Linjär Algebra, Hemuppgifter 4

För att få poäng bör hemuppgifterna inlämnas senast onsdagen den 26.2.2014. Lösningarna skall vara ordentligt skrivna och välmotiverade.

1. Låt vektorrummet

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 + ix_2 + x_3 = 0\}.$$

Är V isomorft med $\mathbb{C}^2$?

2. Antag att $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ är en bas i V. Visa att funktionen $T : V \to Mat(n, 1, \mathbb{K})$ som är definierad genom

$$Tv = M(v)$$

är en inverterbar linjär avbildning från V på $Mat(n, 1, \mathbb{K})$. Här är $M(v)$ matrisen av v med avseende på basen $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

3. Antag att V är ett ändligtdimensionellt vektorrum och att $S, T \in L(V, V)$. Visa att $ST = I$ om och endast om $TS = I$.

4. Antag att V är ett ändligtdimensionellt vektorrum och att $T \in L(V, V)$. Visa att $T = \alpha I$ för någon skalär $\alpha \in \mathbb{K}$ om och endast om $ST = TS$ for all $S \in L(V, V)$.

5. Visa att om V är ändligtdimensionellt med $\dim V > 1$, så är mängden av icke-inverterbara operatorer på V inte ett underrum i $L(V, V)$.

6. Låt $S, T \in L(V)$ sådana att $ST = TS$. Låt λ vara ett egenvärde till T och låt $W = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$. Visa att W är ett underrum av V och att $S(W) \subset W$.

7. Antag att λ är ett egenvärde till en inverterbar operator $T \in L(V)$. Visa att λ^{-1} är ett egenvärde till T^{-1}.