Inledning

Linjär algebra och matristeori är i huvudsak synonyma termer för ett område inom matematiken som har blivit ett mycket användbart redskap inom ett flertal ämnesområden. Därför utgör linjära algebran och matristeorin en viktig del av den matematiska bakgrund som krävs av ingenjörer, fysiker och andra vetenskapsidkare.

Denna kurs baserar sig på kursen Matriser. Vi börjar med att studera linjära rum och linjära avbildningar. Vidare behandlar vi egenvärden och egenvektorer samt ger villkor för att en linjär avbildning kan framställas som en diagonalmatris. Detta leder naturligt till kanoniska former, speciellt kommer vi att studera Jordans kanoniska form. Vi studerar också vektorrum med inre produkt och normerade rum.

1. Vektorrum

Motivationen till definitionen av ett vektorrum kommer från de viktiga räknelagar som addition och multiplikation med skalär följer i $\mathbb{R}^n$.

Vektorrum

Definition Ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{K}$ är en icke-tom mängd, vars element kan adderas och multipliceras med skalär, dvs. med element i kroppen $\mathbb{K}$, på ett sådant sätt att

(α) summan $u+v \in V$ då $u, v \in V$,

(β) produkten $\alpha u \in V$ då $u \in V$ och $\alpha \in \mathbb{K}$,

(γ) V innehåller ett speciellt element 0, kallat nollvektorn,

(δ) till varje $v \in V$ hör ~~ett~~ $-v \in V$,

(ε) följande räkneregler är uppfyllda för alla $u, v, w \in V$ och alla $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

(i) $u+v = v+u$

(ii) $u+(v+w) = (u+v)+w$

(iii) $v+0 = v$

(iv) $v+(-v) = 0$

(v) $1v = v$

(vi) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

(vii) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$

(viii) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

Elementen i ett vektorrum kallas vektorer.

I stället för vektorrum säger man också **linjärt rum**. Om den underliggande skalärkroppen är $\mathbb{R}$ säger vi att V är ett **reellt vektorrum**, om skalärkroppen är $\mathbb{C}$ säger vi att V är ett **komplext vektorrum**.

Notera att axiomen (ii) och (vi) betyder att summan och multiplikation med skalär fortfarande hålls i rummet ifråga. Man skriver $u-v$ istället för $u+(-v)$ och kallar $u-v$ **differensen** av vektorerna u och v.

Vi skall strax ge ett antal konkreta exempel på vektorrum, men först redovisar vi några konsekvenser av räknereglerna ovan.

Lemma 1.1 Låt V vara ett vektorrum. För alla $v \in V$ och alla $\alpha \in K$ är

(a) $0v = 0$

(b) $\alpha 0 = 0$

Bevis (a) Genom att i tur och ordning utnyttja räknereglerna (iii), (iv), (ii), (v), (vii), (v) och (iv) får vi

$$\begin{aligned} 0v &= 0v + 0 = 0v + (v - v) = (0v + v) - v \\ &= (0v + 1v) - v = (0+1)v - v = 1v - v \\ &= v - v = 0. \end{aligned}$$

(b) På grund av (a) är $0 \cdot 0 = 0$. Med hjälp av (vi) får vi $\alpha 0 = \alpha(00) = (\alpha 0)0 = 00 = 0$.

Observera att nollvektorn 0 är entydig, ty om 0' är en annan vektor som uppfyller (iii), så följer $0' = 0' + 0 = 0$.

Lemma 1.2 För $v \in V$ gäller att $-v = (-1)v$. Speciellt följer att vektorn $-v$ är entydigt bestämd av v.

Bevis: Genom att i tur och ordning utnyttja (iii), (iv), (ii), (v), (vii), Lemma 1.1.(a), (v), (vii) och (v) får vi

$$
\begin{aligned}
(-1)v &= (-1)v + 0 = (-1)v + (v - v) = ((-1)v + v) - v \\
&= ((-1)v + 1v) - v = (-1+1)v - v = 0v - v \\
&= 0 - v = 0(-v) + 1(-v) = (0+1)(-v) \\
&= 1(-v) = -v.
\end{aligned}
$$

Lemma 1.3 Ekvationen $x + u = v$, där u och v är vektorer i vektorrummet V, har en entydig lösning $x = v - u$.

Bevis: Addera $-u$ till båda sidorna och utnyttja räknereglerna (ii), (iii) och (iv). Detta ger $x = v - u$. Omvänt följer genom insättning att $(v-u) + u = v + (-u+u) = v + (u-u) = v + 0 = v$.

Exempel

Vi ger nu exempel på vektorrum. I samtliga fall är det lätt att verifiera att villkoren (a) - (ε) är uppfyllda och verifikationen överlämnas åt läsaren.

(a) Mängden av alla reella n-tiplar,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n\}$$

med räknereglerna

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

är ett vektorrum över $\mathbb{R}$.

(b) Låt $C(\mathbb{K}) = \{f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ kontinuerlig}\}$, där $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Då är $C(\mathbb{K})$ ett vektorrum över $\mathbb{K}$, om man definierar

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{för alla } x \in \mathbb{K},$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \text{för alla } x, \alpha \in \mathbb{K}.$$

(c) Låt $P(\mathbb{K})$ vara mgden av alla polynom med koefficienter i $\mathbb{K}$. Då är $P(\mathbb{K})$ ett vektorrum över $\mathbb{K}$ med avseende på operationerna

$$(p+q)(z) = p(z) + q(z) \quad \text{för } z \in \mathbb{K},$$
$$(\alpha p)(z) = \alpha p(z) \quad \text{för } z \in \mathbb{K}, \alpha \in \mathbb{K}.$$

Om $p \in P(\mathbb{K})$, så kan p skrivas som

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \quad a_i, z \in \mathbb{K}, i = 0, \ldots, n.$$

(d) Mängden $\mathbb{C}^n$ av alla komplexa n-tiplar

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n\}$$

utgör ett vektorrum över $\mathbb{C}$, om addition och multiplikation med skalär definieras genom

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n)$$

$$\alpha(z_1, \dots, z_n) = (\alpha z_1, \dots, \alpha z_n).$$

(e) Låt oss nu betrakta mängden

$$U = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 + x_2 = 2\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Definierar vi addition och multiplikation med skalär som ovan ser vi, att U __inte__ är ett vektorrum, ty de definierade operationerna för ut ur mängden. T.ex. är $x = (2,0)$ och $y = (0,2)$ element i U, men deras summa $x + y = (2,2) \notin U$.

__Underrum__

Vi betraktar ett vektorrum V över kroppen $\mathbb{K}$ och låter $U \neq \emptyset$ vara en delmängd av V. Om $x + y \in U$ och $\alpha x \in U$ för varje par $x, y \in U$ och varje $\alpha \in \mathbb{K}$, sägs U vara ett __underrum__ i V.

Varje underrum U i V är självt ett vektorrum (med de operationer som definierats i V). Genom att välja $\alpha = 0$ ser vi nämligen att $0 \in U$. Eftersom de återstående axiomen/räknereglerna gäller för alla element i V är de speciellt uppfyllda för alla element i delmängden U.

Exempel (a) Om U_1 och U_2 är underrum i V, så är $U_1 \cap U_2$ också ett underrum.

(b) Unionen $U_1 \cup U_2$ av två underrum är däremot inte i allmänhet självt ett underrum. Betrakta t.ex. följande delmängder av $\mathbb{R}^2$:

$$U_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}, \quad U_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}.$$

Då är U_1 och U_2 underrum i $\mathbb{R}^2$. Elementet $(0,1) \in U_1 \subseteq U_1 \cup U_2$ och elementet $(1,0) \in U_2 \subseteq U_1 \cup U_2$. Deras summa $(1,1) \notin U_1$ och $(1,1) \notin U_2$ och således $(1,1) \notin U_1 \cup U_2$.

(c) Betrakta $P_n(\mathbb{R})$, som består av alla polynom med koefficienter i $\mathbb{R}$ av grad $\leq n$. Då är $P_n(\mathbb{R})$ ett underrum av $P(\mathbb{R})$.

Summor och direkta summor

Antag att $U_1, U_2, \ldots, U_n$ är underrum av vektorrummet V. Med summan $U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ av underrummen avses mängden av alla möjliga summor av elementen i $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Mera exakt,

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \{u_1 + u_2 + \ldots + u_n : u_i \in U_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Det är lätt att visa att $U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ är det minsta underrummet av V som innehåller $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

Låt $U_1, U_2, \ldots, U_n$ vara underrum av V sådana att
$$V = U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$
Då kan varje element i V skrivas på formen
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$
för varje $u_j \in U_j$, $j = 1, \ldots, n$. Vi är speciellt intresserade av det fall då varje vektor i V entydigt kan framställas i ovanstående form.
Vi säger att V är direkta summan av underrummen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ och betecknar $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$, om varje element i V entydigt kan skrivas som summan $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, för varje $u_j \in U_j$.

