Grundkurs i statistisk teori, del 2

Räkneövning 4 - Hypotesprövning, 17.04.2015

1. En fabrik tillverkar bultar. Längden (mm) av bultarna varierar på grund av ett slumpmässigt fel som antas vara normalfördelat kring 0 med standardavvikelsen $\sigma = 0.5$ vilket motsvarar precisionen för tillverkningsmetoden. Vi kan med andra ord betrakta längden av bultarna som en normalfördelad variabel med väntevärdet μ (= den avsedda längden) och variansen σ^2. Anta att vi tar ett stickprov på 80 bultar vars medellängd mäts till 49.94.

   (a) Testa nollhypotesen $H_0 : \mu = \mu_0$ mot $H_1 : \mu \neq \mu_0$ på signifikansnivå $\alpha = 0.01$ då (i) $\mu_0 = 49.90$, (ii) $\mu_0 = 50.00$ samt (iii) $\mu_0 = 50.10$.

$$
\begin{aligned}
& X = \text{“längd på bult”} \\
& X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ där } \sigma = 0.5 \\
\text{Test: } & H_0 : \mu = \mu_0 \\
& H_1 : \mu \neq \mu_0 \\
\text{Testvariabel: } & Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \\
\text{Testvärde: } & \text{(i) } z = 0.716 \\
& \text{(ii) } z = -1.073 \\
& \text{(iii) } z = -2.862 \\
\text{Kritiskt värde: } & \alpha = 0.01 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.576 \\
& \text{(i),(ii) } H_0 \text{ förkastas ej på sig.nivå } \alpha = 0.01 \\
& \text{(iii) } H_0 \text{ förkastas på sig.nivå } \alpha = 0.01
\end{aligned}
$$

   (b) Jämför resultaten från (a)-fallet med konfidensintervallet från uppgift 1 i räkneövning 3, dvs $I_\mu = (49.80, 50.08)$.

$$
\begin{aligned}
& \text{(i),(ii) } \mu_0 \in I_\mu \\
& \text{(iii) } \mu_0 \notin I_\mu
\end{aligned}
$$

2. Vid en undersökning av gäddor i en insjö har man bestämt kvicksilverhalten (mg/kg) för 10 infångade gäddor av en viss storlek. Följande resultat erhölls:

   0.8 1.6 0.9 0.8 1.2 0.4 0.7 1.0 1.2 1.1

   Anta att kvicksilverhalten kan betraktas som en normalfördelad variabel med standardavvikelsen $\sigma = 0.4$.

$$X = \text{“kvicksilverhalt i gädda”} \qquad X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ där } \sigma = 0.4$$

   (a) Testa $H_0 : \mu = 1.2$ på signifikansnivå $\alpha = 0.05$ då $H_1 : \mu \neq 1.2$.

$$
\begin{aligned}
\text{Test:}\quad & H_0 : \mu = 1.2 \\
& H_1 : \mu \neq 1.2 \\
\text{Testvariabel:}\quad & Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \\
\text{Testvärde:}\quad & z = -1.818 \\
\text{Kritiskt värde:}\quad & \alpha = 0.05 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.960 \\
& |z| < 1.960 \Rightarrow H_0 \text{ förkastas ej på sig.nivå } \alpha = 0.05
\end{aligned}
$$

(b) Testa $H_0 : \mu = 1.2$ på signifikansnivå $\alpha = 0.05$ då $H_1 : \mu < 1.2$.

$$
\begin{aligned}
\text{Test:}\quad & H_0 : \mu = 1.2 \\
& H_1 : \mu < 1.2 \\
\text{Testvariabel:}\quad & \text{samma som i (a)-fallet} \\
\text{Testvärde:}\quad & \text{samma som i (a)-fallet} \\
\text{Kritiskt värde:}\quad & \alpha = 0.05 \Rightarrow z_{\alpha} = 1.645 \\
& z < -1.645 \Rightarrow H_0 \text{ förkastas på sig.nivå } \alpha = 0.05
\end{aligned}
$$

3. Henrik har en tärning som han misstänker är obalanserad med resultatet att den ger sexa alltför sällan. Han kastar tärningen 120 gånger och får en sexa 8 gånger. Testa om experimentets resultat stöder Henriks misstanke om att tärningen ger en sexa alltför sällan.
(Tips: om $X =$"antal 6:or på n kast" så är $X \sim Bin(n,p)$ där $p =$"snl. att tärningen ger sexa")

$$
\begin{aligned}
& X = \text{“antal sexor på } n \text{ kast”} \\
& X \sim Bin(n,p) \text{ där } p = \text{“snl. för sexa”} \\
\text{Test:}\quad & H_0 : p = 1/6 \\
& H_1 : p < 1/6 \\
\text{Testvariabel:}\quad & Z = \frac{\frac{X}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \overset{\text{approx.}}{\sim} N(0,1) \\
\text{Testvärde:}\quad & z = -2.939 \\
& \text{Välj sig.nivå och förkasta } H_0 \text{ om } z < -z_{\alpha}
\end{aligned}
$$

4. Två maskiner, A och B, tillverkar samma komponent. Låt X_A beteckna dimensionen på komponenterna tillverkade av maskin A och definiera X_B på motsvarande sätt. Betrakta X_A och X_B som normalfördelade variabler så att $X_A \sim N(\mu_A, \sigma^2)$ samt $X_B \sim N(\mu_B, \sigma^2)$ där samtliga parametrar är okända. Man samlar in följande datamaterial som kan betraktas som två oberoende stickprov av komponentens dimension från respektive maskin:

X_A	12.37	12.32	12.41	12.34	12.23	12.36
X_B	12.41	12.39	12.46	12.35	12.39	12.33

Använd ett tvåsidigt test av signifikansnivå $\alpha = 0.05$ för att testa om $\mu_A = \mu_B$.

$$
\begin{aligned}
& X_A \sim N(\mu_A, \sigma^2) \\
& X_B \sim N(\mu_B, \sigma^2) \\
\text{Test: } & H_0 : \mu_A - \mu_B = 0 \\
& H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0 \\
\text{Testvariabel: } & T = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \overset{\text{approx.}}{\sim} t(n_A + n_B - 2) \\
& \text{där } s^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2} \\
\text{Testvärde: } & t = -1.60 \\
\text{Kritiskt värde: } & \alpha = 0.05 \Rightarrow t_{\alpha/2}(10) = 2.23 \\
& |t| < 2.23 \Rightarrow H_0 \text{ kan ej förkastas på sig.nivå } \alpha = 0.05
\end{aligned}
$$

5. Beräkna p-värdet för de tre olika värdena på μ_0 i uppgift 1(a) och jämför de erhållna värdena med testens utfall (H_0 förkastas/förkastas ej) på signifikansnivån $\alpha = 0.01$.

$$
\begin{aligned}
\text{p-värdet} &= \text{snl. att erhålla ett minst lika extremt värde på} \\
& \text{ testvariabeln (givet } H_0\text{) som det man observerat} \\
&= P(Z < -|z|) + P(Z > |z|) \\
&= (1 - P(Z < |z|)) + (1 - P(Z < |z|)) \\
&= 2 - 2P(Z < |z|)) \\
&= 2 - 2\Phi(|z|)
\end{aligned}
$$

(i) p-värdet $= 0.48$

(ii) p-värdet $= 0.28$

(iii) p-värdet $= 0.004$

Om p-värdet $< \alpha$ förkastas H_0

Om p-värdet $> \alpha$ förkastas ej H_0