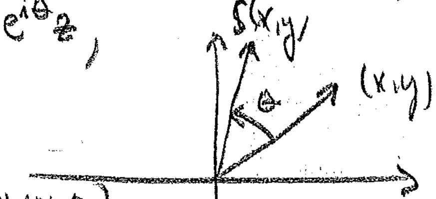
ortonormerad bas i V bestående av egenvektorer till S vars alla egenvärden har absolutbeloppet 1, då är S en isometri.
Omvänt, antag att S är en isometri. Enligt den komplexa spektralsatsen 6.14 existerar det en ortonormerad bas $e_1, \ldots, e_n$ i V bestående av egenvektorer till S. För $j \in \{1, \ldots, n\}$, låt λ_j vara egenvärdet svarande mot e_j. Då fås

$$|\lambda_j| = \|\lambda_j e_j\| = \|Se_j\| = \|e_j\| = 1.$$

Således har varje egenvärde till S absolutbeloppet 1, och satsen är bevisad.

Låt $\theta \in \mathbb{R}$, och låt $S \in L(\mathbb{R}^2)$ vara avbildningen som roterar moturs vinkeln θ kring origo (se exempel på sidan 39). Låt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Betrakta $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Då är $S(z) = e^{i\theta} z$,
dvs. $S(x,y) = (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(x+iy)$

$$= (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta).$$



Med $e_1 = (1,0)$ fås $Se_1 = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$ och med $e_2 = (0,1)$ fås $Se_2 = (-\sin\theta, \cos\theta) = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$. Alltså

$$M(S, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

i standardbasen $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ i $\mathbb{R}^2$. Klart att $\|S(x,y)\| = \|(x,y)\|$.

<u>Sats 6.22</u> Antag att V är ett reellt inre produktrum och $S \in L(V)$. Då är S en isometri om och endast om det existerar en ortonormerad bas i V med avseende på vilken S har en block diagonalmatris där varje block på diagonalen är en 1x1 matris innehållande 1 eller -1 eller en 2x2 matris av formen $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ med $\theta \in]0,\pi[$.

Bevis: Antag först att S är en isometri. Emedan S är normal, så finns en ortonormerad bas i V med avseende på vilken S har en block-diagonalmatris, där varje block är en 1×1 matris eller en 2×2 matris av formen 142

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{med } b>0 \text{ (Sats 6.17)}.$$

Om λ är ett element i en 1×1 matris längs diagonalen av matrisen $M(S)$ i ovannämnda bas, så existerar en basvektor e_j med $Se_j=\lambda e_j$. Då S är en isometri följer att $|\lambda|=1$, dvs. $\lambda=1$ eller $\lambda=-1$, ty dessa är de enda reella tal med absolutbeloppet 1.

Betrakta nu en 2×2 matris av formen $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b>0$, längs diagonalen av matrisen $M(S)$. Då existerar basvektorer e_j, e_{j+1} så att

$$Se_j = ae_j + be_{j+1}.$$

Således är $1=\|e_j\|^2=\|Se_j\|^2=a^2+b^2$. Denna ekvation tillsammans med villkoret $b>0$ ger att det finns ett $\theta\in]0,\pi[$ så att $a=\cos\theta$ och $b=\sin\theta$. Således är $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ och den ena implikationen är bevisad.

Omvänt, antag att det existerar en ortonormerad bas i V med avseende på vilken $M(S)$ har formen som krävs i satsen. Då existerar en direkt summauppdelning

$$V=U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_m,$$

där varje U_j är ett underrum av V med dimensionen 1 eller 2. Vidare gäller att vilka två vektorer som helst i olika U_j:n är ortogonala, och varje $S|_{U_j}$ är en isometri från U_j till U_j. Om $x\in V$, så kan vi skriva $x=y_1+\ldots+y_m$, där varje $y_j\in U_j$. Nu fås

$$\begin{aligned}\|Sx\|^2 &= \|Sy_1+\ldots+Sy_m\|^2=\|Sy_1\|^2+\ldots+\|Sy_m\|^2\\ &= \|y_1\|^2+\ldots+\|y_m\|^2=\|x\|^2,\end{aligned}$$

dvs. S är en isometri och satsen är i sin helhet bevisad.