Exempel Låt $C_J(\mathbb{R})$ och $C_U(\mathbb{R})$ beteckna vektorrummen av alla jämna resp. udda kontinuerliga funktioner, dvs. $C_J(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ och $C_U(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$. Då gäller att $C(\mathbb{R}) = C_J(\mathbb{R}) \oplus C_U(\mathbb{R})$.

För att visa detta använder vi följande resultat.

Sats 1.4 Låt $U_1, U_2, \ldots, U_n$ vara underrum av V. Då gäller att $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$ om och endast om följande villkor gäller

(a) $V = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$;

(b) nollvektorn 0 kan endast skrivas som en summa $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, där varje $u_j \in U_j$, genom att välja alla u_j till 0.

Bevis: Antag först att $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$. Klart att (a) gäller. För att visa (b), antag att $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$ och

$$0 = u_1 + \ldots + u_n.$$

Emedan $0 = 0 + \ldots + 0$ och $0 \in U_1, \ldots, 0 \in U_n$ så ger entydigheten att varje $u_j = 0$.

Omvänt, antag att (a) och (b) gäller. Låt $v \in V$. Enligt (a) kan vi skriva

$$v = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

för något $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \ldots, u_n \in U_n$. För att visa att denna framställning är entydig, antar vi att vi också har

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n,$$

där $v_1 \in U_1, \ldots, v_n \in U_n$. Subtraktion ger då

$$0 = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \ldots + (u_n - v_n).$$

Klart att $u_1 - v_1 \in U_1, u_2 - v_2 \in U_2, \ldots, u_n - v_n \in U_n$, så (b) ger att $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$.

Låt oss nu återgå till vårt exempel.
Antag att $g + h = 0$, där g är jämn och h är udda. Då är $g = -h$ både jämn och udda. Men den enda funktion som är både udda och jämn är nollfunktionen, så slutsatsen är att $g = h = 0$. Alltså gäller (b) i Sats 1.4.

Tag en godtycklig funktion $f \in C(\mathbb{R})$.
Sätt $f_j(t) = \frac{1}{2}(f(t)+f(-t))$ och $f_u(t) = \frac{1}{2}(f(t)-f(-t))$.
Då är $f_j(-t) = \frac{1}{2}(f(-t)+f(t)) = f_j(t)$ och $f_u(-t) = \frac{1}{2}(f(-t)-f(t))$
$= -f_u(t)$ samt $f_j + f_u = f$, så gäller (a) i Sats 1.4.

<u>Sats 1.5</u> Antag att U och W är underrum av V. Då är $V = U \oplus W$ om och endast om $V = U + W$ och $U \cap W = \{0\}$.

<u>Bevis:</u> Antag först att $V = U \oplus W$. Då är $V = U + W$. Vidare, om $v \in U \cap W$, så är $0 = v + (-v)$, där $v \in U$ och $-v \in W$. Entydigheten av framställningen ger $v = 0$. Alltså $U \cap V \subseteq \{0\}$ och därmed $U \cap V = \{0\}$.

Omvänt, antag att $V = U + W$ och $U \cap W = \{0\}$.
Antag att

$$0 = u + w,$$

där $u \in U$, $w \in W$. Då är $u = -w \in W$ och $u \in U \cap W$, varför $u = 0$. Vidare fås att $w = 0$.
Nu ger Sats 1.4 att $V = U \oplus W$.

Linjärt oberoende

Vektorerna $x_1, \dots, x_n$ i ett linjärt rum V över kroppen $\mathbb{K}$ sägs vara linjärt beroende, om det finns tal $c_1, \dots, c_n$ i $\mathbb{K}$, som alla inte är noll och som är sådana att

$$c_1 x_1 + \dots \dots + c_n x_n = 0.$$

Att vektorerna $x_1, \dots, x_n$ inte är linjärt beroende innebär, att ekvationen

$$c_1 x_1 + \dots \dots + c_n x_n = 0$$

är uppfylld endast för $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Vi säger i detta fall att vektorerna är linjärt oberoende.

Exempel (a) Polynomen $p(t) = t$ och $q(t) = t^2$ är linjärt oberoende ty ingen linjär kombination $c_1 t + c_2 t^2$ ger polynomet som är identiskt noll om inte $c_1 = c_2 = 0$.

(b) Polynomen $t + 2t^2, t, t^2$, däremot, är linjärt beroende, ty $t + 2t^2$ kan skrivas som en linjär kombination av t och t^2.

Lemma 1.6 Om bland vektorerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ i V en delmängd är linjärt beroende, så är alla vektorerna linjärt beroende.

Bevis: Antag att $x_1, x_2, \dots, x_k$, där $k < n$, är linjärt beroende. Detta innebär att det finns tal $d_1, \dots, d_k$, inte alla noll, så att

$$d_1 x_1 + \dots + d_k x_k = 0.$$

Sätter vi nu $c_j = d_j$, $j = 1, \dots, k$ och $c_j = 0$, $j = k+1, \dots, n$, får vi $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$, och något c_j (j mellan 1 och k) är skilt från noll.

Linjärkombinationer

Om en vektor u i ett linjärt rum V kan skrivas

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

där $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$, säger vi, att u är en linjärkombination av elementen $x_1, \dots, x_n$.

Lemma 1.7 Vektorerna $x_1, \dots, x_n$ är linjärt beroende då och endast då minst en av dem är en linjärkombination av de övriga.

Bevis: Om vektorerna $x_1, \dots, x_n$ är linjärt beroende, finns det skalärer $c_1, \dots, c_n$, sådana att

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$$

där minst ett, säg c_k, inte är noll. Då får

$$x_k = -\frac{c_1}{c_k}x_1 - \frac{c_2}{c_k}x_2 - \dots - \frac{c_n}{c_k}x_n,$$

där summan till höger saknar termen med index k. Alltså är x_k en linjärkombination av de övriga.

Omvänt, om en vektor, t.ex. x_1, är en linjärkombination av de övriga, dvs.

$$x_1 = c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

följer

$$x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n = 0.$$

Vektorerna är alltså linjärt beroende, ty åtminstone koefficienten för x_1 är ~~skild från~~ noll. Därmed är lemmat bevisat.

Lemma 1.7 innebär ingalunda att vilket som helst av elementen i en linjärt beroende mgd kan skrivas som en linjärkombination av de övriga utan endast att minst ett element kan skrivas så. Ibland är det dock möjligt att göra mera precisa uttalande om detta som nästa resultat visar.

Lemma 1.8 Antag att vektorerna $x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, \ldots, y_k$ är linjärt beroende, medan delmängden $x_1, \ldots, x_n$ är linjärt oberoende. Då kan något av elementen $y_1, \ldots, y_k$ skrivas som en linjärkombination av de övriga elementen av $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$.

Bevis: Enligt förutsättningen finns tal $c_1, \ldots, c_n$ och $d_1, \ldots, d_k$, som inte alla är noll och som är sådana, att

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + d_1 y_1 + \ldots + d_k y_k = 0.$$

Om alla talen d_j här vore lika med noll skulle följa att

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = 0$$

med något c_j, $j = 1, \ldots, n$, skilt från noll, och alltså vore mgden $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linjärt beroende, mot antagandet. Detta visar att minst en av koefficienterna d_j, $j = 1, \ldots, k$, är olika noll. Vi kan anta, att $d_1 \neq 0$. Då följer att

$$y_1 = -\frac{c_1}{d_1} x_1 - \ldots - \frac{c_n}{d_1} x_n - \frac{d_2}{d_1} y_2 - \ldots - \frac{d_k}{d_1} y_k.$$

Elementet y_1 är alltså en linjärkombination av de övriga elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_k$.

Linjärt hölje

Låt V vara ett linjärt rum över talkroppen $\mathbb{K}$ och M en delmgd av V. Vi betraktar mängden av alla (ändliga) linjärkombinationer av element i M och betecknar denna mgd med $[M]$:

$$[M] = \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \; x_j \in M, \; c_j \in \mathbb{K}, \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vi säger att $[M]$ utgör det *linjära höljet* till M. Det är tydligt

att om x och y är linjärkombinationer av element i M, så är också $x+y$ och αx sådana, och det linjära höljet $[M]$ är alltså ett underrum av V.
Om M består av ändligt många element $x_1, x_2, \ldots x_m$ använder vi beteckningen $[x_1, \ldots, x_m]$ för dess linjära hölje

Om en delmgd M av ett linjärt rum V har egenskapen, att varje element i V kan skrivas som en (ändlig) linjärkombination av element i M, så sägs M <u>spänna upp</u> (generera, alstra) rummet V.
Att M spänner upp V innebär alltså att $[M]=V$.
Om V har egenskapen, att V spänns upp av någon <u>ändlig</u> mgd av element i V, så sägs V vara <u>ändligt genererat</u>.

