Linjär Algebra, Hemuppgifter 6

För att få poäng bör hemuppgifterna inlämnas senast onsdagen den 19.3.2014.
Lösningarna skall vara ordentligt skrivna och välmotiverade.

1. Visa att om U, V och W är ändligtdimensionella inre produktrum, så gäller

   (a) $(S+T)^* = S^* + T^*$ för alla $S, T \in L(U,V)$.

   (b) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ för alla $\alpha \in \mathbb{K}$ och $T \in L(U,V)$.

   (c) $(T^*)^* = T$ för alla $T \in L(U,V)$.

   (d) $(I)^* = I$ där I är den identiska operatorn på V.

   (e) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ för alla $T \in L(U,V)$ och alla $S \in L(V,W)$.

2. Visa att om $T \in L(V)$ är normal, så är $T(V) = T^*(V)$.

3. Antag att n är ett positivt heltal. Definiera $T \in L(\mathbb{K}^n)$ genom

$$T(z_1, z_2, ..., z_n) = (0, z_1, ..., z_{n-1}).$$

Sök en formel för $T^*(z_1, ..., z_n)$.

4. Visa att om $T \in L(V)$ är normal, så är T^k normal för varje positivt heltal k.

5. Visa att en normal operator T på ett komplext inre produktrum V är självadjungerad om och endast om alla dess egenvärden är reella.

6. Antag att V är ett komplext inre produktrum och $T \in L(V)$ är en normal operator sådan att $T^8 = T^9$. Visa att T är självadjungerad och $T^2 = T$.