Polära och singulärvärda uppdelningar

Vi kommer ihåg att det råder en viss analogi mellan $\mathbb{C}$ och $L(V)$. Under denna analogi, svarar ett komplext tal z mot en avbildning $T \in L(V)$ och $\bar{z}$ svarar mot T^*.
De reella talen svarar mot självadjungerade avbildningar och de icke-negativa talen mot (<u>dåligt namn</u>) de positiva avbildningarna. Enhetscirkeln i $\mathbb{C}$ är $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Villkoret $|z| = 1$ är ekvivalent med villkoret $\bar{z} z = 1$. Under vår analogi, svarar detta mot villkoret $T^* T = I$, vilket är ekvivalent med att T är en isometri. Med andra ord, enhetscirkeln i $\mathbb{C}$ svarar mot isometrier.

Om vi fortsätter med vår analogi, noterar vi att varje $z \in \mathbb{C}$ med $z \neq 0$ kan skrivas på formen

$$z = \left(\frac{z}{|z|}\right) |z| = \frac{z}{|z|} \sqrt{\bar{z} z},$$

där den första faktorn, dvs. $z/|z|$ är ett element på enhetscirkeln. Vår analogi leder oss till att gissa att varje avbildning $T \in L(V)$ kan skrivas som en isometri gånger $\sqrt{T^* T}$. Denna gissning är verkligen korrekt som vi nu skall visa.

<u>Sats 6.23</u> (Polär uppdelning) Om $T \in L(V)$, så existerar en isometri $S \in L(V)$ så att

$$T = S \sqrt{T^* T}.$$

<u>Bevis:</u> Antag att $T \in L(V)$. Om $x \in V$, så är

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^* T x, x \rangle = \langle \sqrt{T^* T} \sqrt{T^* T} x, x \rangle$$

enligt Sats 6.19, ty $T^* T$ är självadjungerad och $\langle T^* T x, x \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$ för alla $x \in V$. Sats 6.19 ger att $\sqrt{T^* T}$ är självadjungerad, varför

$$\|Tx\|^2 = \langle \sqrt{T^* T} x, \sqrt{T^* T} x \rangle = \|\sqrt{T^* T} x\|^2.$$

Antag $\|Tx\| = \|\sqrt{T^*T}x\|$ för alla $x \in V$.

Definiera en linjär avbildning $S_1 : \sqrt{T^*T}(V) \to T(V)$ genom

$$S_1(\sqrt{T^*T}x) = Tx, \quad x \in V.$$

Bevisets idé är nu att utvidga S_1 till en isometri $S \in L(V)$ så att $T = S\sqrt{T^*T}$.

Nu till detaljerna. Först bör vi kolla att S_1 är väldefinierad. Antag att $x_1, x_2 \in V$ och $\sqrt{T^*T}x_1 = \sqrt{T^*T}x_2$. Vi bör visa att $Tx_1 = Tx_2$. Nu gäller

$$0 = \|\sqrt{T^*T}(x_1 - x_2)\| \overset{\text{se ovan}}{=} \|T(x_1 - x_2)\| = \|Tx_1 - Tx_2\|,$$

varför $Tx_1 = Tx_2$. Vidare är det klart att S_1 är surjektiv. För godtyckligt $y \in \sqrt{T^*T}(V)$ gäller att $y = \sqrt{T^*T}x$ för något $x \in V$. Alltså

$$\|S_1 y\| = \|S_1(\sqrt{T^*T}x)\| = \|Tx\| = \|\sqrt{T^*T}x\| = \|y\|,$$

dvs. speciellt gäller att S_1 är injektiv. Enligt sats 2.3 fås att

$$\dim \sqrt{T^*T}(V) = \dim N(S_1) + \dim S_1(\sqrt{T^*T}(V))$$

$$= \dim T(V).$$

Från detta följer att $\dim(\sqrt{T^*T}(V))^\perp = \dim T(V)^\perp$. Således kan vi välja ortonormerade baser $e_1, \dots, e_m$ i $(\sqrt{T^*T}(V))^\perp$ och $f_1, \dots, f_m$ i $T(V)^\perp$ med samma antal vektorer.