<u>Exempel</u> Till exempel linjära höljet av polynomen $1, z, z^2$ bildar underrummet $P_2(K)$, av mgden av polynom med koefficienter i K och av grad högst 2.

<u>Exempel</u> Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara n element i ett linjärt rum V, och antag att ett av dem t.ex. x_n är en linjär kombination av de övriga. Då förblir vektorernas linjära hölje oförändrat om denna vektor utelämnas, dvs.

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}] = [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n].$$

Med $x_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j$ följer nämligen

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i + d_n \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j = \sum_{i=1}^{n-1} (d_i + d_n c_i) x_i,$$

och varje linjärkombination av $x_1, \ldots, x_n$ kan alltså framställas som en linjärkombination av $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Bas och dimension

Varje vektor $x \in \mathbb{R}^2$ kan precis på ett sätt skrivas

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

där $e_1 = (1,0)$ och $e_2 = (0,1)$. Vi skall nu utvidga detta till begreppet bas i vektorrum.

Vi antar, att V är ett vektorrum, som spänns upp av de ändligt många elementen $x_1, \ldots, x_n$. Då kan varje $x \in V$ skrivas

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ,$$

men denna framställning är i allmänhet inte entydig.
Om $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är linjärt oberoende kan dock denna framställning ske på endast ett sätt. Om nämligen

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j$$

är två framställningar av x följer

$$0 = x - x = \sum_{j=1}^{n} (c_j - d_j) x_j ,$$

och alltså är $c_j = d_j$ för $j = 1, \ldots, n$, eftersom $x_1, \ldots, x_n$ är linjärt oberoende.

Definition Med en bas i ett linjärt rum V menar vi en linjärt oberoende, ändlig mängd, som spänner upp V.

Från denna definition får vi omedelbart följande sats.

<u>Sats 1.9</u> Om $x_1, \ldots, x_n$ är en bas i V, så finns till varje $x \in V$ en <u>entydigt</u> bestämd n-tipel av tal $(c_1, \ldots, c_n)$ med egenskapen

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Talen $(c_1, \ldots, c_n)$ säges utgöra <u>koordinaterna</u> för x i basen $x_1, \ldots, x_n$.

<u>Bevis:</u> Att varje $x \in V$ kan framställas som i satsen följer därav, att $x_1, \ldots, x_n$ spänner upp V. Att den är entydig är en följd av att $x_1, \ldots, x_n$ är linjärt oberoende.

Vi ställer vi oss två problem. För det <u>första</u> frågar vi oss om det finns en bas i varje linjärt rum och för det <u>andra</u> frågar vi oss om alla baser i ~~ett~~ visst rum alltid innehåller lika många element.

Vi börjar undersökningarna med följande lemma.

<u>Lemma 1.10</u> Om $x_1, \ldots, x_n$ är <u>linjärt oberoende</u> vektorer i ett linjärt rum V och om $y_1, \ldots, y_p$ är vektorer som spänner upp V, så är $p \geq n$.

<u>Bevis:</u> Lemmat säger alltså att om V innehåller n linjärt oberoende element, så kan inte V spännas upp av <u>färre</u> element än n. Det är ekvivalent att säga, att om V spänns upp av p element, så måste varje mgd av flera än p element vara linjärt beroende.

Eftersom $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ spänner upp V, gäller att

$$V = [y_1, y_2, \ldots, y_p].$$

Varje element i V och speciellt x_1 är alltså en linjärkombination av $y_1, \dots, y_p$. Härav följer, enligt exempel på sid. 13, att x_1 kan tillfogas utan att linjära höljet ändras, alltså att

$$[x_1, y_1, \dots, y_p] = [y_1, \dots, y_p].$$

Klart att mgden $M_1 = \{x_1, y_1, \dots, y_p\}$ är linjärt beroende. Eftersom $\{x_1\}$ är linjärt oberoende ger Lemma 1.8 att ngt y_j, $j = 1, \dots, p$, kan skrivas som en linjärkombination av övriga element i M_1 och enligt exempel på sid. 13 kan detta y_j utelämnas ur M_1 utan att mgden av linjärkombinationer ändras. Antar vi att y_1 är en linjärkombination av övriga element i M_1 har vi alltså visat att

$$V = [x_1, y_1, y_2, \dots, y_p] = [x_1, y_2, y_3, \dots, y_p].$$

Vi betraktar nu mgden $M_2 = \{x_1, x_2, y_2, \dots, y_p\}$. Med precis samma argument som ovan inser vi, att

$$[M_1] = [M_2] = V$$

och att M_2 är linjärt beroende. Eftersom $\{x_1, x_2\}$ är linjärt oberoende följer, fortfarande med samma argument som nyss, att ngt y_j, $j = 2, \dots, p$, är en linjärkombination av övriga element i M_2. Vi kan anta att detta gäller om y_2 och har då visat att

$$V = [x_1, x_2, y_2, y_3, \dots, y_p] = [x_1, x_2, y_3, \dots, y_p].$$

Det är tydligt att denna process kan fortsättas intill dess antingen alla x_j eller alla y_j är "förbrukade". Vore $p < n$ skulle vi efter precis p steg ha ersatt alla y_j med $x_1, x_2, \dots, x_p$ och alltså ha

$$V = [x_1, x_2, \dots, x_p].$$

Härav skulle då följa, att $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ vore linjärkombinationer av $x_1, \ldots, x_p$. Detta strider mot förutsättningen, att

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n\}$$

är linjärt oberoende och av denna motsägelse följer, att $p \geq n$, vilket bevisar lemmat.

<u>Sats 1.11</u> Om $x_1, \ldots, x_n$ och $y_1, \ldots, y_m$ är två baser för ett linjärt rum V, så är $n = m$.

Bevis: Emedan $\{x_1, \ldots, x_n\}$ är linjärt oberoende och $V = [y_1, \ldots, y_m]$, ger Lemma 1.10 att $m \geq n$. Men $\{y_1, \ldots, y_m\}$ är också linjärt oberoende och $V = [x_1, \ldots, x_n]$, varför $n \geq m$. Alltså $n = m$.

Vi skall nu visa, att det i ett <u>ändligt genererat</u> rum alltid går att finna en bas. Beviset för detta sker via följande hjälpresultat.

<u>Lemma 1.12</u> Om V är ett ändligt genererat linjärt rum och om

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

är en linjärt oberoende mgd i V, så kan M alltid <u>kompletteras</u> till en bas, dvs. om M ej redan utgör en bas i V, så finns element $y_1, \ldots, y_k$ i V sådana att

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$$

utgör en bas i V.

<u>Bevis:</u> Låt y vara ett godtyckligt element i V och betrakta mgden

$$N = \{x_1, \ldots, x_n, y\}.$$

Här kan nu två fall inträffa. Antingen är N för varje y i V en linjärt beroende mgd, eller är N för ngt y i V linjärt oberoende.

När N är linjärt beroende, är y en linjärkombination av $x_1, \ldots, x_n$ enligt Lemma 1.8.

Är N linjärt beroende för varje y i V kan alltså varje element i V skrivas som en linjärkombination av $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, d.v.s. denna mgd spänner upp V.

Eftersom den också förutsätts linjärt oberoende utgör den en bas.

Existensen av en bas är därmed visad i detta fall.

I motsatt fall finns ett y_1 i V, sådant att mgden

$$M_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1\}$$

är linjärt oberoende. För M_1 kan vi nu genomföra samma resonemang som vi nyss gjort för M: Om vi till M_1 fogar ett godtyckligt element $y \in V$, så är antingen

$$\{x_1, \ldots, x_n, y_1, y\}$$

linjärt beroende för varje $y \in V$, eller är det möjligt att finna ett $y_2 \in V$ för att

$$M_2 = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2\}$$

är linjärt oberoende. I det första fallet är M_1 en bas i V, och existensen av en bas är då säkerställd.

I det andra fallet fortsätter vi att betrakta M_2, som utgöres av M utökad med två element ur V, på samma sätt som vi tidigare undersökte M och M_1.

Vi fortsätter denna process steg för steg och når i varje steg antingen fram till en bas eller till en linjärt oberoende mgd, där antalet element ökats med ett.

Vi påstår nu, att denna process efter ett ändligt antal steg, säg k steg, måste leda till en mgd, som utgör en bas i V.

$$M_k = \{x_1, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k\}.$$

Vi förutsätter nämligen att V spänns upp av ett ändligt antal element:

$$V = [w_1, w_2, \dots, w_p],$$

och om mgden M_k är linjärt oberoende är enligt Lemma 1.10

$$n + k \leq p.$$

Talet $k \leq p - n$, och mgden M_k måste därför utgöra en bas i V för något $k \leq p-n$. Därmed är lemmat bevisat.

<u>Sats 1.13</u> Om V är ett ändligt genererat linjärt rum, som inte är nollrummet, så existerar en bas för V.

