Linjär Algebra, Hemuppgifter 10

För att få poäng bör hemuppgifterna inlämnas senast onsdagen den 23.4.2014.
Lösningarna skall vara ordentligt skrivna och välmotiverade.

1. Antag att $T \in L(V)$ och $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. Visa att

$$p(T) \circ q(T) = q(T) \circ p(T) = (p \cdot q)(T).$$

2. Antag att $S, T \in L(V)$. Visa att $S \circ T$ och $T \circ S$ har samma egenvärden.

3. Låt $T \in L(V)$. Visa att om -1 är ett egenvärde till $T^2 + T$, så är 1 ett egenvärde till T^3.

4. Bestäm det karakteristiska polynomet till en ortogonal projektion.

5. Antag att V är ett komplext vektorrum. Antag att $T \in L(V)$ är sådan att 5 och 6 är egenvärden till T och T har inte andra egenvärden. Visa att

$$(T - 5I)^{n-1}(T - 6I)^{n-1} = 0,$$

där $n = \dim V$.

6. Antag att V är ett komplext vektorrum och $T \in L(V)$. Bevisa att V har en bas som består av egenvektorer till T om och endast om varje generaliserad egenvektor till T är en egenvektor till T.