Nu definierar vi en linjär avbildning $S_2 : (\sqrt{T^*T}(V))^\perp \to T(V)^\perp$ genom

$$S_2(c_1e_1 + \dots + c_me_m) = c_1f_1 + \dots + c_mf_m.$$

Speciellt gäller att $S_2(e_j) = f_j$ för varje $j = 1, \dots, m$.

Pythagoras sats ger att $\|S_2 z\| = \|z\|$ för alla $z \in (\sqrt{T^*T}(V))^\perp$.
Slutligen definiera en linjär avbildning $S \in L(V)$ genom

$$S(y+z) = S_1 y + S_2 z,$$

där $y \in \sqrt{T^*T}(V)$ och $z \in \sqrt{T^*T}(V)^\perp$. Notera att $V = \sqrt{T^*T}(V) \oplus (\sqrt{T^*T}(V))^\perp$.
Om $x \in V$, så är

$$S(\sqrt{T^*T}x) = S_1(\sqrt{T^*T}x) = Tx,$$

varför $T = S\sqrt{T^*T}$. Det återstår endast att visa att S är en isometri. Tag $x \in V$. Då är $x = y + z$, där $y \in \sqrt{T^*T}(V)$ och $z \in (\sqrt{T^*T}(V))^\perp$.
Alltså

$$\|Sx\|^2 = \|S(y+z)\|^2 = \|S_1 y\|^2 + \|S_2 z\|^2$$
$$= \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$$

enligt Pythagoras sats. Därmed är satsen bevisad.

Polära uppdelningen i Sats 6.23 säger att varje linjär avbildning på V är en sammansättning (produkt) av en isometri och en positiv avbildning. Således kan vi framställa varje linjär avbildning på V som en sammansättning av två linjära avbildningar vilka båda tillhör klasser som vi beskrivit fullständigt och förstår ganska bra. Antag alltså att $T = S\sqrt{T^*T}$ är polära uppdelningen av $T \in L(V)$, där S är en isometri. Då finns det en ortonormerad bas i V med avseende på vilken S har en diagonalmatris då $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (Sats 6.21) eller en block diagonalmatris med block vars storlek högst är 2×2 då $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (Sats 6.22) och vidare finns det (eventuellt en annan) en ortonormerad bas med avseende på vilken $\sqrt{T^*T}$ har en diagonalmatris (Sats 6.11).

Med andra ord, S kräver en ortonormerad bas och $\sqrt{T^*T}$ kan kräva en annan ortonormerad bas.

Antag att $T \in L(V)$. Singulära värdena till T definieras som egenvärdena till den positiva operatorn $\sqrt{T^*T}$, där varje egenvärde λ upprepas $\dim N(\sqrt{T^*T} - \lambda I)$ gånger. Egenvärdena till $\sqrt{T^*T}$ är reella och icke-negativa.

Till exempel, låt $T \in L(\mathbb{K}^3)$ vara definierad genom

$$T(z_1, z_2, z_3) = (0, 3z_1, 2z_2).$$

Betrakta $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ och $e_3 = (0,0,1)$ i $\mathbb{K}^3$. Nu gäller

$$(0, 3z_1, 2z_2) = 0 \cdot e_1 + 3z_1 \cdot e_2 + 2z_2 \cdot e_3$$

varför

$$Te_1 = (0,3,0) = 0 \cdot e_1 + 3e_2 + 0 \cdot e_3$$
$$Te_2 = (0,0,2) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 2e_3$$
$$Te_3 = (0,0,0) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$

dvs.

$$M(T, e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Alltså

$$M(T^*, e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$M(T^*T, e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Således är $T^*T(z_1, z_2, z_3) = (9z_1, 4z_2, 0)$, och

$$\sqrt{T^*T}(z_1, z_2, z_3) = (3z_1, 2z_2, 0).$$

Egenvärdena till $\sqrt{T^*T}$ är 3, 2, 0. Således är de singulära värdena till T just 3, 2, 0.

Varje $T \in L(V)$ har dim V singulära värden ty egenvärdena till $\sqrt{T^*T}$ upprepas enligt multiplicitet. Singulärvärdena är alltid icke-negativa emedan de utgör egenvärden till en positiv operator.