<u>Bevis:</u> Enligt antagandet finns ett element $x \neq 0$ i V. Eftersom $\{x\}$ är en linjärt oberoende mgd kan den enligt Lemma 1.12 kompletteras till en bas

<u>Exempel</u> Betrakta rummet K^n. Det är klart att $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ utgör en bas för K^n, som vi kallar för den <u>naturliga basen</u> i K^n.

Vi inför nu begreppet dimension.

<u>Definition</u> Med <u>dimensionen</u> av ett ändligt genererat linjärt rum V menar vi antalet element i en bas för V. Ett rum, som inte är ändligt genererat, sägs ha <u>oändlig dimension</u>. Härvid talar vi om <u>ändligtdimensionella</u> och <u>oändligtdimensionella</u> rum.

Om V har dimensionen n skriver vi

$$n = \dim V.$$

Detta tal n är bestämt av de två egenskaperna

i) det finns n linjärt oberoende element i V

ii) varje mgd av $n+1$ element i V är linjärt beroende.

Om $n = \dim V$ följer egenskapen i) därav, att varje bas är en linjärt oberoende mgd med n element; Varje mängd av $n+1$ element måste vidare vara linjärt beroende, ty eljest kunde den enligt Lemma 1.12 kompletteras till en bas, som alltså skulle innehålla minst $n+1$ element, i strid med definitionen av n och Sats 1.11. Således är också ii) uppfylld.

Låt omvänt $n \in \mathbb{N}$ som uppfyller i) och ii) samt $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ en linjärt oberoende mgd i V. För varje $y \in V$ är då $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y\}$ linjärt beroende enligt ii) och således är y en linjär kombination av $x_1, x_2, \ldots, x_n$ enligt Lemma 1.7. Den linjärt oberoende mgden $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ spänner alltså upp V, dvs. den utgör en bas och V är ett ändligt genererat rum med dimensionen n.

I överensstämmelse med denna karakterisering har tydligen nollrummet $\{0\}$ dimensionen 0.

<u>Exempel</u> Betrakta det linjära rummet

$$V = \{x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0, \text{ något } \alpha_k \neq 0\},$$

som utgör ett hyperplan i $\mathbb{R}^n$. Vi skall visa, att $\dim V = n-1$ genom att konstruera en bas i V.

Vi kan anta att $\alpha_1 \neq 0$. Eftersom $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$ är ekvivalent med (21)

$$x_1 = \sum_{k=2}^{n} \beta_k x_k ,$$

där $\beta_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_1}$ kan varje $x \in V$ skrivas

$$x = \left(\sum_{k=2}^{n} \beta_k x_k, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$$

$$= x_2(\beta_2, 1, 0, \ldots, 0) + x_3(\beta_3, 0, 1, 0 \ldots, 0) + \ldots + x_n(\beta_n, 0, \ldots, 1).$$

Elementen

$$\begin{aligned} e_2 &= (\beta_2, 1, 0, \ldots, 0) \\ e_3 &= (\beta_3, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (\beta_n, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

spänner alltså upp V. De är också linjärt oberoende, ty av

$$\sum_{k=2}^{n} c_k e_k = 0$$

följer

$$\left(\sum_{k=2}^{n} c_k \beta_k, c_2, c_3, \ldots, c_n\right) = (0, 0, \ldots, 0)$$

och alltså $c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$. Mgden $\{e_2, \ldots, e_n\}$ är alltså en bas för V och antalet element i basen är $n-1$.

Vi skall nu använda Lemma 1.12 till att bevisa följande viktiga resultat.

Sats 1.14 Antag att V är ändligtdimensionellt och U ett underrum av V. Då finns ett underrum W av U sådant att $V = U \oplus W$.

Bevis: Eftersom V är ändligtdimensionellt, så är också U ändligtdimensionellt. Således finns det en bas $\{u_1, \ldots, u_n\}$ i U. Då är $\{u_1, \ldots, u_n\}$ linjärt oberoende i V och enligt Lemma 1.12 kan den utvidgas till en bas $\{u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m\}$ i V. Sätt

$$W = [w_1, \ldots, w_m] \subseteq V.$$

För att visa att $V = U \oplus W$ bör vi visa att

$$V = U + W \text{ och } U \cap W = \{0\}.$$

Tag $v \in V$. Då finns $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in K$ så att

$$v = \underbrace{a_1u_1 + \ldots + a_nu_n}_{:= u \in U} + \underbrace{b_1w_1 + \ldots + b_mw_m}_{:= w \in W}.$$

Alltså $v = u + w$, där $u \in U$ och $w \in W$, dvs. $V = U + W$.

För att visa att $U \cap W = \{0\}$, tag $v \in U \cap W$. Då existerar det $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in K$ med

$$v = a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = b_1w_1 + \ldots + b_mw_m.$$

Alltså $a_1u_1+\dots+a_nu_n-b_1w_1-\dots-b_mw_m=0$. Emedan $\{u_1,\dots,u_n,w_1,\dots,w_m\}$ är linjärt oberoende, följer att $a_1=\dots=a_n=b_1=\dots=b_m=0$, varför $v=0$ och $U\cap W=\{0\}$.

__Sats 1.15__ Låt M_1 och M_2 vara två ändligt dimensionella underrum av V. Då gäller $\dim(M_1+M_2)=\dim M_1+\dim M_2-\dim(M_1\cap M_2)$.

__Bevis:__ Antag att $\dim M_1=m$, $\dim M_2=n$ och $\dim(M_1\cap M_2)=r$. Låt $\{y_1,\dots,y_r\}$ vara en bas för $M_1\cap M_2$. Enligt Lemma 1.12 kan denna bas utvidgas till en bas, säg $\{y_1,\dots,y_r,x_1,\dots,x_{m-r}\}$, i M_1 och en bas, säg $\{y_1,\dots,y_r,z_1,\dots,z_{n-r}\}$ i M_2. Sätt

$$M=\{y_1,\dots,y_r,x_1,\dots,x_{m-r},z_1,\dots,z_{n-r}\}.$$

Notera att M har exakt $m+n-r$ element. Således är satsen bevisad om vi kan visa att M är en bas för M_1+M_2. Klart att $[M]=M_1+M_2$. Det återstår att visa att M är linjärt oberoende. Antag att

$$(*)\qquad a_1y_1+\dots+a_ry_r+b_1x_1+\dots+b_{m-r}x_{m-r}+c_1z_1+\dots+c_{n-r}z_{n-r}=0,$$

där a_j,b_j,c_j är skalärer. Låt $y=a_1y_1+\dots+a_ry_r+b_1x_1+\dots+b_{m-r}x_{m-r}$. Då är $y=-c_1z_1-\dots-c_{n-r}z_{n-r}$, varför $y\in M_1$ och $y\in M_2$. Alltså $y\in M_1\cap M_2$. Emedan $\{y_1,\dots,y_r\}$ är en bas för $M_1\cap M_2$, fås att

$$y=\sum_{j=1}^{r}d_jy_j\quad,\text{ där } d_j \text{ är skalärer.}$$

Nu fås $d_1y_1+\dots+d_ry_r+c_1z_1+\dots+c_{n-r}z_{n-r}=0$. Men då $\{y_1,\dots,y_r,z_1,\dots,z_{n-r}\}$ är en bas i M_2 följer att $c_1=\dots=c_{n-r}=0$. Detta insatt i $(*)$ ger: $a_1y_1+\dots+a_ry_r+b_1x_1+\dots+b_{m-r}x_{m-r}=0$. Emedan elementen utgör en bas i M_1 följer att $a_1=\dots=a_r=0$ och $b_1=\dots=b_{m-r}=0$. Därmed är satsen bevisad.

Sats 1.15 ger direkt att

$$\dim(M_1 \oplus M_2) = \dim M_1 + \dim M_2.$$

Detta resultat gäller också för n stycken underrum $M_1, M_2, \ldots, M_n$, dvs.

$$\dim(M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim(M_i).$$

Som ett exempel gäller att

$$\mathbb{R}^n = [e_1] \oplus [e_2] \oplus \cdots \oplus [e_n],$$

där $e_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)$, och vi får

$$\dim \mathbb{R}^n = \sum_{i=1}^{n} \dim[e_i] = n.$$

<u>Sats 1.16</u> Antag att V är ett ändligt dimensionellt vektorrum och att $U_1, U_2, \ldots, U_n$ är underrum av V sådana att

(a) $$V = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

och

(b) $$\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 + \cdots + \dim U_n.$$

Då är $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$.

<u>Bevis:</u> Tag en bas för varje U_j. Enligt (a) spänner dessa baser tillsammans upp V och enligt (b) utgör denna sammanslagning av baserna en linjärt oberoende mängd i V, och därmed en bas i V.

