Linjär Algebra, Hemuppgifter 7

För att få poäng bör hemuppgifterna inlämnas senast onsdagen den 26.3.2014. Lösningarna skall vara ordentligt skrivna och välmotiverade.

1. Bevisa eller ge ett motexempel: produkten av två godtyckliga självadjungerade operatorer på ett inre produktrum är självadjungerad.

2. Låt $T \in L(V)$ vara normal. Visa att egenvektorerna till T som svarar mot olika egenvärden är ortogonala.

3. Antag att $T \in L(V)$ är självadjungerad, $\lambda \in \mathbb{K}$ och $\varepsilon > 0$. Visa att om det existerar ett $v \in V$ sådant att $||v|| = 1$ och

$$||Tv - \lambda v|| < \varepsilon,$$

så har T ett egenvärde μ sådant att $|\lambda - \mu| < \varepsilon$.

4. Antag att $T \in L(V)$ är en positiv operator. Visa att T är inverterbar om och endast om $\langle Tv, v\rangle > 0$ för alla $v \in V \setminus \{0\}$.

5. Antag att $P \in L(V)$ och $P^2 = P$. Visa att

$$V = N(P) \oplus R(P).$$

6. Försök hitta en operator T på ett inre produktrum sådan att T har ett invariant underrum vars ortogonala komplement inte är invariant under T.

7. Låt $T \in L(V)$. Visa att T är en isometri om och endast om

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$$

för alla $x, y \in V$.