Följande resultat visar att varje operator har en "trevlig" uppdelning i termer av dess singulära värden och två ortonormerade baser i V. Beviset illustrerar en "vacker" tillämpning av den polära uppdelningen.

<u>Sats 6.24</u> (Singulärvärdesuppdelningen) Antag att $T \in L(V)$ har singulärvärdena $s_1, \dots, s_n$. Då existerar det två ortonormerade baser $e_1, \dots, e_n$ och $f_1, \dots, f_n$ i V sådana att

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n$$

för varje $v \in V$.

<u>Bevis:</u> Enligt spektralsatsen 6.11 finns det en ortonormerad bas $e_1, \dots, e_n$ i V så att

$$\sqrt{T^*T}\, e_j = s_j e_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Vi får $v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$ för alla $v \in V$.
Vi opererar med $\sqrt{T^*T}$ på båda sidorna och får

$$\sqrt{T^*T}\, v = s_1 \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + s_n \langle v, e_n \rangle e_n,$$

för varje $v \in V$. Polära uppdelningen ger att det finns en isometri $S \in L(V)$ sådan att $T = S\sqrt{T^*T}$. Nu följer att

$$Tv = S(\sqrt{T^*T}v) = s_1\langle v, e_1\rangle Se_1 + \dots + s_n\langle v, e_n\rangle Se_n,$$

för varje $v \in V$. Sätt $f_j = Se_j$ för varje j. Emedan S är en isometri ger Sats 6.20 att $f_1, \dots, f_n$ är en ortonormerad bas i V. Ovanstående ekvation kan nu skrivas

$$Tv = s_1\langle v, e_1\rangle f_1 + \dots + s_n\langle v, e_n\rangle f_n,$$

för varje $v \in V$ och beviset är klart.

När vi arbetar med linjära avbildningar mellan olika vektorrum, så erhåller vi en matrisframställning med avseende på någon bas i startrummet och på någon bas i målrummet. Då man behandlar linjära avbildningar mellan samma vektorrum dvs. operatorer, använder vi nästan alltid bara en bas som man låter spela båda rollerna.

Ovanstående singulära värdesuppdelning ger oss en möjlighet att använda två olika baser för en matrisframställning av en operator $T \in L(V)$. Låt $s_1, \dots, s_n$ beteckna de singulära värdena för T och låt $e_1, \dots, e_n$ samt $f_1, \dots, f_n$ vara ortonormerade baser i V sådana att singulärvärdesuppdelningen

$$Tv = s_1\langle v, e_1\rangle f_1 + \dots + s_n\langle v, e_n\rangle f_n$$

gäller för alla $v \in V$. Då är

$$Te_j = s_j\langle e_j, e_j\rangle f_j = s_j f_j \quad \text{för alla } j = 1, \dots, n,$$

dvs.

$$M(T, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n) = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & s_n \end{pmatrix}$$

Med andra ord, varje operator på V har en diagonalmatris med avseende på några ortonormerade baser i V, under förutsättning att vi tillåts använda <u>två olika baser</u> istället för <u>en enda bas</u> påsom det är vanligt att göra då man arbetar med operatorer på <u>ett</u> vektorrum.

<u>Exempel</u> Antag att $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$ och att T_1 och T_2 har samma singulära värden $s_1, \dots, s_n$. Visa att det finns isometrier S_1 och S_2 sådana att $T_1 = S_1 T_2 S_2$.

För $T_1 \in \mathcal{L}(V)$ finns det ortonormerade baser $e_1, \dots, e_n$ och $f_1, \dots, f_n$ sådana att

$$T_1 v = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n \text{ för varje } v \in V$$

För $T_2 \in \mathcal{L}(V)$ existerar det ortonormerade baser $g_1, \dots, g_n$ och $h_1, \dots, h_n$ sådana att

$$T_2 v = s_1 \langle v, g_1 \rangle h_1 + \dots + s_n \langle v, g_n \rangle h_n \text{ för varje } v \in V.$$

Nu definierar vi $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V)$ genom

$$S_1(c_1 h_1 + \dots + c_n h_n) = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$$

och

$$S_2(c_1 e_1 + \dots + c_n e_n) = c_1 g_1 + \dots + c_n g_n, \text{ där } c_j \in \mathbb{F}, j = 1, \dots, n.$$

Antag nu att T är en normal operator, $T^*T = TT^*$.