Vi skall nu använda oss av Sats 1.4 (b).
Antag att $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$ är sådana att

$$0 = u_1 + \ldots + u_n.$$

Varje u_j kan skrivas som en linjär kombination av basvektorerna i U_j. Emedan basvektorerna i alla U_j tillsammans är linjärt oberoende i V, så följer att $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$.

2. Linjära avbildningar

Vi börjar nu undersökningen av linjära avbildningar.

Låt V och W vara två vektorrum över samma kropp K. En avbildning $T: V \to W$ kallas <u>linjär</u> om följande två villkor är uppfyllda för alla $u, v \in V$ och alla $\alpha \in K$:

(a) $T(u+v) = Tu + Tv$,

(b) $T(\alpha u) = \alpha Tu$.

Mängden av alla linjära avbildningar från V till W betecknar vi med $L(V,W)$.

Av (b) får vi speciellt genom att välja $\alpha = 0$ att $T(0)=0$. En linjär avbildning avbildar således nollvektorn i V på nollvektorn i W.

<u>Exempel</u> (a) $0 \in L(V,W)$, <u>nollavbildningen</u>, är definierad genom

$$0v = 0 \quad \text{för varje } v \in V.$$

(b) <u>Identiteten</u> $I \in L(V,V)$ är definierad genom

$$Iv = v \quad \text{för varje } v \in V.$$

(c) Betrakta $P_n(\mathbb{R})$, vektorrummet av polynom med koefficienter i $\mathbb{R}$ av grad $\le n$. Då definieras derivatan $D : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$ en avbildning, där $D(p) = \frac{dp}{dt}$ för varje $p \in P_n(\mathbb{R})$. Derivataavbildningen är linjär, ty enligt analysen gäller för varje $p, q \in P_n(\mathbb{R})$ och varje $\alpha \in \mathbb{R}$ att

$$\frac{d(p+q)}{dt} = \frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} \quad \text{och} \quad \frac{d(\alpha p)}{dt} = \alpha \frac{dp}{dt},$$

dvs. $D(p+q) = Dp + Dq$ och $D(\alpha p) = \alpha Dp$.

(d) Betrakta igen $P_n(\mathbb{R})$. Då definierar integralen, säg från a till b, en avbildning $I : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ som är definierad genom

$$I(p) = \int_a^b p(t)\,dt \quad \text{för varje } p \in P_n(\mathbb{R}).$$

Notera att denna avbildning antar värden i $\mathbb{R}$.
Denna avbildning är också linjär, ty

$$\int_a^b [p(t) + q(t)]\,dt = \int_a^b p(t)\,dt + \int_a^b q(t)\,dt \quad , \; p, q \in P_n(\mathbb{R})$$

och

$$\int_a^b \alpha\, p(t)\,dt = \alpha \int_a^b p(t)\,dt \quad , \; \alpha \in \mathbb{R},\; p \in P_n(\mathbb{R}),$$

dvs. $I(p+q) = I(p) + I(q)$ och $I(\alpha p) = \alpha I(p)$.

Vektorrummet $L(V,W)$

Om V och W är vektorrum, så kan $L(V,W)$ göras till ett vektorrum genom att definiera addition och multiplikation med skalär på $L(V,W)$.

För $S, T \in L(V,W)$ definierar vi avbildningen $S+T \in L(V,W)$ genom

$$(S+T)(x) = S(x) + T(x) \quad \text{för varje } x \in V.$$

Man visar lätt att $S+T \in L(V,W)$ samt att axiomen för addition är uppfyllda. Nollelementet ges av nollavbildningen $\theta(x) = 0$ för varje $x \in V$.

För $T \in L(V,W)$ och $\alpha \in \mathbb{K}$ definierar vi avbildningen $\alpha T \in L(V,W)$ genom

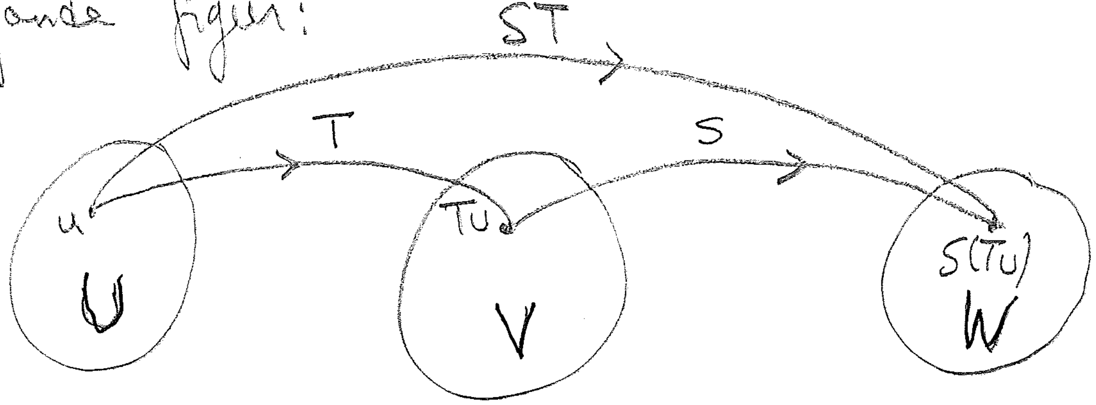
$$(\alpha T)(x) = \alpha\, T(x) \quad \text{för varje } x \in V.$$

Man visar lätt att $\alpha T \in L(V,W)$ och att axiomen för multiplikation med skalär är uppfyllda, liksom de övriga räknelagarna.
Därmed är $L(V,W)$ ett vektorrum.

Produkten av linjära avbildningar

U, V och W må vara vektorrum över $\mathbb{K}$. Låt $T \in L(U,V)$ och $S \in L(V,W)$. Då definieras <u>produkten</u> $ST \in L(U,W)$ genom $(ST)(u) = S(T(u))$ för varje $u \in U$.

Därmed utgör produkten ST den vanliga sammansättningen $S \circ T$ av funktionerna S och T. Det är lätt att visa att $ST \in L(U,W)$. Det kan ibland vara nyttigt att betrakta denna procedur geometriskt som i följande figur:



I allmänhet är produkten <u>inte</u> kommutativ. Låt exempelvis $T \in L(P(\mathbb{R}), P(\mathbb{R}))$ svara mot att derivera polynom och låt $S \in L(P(\mathbb{R}), P(\mathbb{R}))$ svara mot att multiplicera ett polynom med t^2. Då är

$$(ST)(p)(t) = S(T(p)(t)) \quad S(p'(t)) = t^2 p'(t)$$

och

$$(TS)(p)(t) = T(S(p)(t)) = T(t^2 p(t)) = $$
$$= 2t\, p(t) + t^2 p'(t).$$

<u>Nollrum och värderum</u>

Vi definierar <u>nollrummet</u> $N(T)$ till $T \in L(V,W)$ som mängden av alla element i V vilka av T avbildas på nollelementet i W,

$$N(T) = \{v \in V : Tv = 0\}.$$

Att mängden $N(T)$ är ett linjärt rum och alltså underrum av V är lätt att visa.

<u>Exempel</u>: Antag att $T \in L(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ definieras av $Tp = p'$ för varje $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Då är $N(T)$ mängden av konstanta funktioner på $\mathbb{R}$.

En avbildning $T \in L(V, W)$ kallas <u>injektiv</u> om för alla $u, v \in V$ gäller att $Tu = Tv$ medför att $u = v$.

På grund av lineariteten räcker det att visa att för varje $v \in V$ med $Tv = 0$ gäller att $v = 0$, då man visar att en linjär avbildning $T \in L(V, W)$ är injektiv.

<u>Sats 2.1</u> Låt $T \in L(V, W)$. Då är T injektiv om och endast om $N(T) = \{0\}$.

<u>Bevis</u>: Antag först att T är injektiv. Klart att $\{0\} \subseteq N(T)$. Låt $v \in N(T)$, dvs $Tv = 0 = T$ Nu följer att $v = 0$ emedan T är injektiv. Omvänt antag att $N(T) = \{0\}$. Låt $u, v \in V$ och $Tu = Tv$. Då gäller

$$T(u - v) = Tu - Tv = 0,$$

dvs. $u - v \in N(T) = \{0\}$. Alltså $u = v$.

<u>Värderummet</u> $R(T)$ för $T \in L(V,W)$ definieras som delmängden av W som består av alla vektorer Tv, $v \in V$,

$$R(T) = \{Tv : v \in V\}.$$

<u>Sats 2.2</u> Om $T \in L(V,W)$, så är $R(T)$ ett underrum av W.

<u>Bevis</u>: Hemuppgift.

En linjär avbildning $T \in L(V,W)$ kallas <u>surjektiv</u> om $R(T) = W$.

<u>Exempel</u> Avbildningen $T \in L(P(\mathbb{R}), P(\mathbb{R}))$, som definieras av $T(p) = p'$ för varje $p \in P(\mathbb{R})$, är surjektiv men inte injektiv. Tag $q \in P(\mathbb{R})$. Då finns ett polynom $p \in P(\mathbb{R})$ med $T(p) = p' = q$.

