Grundkurs i statistisk teori, del 2

Räkneövning 2 - Konstruktion av estimatorer, 27.03.2015

1. Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen $f(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(\theta+1)}$ för $x \geq 0$ och $\Omega_\theta = \{2,3,4\}$. Antag att vi har tillgång till två observationer, $x_1 = 0.2$ och $x_2 = 0.8$, av variabeln.

   (a) Beräkna likelihood-funktionens värde för de tre möjliga utfallen på θ.

$$L(\theta;x) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j;\theta) = \prod_{j=1}^{n} \theta(1+x_j)^{-(\theta+1)}$$

$$L(2;x) \approx 0.40 \qquad L(3;x) \approx 0.41 \qquad L(4;x) \approx 0.34$$

   (b) Bestäm ML-estimatet av θ utgående från resultatet i (a).

$$\hat{\theta}_{ML} = \underset{\theta\in\{2,3,4\}}{\arg\max}\; L(\theta;x) = 3$$

2. Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen $f(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(\theta+1)}$ för $x \geq 0$ och $\Omega_\theta = \{2,3,4\}$. Antag att vi har tillgång till två observationer, $x_1 = 0.2$ och $x_2 = 0.8$, av variabeln.

   (a) Beräkna $\mathbb{E}(X) = \mu(\theta)$ som en funktion av θ.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x \cdot f(x;\theta)dx = \ldots = \frac{1}{\theta - 1} \text{ (Tips: partiell integrering)}$$

   (b) Beräkna $Q(\theta) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu(\theta))^2$ för de tre möjliga utfallen på θ och bestäm MK-estimatet.

$$Q(2) \approx 0.68 \qquad Q(3) \approx 0.18 \qquad Q(4) \approx 0.24$$

$$\hat{\theta}_{MK} = \underset{\theta\in\{2,3,4\}}{\arg\min}\; Q(\theta) = 3$$

3. Låt $X = (X_1, \ldots, X_n)$ vara n i.i.d. stokastiska variabler med likformig $U(0,\theta)-$fördelning där $\theta > 0$, dvs

$$f(x_j;\theta) = \frac{1}{\theta} \text{ för } x_j \in (0,\theta).$$

   Härled MK-estimatorn för parametern θ.

$$\mu(\theta) = \mathbb{E}(X) = \int_0^\theta x \cdot f(x;\theta)dx = \ldots = \frac{\theta}{2}$$

   Vi vet att $Q(\theta)$ minimeras då

$$\mu(\theta) = \overline{x} \Leftrightarrow \theta = 2\overline{x}$$

   (se Anm. i anteckningar eller Def. 2.8 i komp.)

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{MK}(X) = 2\overline{X}$$

4. (a) Låt $X = (X_1, \dots, X_n)$ vara n i.i.d. stokastiska variabler med $Poisson(\lambda)-$fördelning där $\lambda > 0$, dvs

$$p(x_j; \lambda) = \frac{\lambda^{x_j}}{x_j!} e^{-\lambda} \text{ för } x_j \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Härled ML-estimatorn för parametern λ.

$$L(\lambda; x) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j; \lambda) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda^{x_j}}{x_j!} e^{-\lambda} = \lambda^{\sum_{j=1}^{n} x_j} \cdot e^{-n\lambda} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j!}$$

$$\ell(\lambda; x) = \ln L(\lambda; x) = \ln(\lambda) \sum_{j=1}^{n} x_j - n\lambda - \sum_{j=1}^{n} \ln(x_j!)$$

Lös

$$\frac{d}{d\lambda} \ell(\lambda; x) = 0$$

m.a.p. λ för att hitta extrempunkten $\lambda^* = \overline{x}$. Visa att likelihood-funktionen maximeras för λ^* genom att visa att

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \ell(\lambda; x) < 0 \text{ i punkten } \lambda^*.$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_{ML}(X) = \overline{X}$$

(b) Antalet olycksfall under en månad vid en industri antas vara $Poisson(\lambda)-$fördelad. Under ett år inträffade

0 0 3 1 1 2 0 0 2 0 1 0

olycksfall under de tolv månaderna. Beräkna ML-estimatet av λ.

$$\hat{\lambda}_{ML} = \frac{10}{12} \approx 0.83$$

5. Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen $f(x; \theta) = \theta(1 + x)^{-(\theta+1)}$ för $x \geq 0$ och $\Omega_\theta = (1, \infty)$. Antag att vi har tillgång till två observationer, $x_1 = 0.2$ och $x_2 = 0.8$, av variabeln.

(a) Beräkna ML-estimatet av θ. (Jämför med resultatet från 1(b))

Använd samma tillvägagångssätt som i uppgift 4:

$$\hat{\theta}_{ML}(X) = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \ln(1 + X_j)} \text{ och } \hat{\theta}_{ML} \approx 2.60 \ (2.5970)$$

(b) Beräkna MK-estimatet av θ. (Jämför med resultatet från 2(b))

Använd resultatet från 2(a) samt Anm. i anteckningar eller Def. 2.8 i kompendium:

$$\mu(\theta) = \overline{x} \Leftrightarrow \theta = 1 + \frac{1}{\overline{x}} \Rightarrow \hat{\theta}_{MK}(X) = 1 + \frac{1}{\overline{X}} \text{ och } \hat{\theta}_{MK} = 3$$