Linjär Algebra, Hemuppgifter 2

För att få poäng bör hemuppgifterna inlämnas senast måndagen den 10.2.2014. Lösningarna skall vara ordentligt skrivna och välmotiverade.

1. Antag att U är underrummet av $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, som består av alla polynom av formen

$$p(z) = az^2 + bz^5,$$

där $a, b \in \mathbb{K}$. Bestäm ett underrum W av $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ så att $\mathcal{P}(\mathbb{K}) = U \oplus W$.

2. Låt U och W vara underrum i ett vektorrum V. Visa, att om

$$\dim U + \dim W > \dim V,$$

så har U och W ett gemensamt element som inte är nollelementet.

3. Antag att $p_0, p_1, ..., p_m$ are polynom i $\mathcal{P}_m(\mathbb{K})$ sådana att $p_j(3) = 0$ för alla $j = 0, ..., m$. Undersök om $\{p_0, p_1, ..., p_m\}$ är en linjärt oberoende mängd i $\mathcal{P}_m(\mathbb{K})$.

4. Funktionerna

$$xe^x, (x+1)e^x, (x+1)^2 e^x \in C([0,1]), \mathbb{R}),$$

där $C([0,1]), \mathbb{R})$ är vektorrummet av alla kontinuerliga funktioner från $[0,1]$ till $\mathbb{R}$. Vilken dimension har det minsta underrummet av $C([0,1]), \mathbb{R})$ som innehåller dessa funktioner?

5. Låt V och W vara vektorrum. Låt $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ vara en bas i V och låt $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ vara godtyckliga element i W. Visa att det existerar en entydig linjär avbildning $T : V \to W$ sådan att $T(v_i) = w_i$ för $i = 1, ..., n$.