Följande resultat är av central betydelse:

<u>Sats 2.3</u> Låt $T \in L(V,W)$ och V ändligt dimensionellt vektorrum. Då är

$$\dim V = \dim N(T) + \dim R(T).$$

Bevis: Låt $n = \dim V$ och $q = \dim N(T)$. Då är $q \le n$.
Vidare må $\{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$ vara en bas i $N(T)$.
Antag $q < n$. Då kan $\{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$ utvidgas till en bas $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i hela V. (Lemma 1.12).

Påstående: Te_i, $i = q+1, \ldots, n$, är linjärt oberoende.

Antag att så ej är fallet; då existerar en linjär-kombination
$$0 = \sum_{i=q+1}^{n} c_i Te_i = T\left(\sum_{i=q+1}^{n} c_i e_i\right)$$
där inte alla $c_i \in K$ är noll. Alltså $\sum_{i=q+1}^{n} c_i e_i \in N(T)$.
Emedan $\{e_1, \ldots, e_q\}$ är en bas i $N(T)$, så existerar $d_1, \ldots, d_q \in K$ så att
$$\sum_{i=q+1}^{n} c_i e_i = \sum_{i=1}^{q} d_i e_i$$
eller $d_1 e_1 + \ldots + d_q e_q - c_{q+1} e_{q+1} - \ldots - c_n e_n = 0$.
Då $\{e_1, \ldots, e_n\}$ är en bas i V, följer att speciellt alla $c_i = 0$, vilket är en motsägelse. Alltså gäller påståendet.

Om vi ännu visar att Te_i, $i = q+1, \ldots, n$, är en bas för $R(T)$, så är satsen bevisad då $q < n$.
Tag godt. $v \in R(T)$. Då existerar $u \in V$ med $Tu = v$. Vi kan skriva $u \in V$ i formen
$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \text{ där } x_i \in K.$$

Nu gäller

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) = \sum_{i=q+1}^{n} x_i T(e_i), \text{ ty } e_i \in N(T), i=1,\ldots,q,$$

varför $R(T) = [T(e_{q+1}), \ldots, T(e_n)]$.

Om $q = n$, så är $R(T) = \{0\}$ och satsen är bevisad.

Korollarium 2.4 Om V, W är ändligtdimensionella vektorrum och $\dim V > \dim W$, så är ingen linjär avbildning $T \in L(V,W)$ injektiv.

Bevis: Enligt Sats 2.3 gäller

$$\dim N(T) = \dim V - \dim R(T)$$
$$\geq \dim V - \dim W > 0,$$

ty $\dim R(T) \leq \dim W$. Alltså $\dim N(T) > 0$, varför T ej är injektiv (Sats 2.1).

Korollarium 2.5 Om V, W är ändligtdimensionella vektorrum med $\dim V < \dim W$, så är ingen linjär avbildning $T \in L(V,W)$ surjektiv.

Bevis: Enligt Sats 2.3 gäller

$$\dim R(T) = \dim V - \dim N(T)$$
$$\leq \dim V < \dim W.$$

Då kan inte $R(T) = W$ gälla, dvs. T är inte surjektiv.

Ovanstående korollarier är viktiga inom teorin för linjära ekvationssystem:

Antag att vi har givet två positiva heltal m och n samt mn stycken skalärer $a_{j,k} \in \mathbb{K}$, där $j=1, \dots, m$ och $k=1, \dots, n$. Vi definiera avbildningen $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ genom

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1,k} x_k, \dots, \sum_{k=1}^{n} a_{m,k} x_k\right)$$

för varje vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Då är det lätt att visa att T är linjär, dvs. $T \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

Ekvationen $Tx = 0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^m$ kan då skrivas som ett <u>homogent system av linjära ekvationer</u>:

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1} x_1 + \dots + a_{m,n} x_n = 0. \end{cases}$$

Skalärerna $a_{j,k} \in \mathbb{K}$ är bekanta och vi söker lösningen $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ till ovanstående ekvationssystem, där benämningen homogen avser att högra ledet i varje ekvation utgörs av skalären $0 \in \mathbb{K}$.

Vi har alltså m ekvationer och n obekanta. Ekvationssystemet har givetvis den triviala lösningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, men har vi möjligen icke-triviala lösningar?

Svaret på frågan ges av nollrummet för T; vi har lösningar $x \neq 0$ om och endast om $N(T) \neq \{0\}$. Detta inträffar då T inte är injektiv enligt Sats 2.1.

Om $n > m$ ger Korollarium 2.4 att T inte är injektiv.

Alltså: ett homogent system av linjära ekvationer med flera obekanta än ekvationer, $n > m$, har icke-triviala lösningar.

Betrakta nu ekvationen $Tx = c$, där $0 \neq c = (c_1, \dots, c_m) \in K^m$. Vi kan skriva ekvationen som ett inhomogent system av linjära ekvationer:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = c_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = c_m. \end{cases}$$

Igen är skalärerna $a_{j,k} \in K$ bekanta och vi söker lösningar $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ till ekvationssystemet, där benämningen inhomogen avser att minst en av skalärerna $c_j \in K$ är skild noll.

Nu frågar vi oss om det för varje val av skalärer $c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$ existerar en lösning till ekvationssystemet. Detta gäller om $R(T) = K^m$, d.v.s. om T är surjektiv.

Om $n < m$ ger Korollarium 2.5 att T inte är surjektiv.

<u>Alltså:</u> Ett ekvationssystem med flera ekvationer än obekanta, $n < m$, kan <u>inte</u> lösas för varje val av högersida $c_1, \ldots, c_n \in K$.

<u>Matrisframställning av linjära avbildningar</u>

<u>Exempel</u> Låt A vara en $m \times n$ matris över K. Då bestämmer A en avbildning $T : K^n \to K^m$ genom avbildningen $x \longmapsto Ax$. Vektorerna i K^n och K^m skrivs som kolonner. Vi påstår att $T \in L(K^n, K^m)$. Välkända egenskaper hos matriser ger att

$$T(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T(x) + T(y)$$

och

$$T(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha T(x)$$

för alla $x, y \in K^n$ och alla $\alpha \in K$.

Alltså varje matris definierar en linjär avbildning.

Omvänt kan varje linjär avbildning mellan två ändligtdimensionella vektorrum V och W framställas genom en matris som beror av valet av baser för de två vektorrummen.

Låt $v_1, \dots, v_n$ vara en bas i V och $w_1, \dots, w_m$ en bas i W samt $T : V \to W$ en linjär avbildning.

Då kan vi framställa T i termer av baserna för V och W genom en $m \times n$ matris på följande sätt:

Varje vektor $T(v_j)$, $j = 1, \dots, n$, kan uttryckas i basen $w_1, \dots, w_m$ genom

$$T(v_j) = a_{1,j} w_1 + a_{2,j} w_2 + \dots + a_{m,j} w_m, \quad j = 1, \dots, n,$$

för lämpligt valda koefficienter $a_{i,j} \in K$.

Om $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$, så är

$$T(v) = T\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} c_j\Big) w_i .$$

Koordinaterna $d_1, \ldots, d_m$ för $T(v)$ i basen $w_1, \ldots, w_m$ ges följaktligen av

$$\begin{cases} d_1 = a_{1,1}c_1 + a_{1,2}c_2 + \ldots + a_{1,n}c_n \\ d_2 = a_{2,1}c_1 + a_{2,2}c_2 + \ldots + a_{2,n}c_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ d_m = a_{m,1}c_1 + a_{m,2}c_2 + \ldots + a_{m,n}c_n . \end{cases}$$

Matrisen

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad m \times n \text{ matris}$$

kallas matrisen för T med avseende på baserna $v_1, \ldots, v_n$ och $w_1, \ldots, w_m$ och betecknas

$$M(T, (v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_m))$$

eller kortare $M(T)$ om det av sammanhanget är klart vilka baser för V och W som avses. Vi ser att den k:te kolonnen i ovanstående matris innehåller koordinaterna för framställningen av $T(v_k)$ i basen $w_1, w_2, \ldots, w_m$.

Vid avbildningar från $\mathbb{K}^n$ till $\mathbb{K}^m$ avses de <u>naturliga</u> baserna, ifall inte annat anges.

