

Grundkurs i statistisk teori, del 2

Räkneövning 1 - Egenskaper hos estimatorer, 20.03.2015

1. Låt μ och σ^2 beteckna väntevärdet respektive variansen för tre i.i.d. stokastiska variabler $X = (X_1, X_2, X_3)$. För att skatta μ skapas följande tre estimatorer:

$$\hat{\mu}_1(X) = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$$

$$\hat{\mu}_2(X) = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$$

$$\hat{\mu}_3(X) = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{8}X_3$$

- (a) Vilka av ovanstående estimatorer är väntevärdesriktiga?
(b) Vilken av de väntevärdesriktiga estimatorerna är effektivast?

2. Låt $X = (X_1, \dots, X_n)$ vara n i.i.d. stokastiska variabler med $X_j \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, dvs

$$f(x_j; \theta) = \theta^{x_j}(1 - \theta)^{1-x_j} \quad \Omega_{X_j} = \{0, 1\} \quad \theta \in (0, 1) \quad \mathbb{E}(X_j) = \theta$$

För att skatta θ skapas följande två estimatorer:

$$\hat{\theta}_1(X) = X_1 \quad \hat{\theta}_2(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

- (a) Vilka värden kan respektive estimator anta?
(b) Visa att estimatorerna är väntevärdesriktiga.
(c) Undersök om estimatorerna är konsistenta.
3. Låt $X = (X_1, \dots, X_n)$ vara n i.i.d. stokastiska variabler med väntevärdet μ och variansen σ^2 . En väntevärdesriktig estimator av σ^2 fås av

$$\hat{\sigma}^2(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2.$$

För att använda estimatorn ovan krävs det att vi känner till μ . Om vi inte känner till μ kan vi skatta σ^2 med

$$s^2(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \quad \text{där} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j.$$

Visa att $s^2(X)$ är väntevärdesriktig. Tips: $\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = \sum_{j=1}^n [(X_j - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2$

4. Avståndet mellan två punkter mäts fem gånger och följande resultat erhålls:

101.23 100.73 98.93 99.35 99.59

Mätningarna kan betraktas som ett stickprov från en fördelning där väntevärdet μ motsvarar det korrekta avståndet och standardavvikelsen σ motsvarar precisionen av mätmetoden. Beräkna ett väntevärdesriktigt estimat av variansen σ^2 då

- (a) $\mu = 100$.
- (b) μ är okänd.

5. För att skatta en kvadrats yta mäter man dess sida n gånger. De n mätningarna kan betraktas som n i.i.d. stokastiska variabler $X = (X_1, \dots, X_n)$ för vilka väntevärdet μ motsvarar den korrekta längden på kvadratens sida och standardavvikelsen σ motsvarar precisionen av mätmetoden. För att skatta ytan $A = \mu^2$ skapas följande två estimatorer:

$$\hat{A}_1(X) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 \qquad \hat{A}_2(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2$$

Vilken av estimatorerna har lägre bias?