Sats 6.23 ger att $T = S\sqrt{T^*T}$, där $S \in \mathcal{L}(V)$ är en isometri.

Eftersom T är normal får

$$(\sqrt{T^*T})^2 = T^*T = TT^* = S\sqrt{T^*T}\,(S\sqrt{T^*T})^*$$
$$= S\sqrt{T^*T}\sqrt{T^*T}\,S^* = (S\sqrt{T^*T}S^*)^2 \quad , \text{ty } S^*S = I.$$

Vidare gäller

$\langle S\sqrt{T^*T}S^*v, v\rangle = \langle \sqrt{T^*T}S^*v, S^*v\rangle \geq 0 \;\forall v \in V$, ty $\sqrt{T^*T}$ är positiv, och

$(S\sqrt{T^*T}S^*)^* = S\sqrt{T^*T}S^*$, så

$S\sqrt{T^*T}S^*$ är en positiv operator. Vi vet att den positiva kvadratroten av T^*T är entydigt bestämd, varför

$$\sqrt{T^*T} = S\sqrt{T^*T}S^*.$$

Detta ger att $\sqrt{T^*T}\,S = S\sqrt{T^*T}S^*S = S\sqrt{T^*T} = T$.

vilket $T^* = \sqrt{T^*T}\,S^* = \sqrt{T^*T}\,SS^*S^* = TS^*S^* = TU$,

där $U = (S^*)^2 \in \mathcal{L}(V)$.

Vi bör ännu visa att U är en isometri. Tag $v \in V$. Nu gäller

$$\|Uv\| = \|S^*S^*v\| \overset{S^* \text{ är en isometri}}{=} \|S^*v\| = \|v\|.$$

U är isometri och $T^* = TU$.

AMBi

Då är $S_1 h_j = f_j$ och $S_2 e_j = g_j$ för $j=1,\dots,n$.

Vidare gäller

$$\|S_1(c_1h_1+\dots+c_nh_n)\|^2 = \|c_1f_1+\dots+c_nf_n\|^2 = |c_1|^2+\dots+|c_n|^2$$
$$= \|c_1h_1+\dots+c_nh_n\|^2.$$

Således är $S_1 \in \mathcal{L}(V)$ en isometri. Analogt visas att $S_2 \in \mathcal{L}(V)$ är en isometri. Då S_2 är en isometri följer att $S_2S_2^* = S_2^*S_2 = I$ (Sats 6.20). Alltså $S_2^* = S_2^{-1}$, så $S_2^* g_j = S_2^{-1} g_j = e_j$ för $j=1,\dots,n$.

För varje $v \in V$ gäller

$$T_2(S_2 v) = \lambda_1 \langle S_2v, g_1\rangle h_1 + \dots + \lambda_n \langle S_2 v, g_n\rangle h_n$$
$$= \lambda_1 \langle v, S_2^* g_1\rangle h_1 + \dots + \lambda_n \langle v, S_2^* g_n\rangle h_n$$
$$= \lambda_1 \langle v, e_1\rangle h_1 + \dots + \lambda_n \langle v, e_n\rangle h_n,$$

och vidare att

$$S_1(T_2S_2v) = \lambda_1\langle v, e_1\rangle S_1h_1 + \dots + \lambda_n\langle v, e_n\rangle S_1 h_n$$
$$= \lambda_1\langle v, e_1\rangle f_1 + \dots + \lambda_n \langle v, e_n\rangle f_n = T_1 v.$$

Alltså $S_1T_2S_2 = T_1$.

<u>Exempel</u> Låt $T \in \mathcal{L}(V)$. Visa att $T \in \mathcal{L}(V)$ är normal om och endast om det finns en isometri $U \in \mathcal{L}(V)$ sådan att $T^* = TU$.

Antag först att det finns en isometri $U \in \mathcal{L}(V)$ med $T^* = TU$. Eftersom $U^*U = I$ följer $T^*U^* = TUU^* = T$. Således fås

$$T^*T = TUT = T(UT)^{**} = T(T^*U^*)^* = TT^*.$$