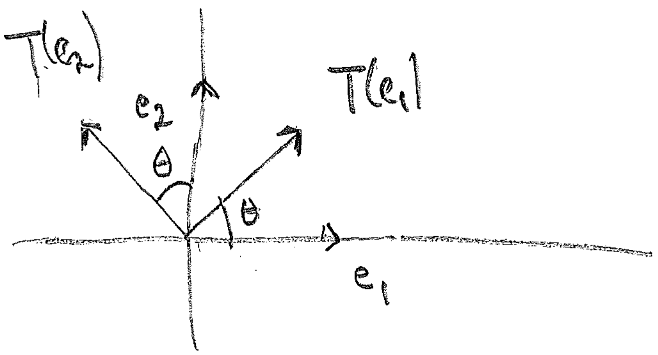
<u>Exempel</u> (a) Betrakta $T \in L(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^3)$, definierad genom

$$T(x,y) = (x+3y,\ 2x+5y,\ 7x+9y).$$

Då gäller $T(1,0) = (1,2,7)$ och $T(0,1) = (3,5,9)$. Alltså matrisen $M(T)$ med avseende på de naturliga baserna ges av

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Om T betyder rotation av vektorerna i ett plan θ radianer och e_1, e_2 är den naturliga basen i $\mathbb{R}^2$,



så är
$$T(e_1) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$$
$$T(e_2) = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2.$$

Matrisen för T i basen e_1, e_2 är alltså

$$M(T,(e_1,e_2),(e_1,e_2)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Antag nu att vi har baserna $v_1, \dots, v_n$ och $w_1, \dots, w_m$ för vektorrummen V respektive W. Varje $T \in L(V,W)$ har då en matris $M(T)$ med avseende på de givna baserna. För $S, T \in L(V,W)$ har vi för $k = 1, \dots, n$ att

$$T v_k = a_{1,k} w_1 + \dots + a_{m,k} w_m$$

och

$$S v_k = b_{1,k} w_1 + \dots + b_{m,k} w_m .$$

Alltså gäller

$$(S+T)(v_k) = S v_k + T v_k$$
$$= (a_{1,k} + b_{1,k}) w_1 + \dots + (a_{m,k} + b_{m,k}) w_m$$

och därmed

$$M(S+T) = M(S) + M(T)$$

För $c \in \mathbb{K}$ och $T \in L(V,W)$ gäller

$$(cT)(v_k) = cT(v_k) = c a_{1,k} w_1 + \dots + c a_{m,k} w_m$$

och således

$$M(cT) = c M(T)$$

Vi betecknar mängden av alla $n \times m$ matriser med $\mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{K})$, som blir ett vektorrum om man definierar addition som vanlig addition av matriser och multiplikation med skalär genom att multiplicera en matris med skalär på vanligt vis. Nollelementet i $Mat(m,n,\mathbb{K})$ ges av $m \times n$ matrisen där alla element är noll.

Varje $T \in L(V,W)$ har en matrisframställning med avseende på givna baser i V och W, dvs. $M(T) \in Mat(m,n,\mathbb{K})$. Således blir M en avbildning från $L(V,W)$ till $M(m,n,\mathbb{K})$, dvs.

$$
\begin{aligned}
M : L(V,W) &\longrightarrow Mat(m,n,\mathbb{K}) \\
T &\longmapsto M(T)
\end{aligned}
$$

är väldefinierad såsnart baserna är fixerade. Emedan $M(T+S) = M(T) + M(S)$ och, för $c \in \mathbb{K}$, $M(cT) = cM(T)$, följer att M är linjär.

Betrakta nu $S \in L(U,V)$ och $T \in L(V,W)$, där $v_1, \ldots, v_n$ är en bas för V, $w_1, \ldots, w_m$ är en bas för W och $u_1, \ldots, u_p$ en bas för U. Låt matriserna för S och T ges av

$$
M(T) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ och } M(S) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}.
$$

$$
T(v_r) = \sum_{j=1}^{m} a_{j,r} w_j \qquad\qquad S(u_k) = \sum_{r=1}^{n} b_{r,k} v_r
$$

$$
r = 1, \ldots, n \qquad\qquad k = 1, \ldots, p
$$

För $k \in \{1, \ldots, p\}$ gäller då

$$(TS)(u_k) = T\left(\sum_{r=1}^{n} b_{r,k} v_r\right) = \sum_{r=1}^{n} b_{r,k} T v_r$$
$$= \sum_{r=1}^{n} b_{r,k}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{j,r} w_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{j,r} b_{r,k}\right) w_j .$$

Tydligen ges $M(TS)$ av en $m \times p$ matris vars element i position (j,k) är $\sum_{r=1}^{n} a_{j,r} b_{r,k}$. Därmed gäller att

$$M(TS) = M(T)\,M(S).$$

Antag nu att $v_1, \ldots, v_n$ är en bas för vektorrummet V. För $v \in V$ har vi en entydig framställning:

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n, \quad b_j \in K.$$

Matrisen för v betecknas $M(v, (v_1, \ldots, v_n))$ eller enbart $M(v)$ och ges av

$$M(v) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Nästa sats ger oss "receptet" på hur man givet $T \in L(V,W)$ och $v \in V$, där V och W är ändligt-dimensionella, beräknar koordinaterna för Tv i basen för W.

Sats 2.6 Antag att $T \in L(V,W)$ och att $v_1, \dots, v_n$ och $w_1, \dots, w_m$ är baser för V respektive W. Då gäller:

$$M(Tv) = M(T)\,M(v)$$

för varje $v \in V$.

Bevis: Låt

$$M(T) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Detta betyder att

$$T v_k = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} w_j$$

för varje k. Låt $v \in V$ vara godtycklig. Då finns det entydiga skalärer $b_1, \dots, b_n$ så att

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

och

$$M(v) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vidare gäller

$$
\begin{aligned}
Tv &= b_1 Tv_1 + \dots + b_n Tv_n \\
&= b_1 \sum_{j=1}^{m} a_{j,1} w_j + \dots + b_n \sum_{j=1}^{m} a_{j,n} w_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} (a_{j,1} b_1 + \dots + a_{j,n} b_n) w_j .
\end{aligned}
$$

Alltså

$$
M(Tv) = \begin{pmatrix} a_{1,1} b_1 + \dots + a_{1,n} b_n \\ \vdots \\ a_{m,1} b_1 + \dots + a_{m,n} b_n \end{pmatrix}
$$

Definition av matrismultiplikation ger nu att $M(Tv) = M(T)M(v)$.

Inverterbarhet

En avbildning $T \in L(V,W)$ kallas som bekant <u>injektiv</u> om $Tx \neq Ty$ då $x \neq y$. Dessutom vet vi att T är injektiv om och endast om $N(T) = \{0\}$.

Avbildningen $T \in L(V,W)$ kallas <u>inverterbar</u> om det existerar $S \in L(W,V)$ sådan att $ST = I_V$ och $TS = I_W$, där I_V och I_W är identiska avbildningen på V respektive W.

En avbildning $S \in L(W,V)$ som satisfierar $ST = I_V$ och $TS = I_W$ kallas en invers till T.

Om S och S' är inverser till T, så gäller

$$S = SI_W = S(TS') = (ST)S' = I_V S' = S',$$

varför $S = S'$. Alltså om T är inverterbar, så har den en entydig invers, som vi betecknar T^{-1}.

Sats 2.7 En linjär avbildning är inverterbar om och endast om den är injektiv och surjektiv.

Bevis: 1) Antag att $T \in L(V,W)$ är inverterbar. Tag $v \in V$ med $Tv = 0$. Då gäller att $v = T^{-1}(Tv) = T^{-1}(0) = 0$, dvs. $N(T) = \{0\}$. Vidare antag att $w \in W$. Då gäller $T^{-1}(w) \in V$ och $T(T^{-1}(w)) = w$, dvs. T är surjektiv.

2) Vi vill visa att $T \in L(V,W)$ är inverterbar, då T är injektiv och surjektiv.
För varje $w \in W$ definieras Sw att vara det entydiga elementet i V så att $T(Sw) = w$. Existensen och entydigheten av ett sådant element följer av surjektiviteten och injektiviteten av T.

Klart att $TS = I_W$.

För att visa att $ST = I_V$, låt $v \in V$. Då

$$T(ST(v)) = (TS)(Tv) = Tv.$$

Emedan T är injektiv, följer att $ST(v) = v$, dvs. $ST = I_V$. Det återstår ännu att visa att S är linjär.

Låt $w_1, w_2 \in W$. Då

$$T(Sw_1 + Sw_2) = T(Sw_1) + T(Sw_2) = w_1 + w_2.$$

Således är $Sw_1 + Sw_2$ ett entydigt element i V som T avbildar på $w_1 + w_2$. Då

$$T(S(w_1 + w_2)) = w_1 + w_2$$

fås att

$$S(w_1 + w_2) = Sw_1 + Sw_2.$$

Om $w \in W$ och $\alpha \in K$, så

$$T(\alpha Sw) = \alpha T(Sw) = \alpha w$$

Således är αSw det entydiga elementet i V som T avbildar på αw, dvs. $S(\alpha w) = \alpha Sw$.

Alltså S är linjär.

