Linjär Algebra, Hemuppgifter 1

För att få poäng bör hemuppgifterna inlämnas senast onsdagen den 22.1.2014. Lösningarna skall vara ordentligt skrivna och välmotiverade.

1. (a) Låt V vara vektorrummet av alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Undrsök om U är ett underrum i V då:

(i) $U = \{f \in V : f(3) = 0\}$;

(ii) $U = \{f \in V : f(-x) = f(x)\}$;

(iii) $U = \{f \in V : f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

(b) Undersök om följande delmängder av $\mathbb{K}^3$ (dvs. $\mathbb{R}^3$ eller $\mathbb{C}^3$) är ett underrum i $\mathbb{K}^3$ då:

(i) $\{(x_1, x_2.x_3, x_4) \in \mathbb{K}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$;

(ii) $\{(x_1, x_2.x_3, x_4) \in \mathbb{K}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$;

(iii) $\{(x_1, x_2.x_3, x_4) \in \mathbb{K}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$;

(iv) $\{(x_1, x_2.x_3, x_4) \in \mathbb{K}^3 : x_1 = 5x_3\}$.

2. Visa att unionen av två underrum i ett vektorrum V är ett underrum i V om och endast om det ena av underummen innehålles i det andra.

3. Visa eller konstruera ett motexempel: om U_1, U_2, W är underrum i vektorummet V med

$$U_1 + W = U_2 + W,$$

så följer att $U_1 = U_2$.

4. Antag att $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ är linjärt oberoende vektorer i V. Visa att då är också

$$\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, ..., v_{n-1} - v_n, v_n\}$$

linjärt oberoende i V.

5. Låt m vara ett positivt heltal. Är mängden som består av 0 och alla polynom med koefficienter i $\mathbb{K}$ och av grad lika med m ett underrum i $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

6. Bevisa eller motbevisa: det existerar en bas $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ i vektorrummet $\mathcal{P}_3(\mathbb{K})$, som består av polynom av grad ≤ 3 med koefficienter i $\mathbb{K}$, så att inget av polynomen p_1, p_2, p_3, p_4 är av grad 2.

7. Låt U vara ett underrum i $\mathbb{R}^5$ som är definierat genom

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2 \text{ och } x_3 = 7x_4\}.$$

Bestäm en bas för U.