Linjär Algebra, Hemuppgifter 3

För att få poäng bör hemuppgifterna inlämnas senast onsdagen den 19.2.2014. Lösningarna skall vara ordentligt skrivna och välmotiverade.

1. Antag att V är ett ändligtdimensionellt vektorrum och U är ett underrum av V sådant att $\dim U = \dim V$. Visa att $U = V$.

2. Antag att T är en linjär avbildning från V till $\mathbb{K}$. Visa att om $u \in V$ inte tillhör $N(T)$, så gäller att

$$V = N(T) \oplus \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

3. Låt $T \in L(V, W)$. Visa att värderummet $R(T)$ är ett underrum av W.

4. Antag att $T \in L(V, W)$ är injektiv och $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ är linjärt oberoende vektorer i V. Visa att då är $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ linjärt oberoende i W.

5. Antag att T är en linjär avbildning från $\mathbb{K}^4$ till $\mathbb{K}^2$ sådan att

$$N(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 : x_1 = 5x_2 \text{ och } x_3 = 7x_4\}.$$

Visa att T är surjektiv.

6. Visa att det inte existerar någon linjär avbildning T från $\mathbb{K}^5$ till $\mathbb{K}^2$ vars nollrum är lika med

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{K}^5 : x_1 = 3x_2 \text{ och } x_3 = x_4 = x_5\}.$$

7. Låt V vara det vektorrum som består av alla funktioner från $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ till $\mathbb{R}$ med addition och multiplikation med skalär i $\mathbb{R}$ definierat på vanligt sätt.

(a) Bestäm en bas för V.

(b) Visa att avbildningen $T : V \to V$, där $(Tf)(x) = f(6 - x) + f(x)$, $x = 1, 2, 3, 4, 5$, är linjär och ange dess matris i basen i (a)-fallet.