Två vektorrum kallas <u>isomorfa</u> om det finns en inverterbar linjär avbildning från det ena vektorrummet <u>på</u> det andra rummet. Två isomorfa vektorrum har samma egenskaper. Man kan tänka på en inverterbar linjär avbildning som en pånyttbeteckning av elementen i ett vektorrum.

Exempel Låt $P_2(\mathbb{R})$ vara rummet av alla reella polynom med grad ≤ 2. Då är $1, t, t^2$ en bas i $P_2(\mathbb{R})$, dvs. $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3$. Vi visar nu att $P_2(\mathbb{R})$ är isomorft med $\mathbb{R}^3$.

Definiera en avbildning T genom

$$P_2(\mathbb{R}) \ni p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \stackrel{T}{\longmapsto} (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Då är T linjär, ty om $\alpha \in \mathbb{R}$ och $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ samt $q(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2$, så gäller

$$\begin{aligned} T(\alpha p + q) &= T(\alpha c_0 + d_0 + (\alpha c_1 + d_1)t + (\alpha c_2 + d_2)t^2) \\ &= (\alpha c_0 + d_0, \alpha c_1 + d_1, \alpha c_2 + d_2) \\ &= \alpha(c_0, c_1, c_2) + (d_0, d_1, d_2) = \alpha T(p) + T(q). \end{aligned}$$

T är surjektiv, ty om $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3$ så gäller att $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \in P_2(\mathbb{R})$ och $T(p) = (c_0, c_1, c_2)$.

Vidare är T injektiv, ty

$$T(p) = T(c_0 + c_1 t + c_2 t^2) = (c_0, c_1, c_2) = (0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$c_0 = c_1 = c_2 = 0$, dvs. p är nollpolynomet.

Sats 2.7 ger att T är inverterbar.

Detta följer också direkt ur följande resultat.

<u>Sats 2.8</u> Två ändligtdimensionella vektorrum är isomorfa om och endast om de har samma dimension.

<u>Bevis</u>: Antag först att V och W är isomorfa rum med ändlig dimension och $T \in L(V, W)$ den inverterbara linjära avbildningen. Enligt Sats 2.3

$$\dim V = \dim N(T) + \dim R(T) = \dim W,$$

ty $N(T) = \{0\}$ och $R(T) = W$.

Omvänt antag att $\dim V = \dim W = n$. Låt $v_1, \ldots, v_n$ och $w_1, \ldots, w_n$ vara baser i V resp. W. Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning med $Tv_j = w_j$, $j = 1, \ldots, n$ (jfr. Hemuppgift).

Emedan $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq R(T) \subseteq W$ följer att

$W = [w_1, \ldots, w_n] \subseteq R(T) \subseteq W$. Alltså $R(T) = W$, dvs. T är surjektiv.

Vidare gäller

$$\dim N(T) = \dim V - \dim R(T)$$
$$= \dim V - \dim V = 0,$$

enligt Sats 2.3. Alltså $N(T) = \{0\}$ och T är injektiv.

Sats 2.7 ger nu att V och W är isomorfa.

<u>Exempel</u> Varje ändligtdimensionellt vektorrum V över $\mathbb{K}$ med $\dim V = n$ är isomorft med $\mathbb{K}^n$.

Sats 2.9 Antag att $v_1, \dots, v_n$ är en bas i V och att $w_1, \dots, w_m$ är en bas i W. Då är M en inverterbar linjär avbildning mellan $L(V,W)$ och $Mat(m,n,\mathbb{K})$.

Bevis: Tidigare konstaterade vi att M är linjär. Enligt Sats 2.7 behöver vi endast visa att M är injektiv och surjektiv.

1) M är injektiv, ty antag att $M(T)=0$ och $T \in L(V,W)$. Då är

$$T v_k = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} w_j = 0, \quad k=1,\dots,n.$$

Eftersom $v_1, \dots, v_n$ är en bas, följer att $T=0$.

2) För att visa att M är surjektiv, låt

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in M(m,n,\mathbb{K}).$$

Betrakta elementen $\sum_{j=1}^{m} a_{j,k} w_j$, $k=1,\dots,n$, i W. Enligt Hemuppgift existerar en entydig avbildning $T \in L(V,W)$ med

$$T(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} w_j, \quad k=1,\dots,n.$$

Det är klart att $M(T) = A$, dvs. $M(L(V,W)) = Mat(m,n,\mathbb{K})$, och satsen är bevisad.

En uppenbar bas i $\mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{K})$ är de $m \times n$ matriser vars alla element är 0 utom ett element som är 1. Det finns mn sådana matriser, varför

$$\dim \mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{K}) = m \cdot n.$$

Nu skall vi bestämma dimensionen av $L(V,W)$, då V och W är ändligtdimensionella rum.

Sats 2.10 Om V och W är ändligtdimensionella, så är också $L(V,W)$ ändligtdimensionell och

$$\dim L(V,W) = (\dim V) \cdot (\dim W).$$

Bevis: Detta följer ur ekvationen

$$\dim \mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{K}) = mn$$

och satserna 2.8 och 2.9. Då $\dim V = n$ och $\dim W = m$.

En linjär avbildning $T: V \to V$ kallas en operator och vi använder beteckningen $L(V) = L(V,V)$.

I $L(V)$ gäller följande anmärkningsvärda resultat (jfr. Sats 2.7)

<u>Sats 2.11</u> Antag att V är ett ändligtdimensionellt vektorrum. Då är följande påståenden ekvivalenta för $T \in L(V)$:

(a) T är inverterbar;
(b) T är injektiv;
(c) T är surjektiv.

<u>Bevis:</u> Låt $T \in L(V)$.

(a) $\Rightarrow$ (b) är klart (Sats 2.7).

(b) $\Rightarrow$ (c). Då T är injektiv, så är $N(T) = \{0\}$. Sats 2.3 ger att

$$\dim R(T) = \dim V - \dim N(T) = \dim V.$$

Hemuppgift ger att $R(T) = V$, dvs. T är surjektiv.

(c) $\Rightarrow$ (a). Då T är surjektiv, så är $R(T) = V$. Sats 2.3 ger att

$$\dim N(T) = \dim V - \dim R(T) = 0,$$

vilket implicerar att $N(T) = \{0\}$. Således är T injektiv. Alltså är T inverterbar enligt Sats 2.7, och satsen är bevisad.

3. Något om polynom

I detta kapitel sammanställer vi utan bevis vissa nyttiga resultat för polynom.

En avbildning $p: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ är ett polynom med koefficienter i $\mathbb{K}$ om det existerar $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ sådana att

$$p(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$$

för alla $z \in \mathbb{K}$. Som tidigare så betecknar vi med $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ mängden av alla polynom med koefficienter i $\mathbb{K}$. Om $c_n \neq 0$, så säger vi att gradtalet för p är n. Ett tal $\lambda \in \mathbb{K}$ kallas ett nollställe för $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ om $p(\lambda) = 0$.

Sats 3.1 Antag att $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ är ett polynom av gradtal $n \geq 1$. Då är $\lambda \in \mathbb{K}$ ett nollställe för p om och endast om det finns ett polynom $q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ av gradtal $n-1$ sådant att

$$p(z) = (z - \lambda) q(z)$$

för alla $z \in \mathbb{K}$.

Korollarium 3.2 (a) Antag att $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, $p \not\equiv 0$, är ett polynom av gradtal $n \geq 0$. Då har p högst n nollställen i $\mathbb{K}$.
(b) Antag att $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$. Om

$$c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n = 0$$

för alla $z \in \mathbb{K}$, så är $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$.

<u>Sats 3.3</u> Antag att $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ med $p \not\equiv 0$. Då finns det polynom $s, r \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ sådana att

$$q(z) = s(z)p(z) + r(z)$$

för alla $z \in \mathbb{K}$ och gradtalet för r är mindre än gradtalet för p.

<u>Sats 3.4</u> (Algebrans fundamentalsats) Varje icke-konstant polynom $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ har ett nollställe i $\mathbb{C}$.

<u>Korollarium 3.5</u> Om $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ är ett icke-konstant polynom, så har p en entydig faktorisering av formen

$$p(z) = c(z-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z-\lambda_n),$$

där $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

<u>Sats 3.6</u> Antag att $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Om $\lambda \in \mathbb{C}$ är ett nollställe för p, så är $\bar{\lambda}$ ett nollställe för p.

<u>Sats 3.7</u> Låt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Då har vi en faktorisering av formen

$$x^2 + \alpha x + \beta = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

med $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ om och endast om $\alpha^2 \geq 4\beta$.

<u>Sats 3.8</u> Om $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ är ett icke-konstant polynom, så har p en entydig faktorisering av formen

$$p(x) = c(x-\lambda) \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_n)(x^2+\alpha_1 x+\beta_1) \cdot \ldots \cdot (x^2+\alpha_m x+\beta_m)$$

där $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ och $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m) \in \mathbb{R}^2$ med $\alpha_j^2 < 4\beta_j$ $\forall j$.