Kapitel 5

Betingad sannolikhet och oberoende händelser

Betrakta ett försök med ett ändligt utfallsrum Ω och en händelse A vid detta försök. Definitionsmässigt gäller att $A \subset \Omega$ och försökets utfall ligger i Ω. Låt B vara utfallsrummet för ett annat försök och antag att $B \subset \Omega$. Vi skall nu studera sannolikheten för A vid detta nya försök.

Men A behöver inte vara en händelse i utfallsrummet B; dvs $A \not\subseteq B$. Däremot är $A \cap B$ **alltid** en händelse, ty $A \cap B \subset B$. Beteckna sannolikheten för $A \cap B$ i utfallsrummet B med P(A/B). Detta tal benämns den **betingade sannolikheten för A med avseende på B**.[1]

Definitionsmässigt är P(A/B) ett sannolikhetsmått på B. Detta mått uppfyller således axiomen 1., 2. och 3. i Definition 3.3 (sätt B i stället för Ω) och satserna 3.8 - 3.11. Vi skall uttrycka P(A/B) med hjälp av sannolikheter i Ω. Betrakta det klassiska fallet: Mängderna Ω och B är ändliga och alla utfall är lika sannolika (dvs sannolikhetsmassan är likformigt fördelad över Ω). Då gäller (se Exempel 3.5)

$$\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \cdot \frac{n(\Omega)}{n(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

Detta exempel leder till

[1]Ofta säger man också "den betingade sannolikheten för A under förutsättning att B har inträffat". Låt oss härvid betrakta följande situation: En person P_1 vill bestämma sannolikheten för en händelse A vi ett försök. En annan person P_2 utför försöket och avslöjar för P_1 att en annan händelse B har inträffat. Det är klart att P_1 borde beakta denna information, m.a.o. P_1 bör bestämma den betingade sannolikheten för A under förutsättning att B har inträffat.

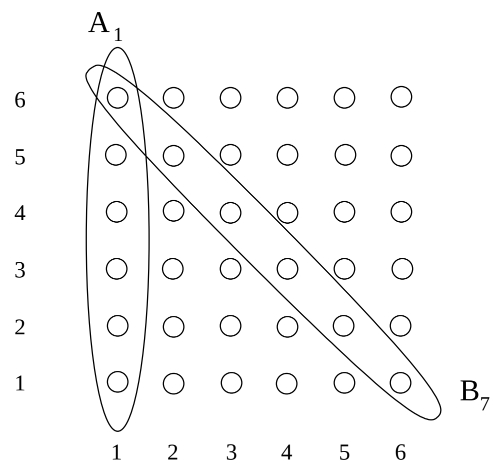
Definition 5.1 Låt A och B vara två händelser och $P(B) > 0$. Den betingade sannolikheten för A med avseende på B är

$$P(A/B) \;=\; \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exempel 5.2 Man kastar en symmetrisk tärning två gånger. Vad är sannolikheten att ögontalet vid det första kastet är k, $k = 1, 2, ..., 6$, under förutsättning att summan av ögontalen är 7?

Låt

$A_k = \{$ögontalet vid det första kastet är $k\}$
$B_7 = \{$summan är 7$\}$



Vi har $P(B_7) = \frac{6}{36}$, $P(A_k \cap B_7) = \frac{1}{36}$ och $P(A_k/B_7) = \frac{P(A_k \cap B_7)}{P(B_7)} = \frac{1}{6}$.

Observera att $P(A_k/B_7) = P(A_k) = \frac{1}{6}$, dvs den betingade och obetingade sannolikheten är lika stora.

Sätt $B_8 = \{$summan är 8$\}$. Då fås $P(B_8) = \frac{5}{36}$ och $A_1 \cap B_8 = \emptyset$. Följaktligen $P(A_1/B_8) = 0$. Vidare $P(A_2/B_8) = \frac{1}{5}$. Observera även att $P(A_6/B_{12}) = 1$.

Ur Definition 5.1 följer direkt

Sats 5.3 (Multiplikationssatsen)

Om $P(A) > 0$ och $P(B) > 0$, så gäller

$$P(A \cap B) = P(A)\; P(B/A) = P(B)\; P(A/B).$$

Man brukar använda konventionen $0 \cdot x = 0$ då x är odefinierad. Då gäller Sats 5.3 även i fallen $P(A) = 0$ och/eller $P(B) = 0$.

Anmärkning 5.4 Allmänt gäller

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i\Big) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_2/\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_3/\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_1)\cdot ...\cdot \mathrm{P}\Big(\mathrm{A}_n/\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathrm{A}_i\Big),$$

då $\mathrm{P}\big(\bigcap_{i=1}^{n-1}\mathrm{A}_i\big) > 0$. Observera att $\mathrm{P}\big(\bigcap_{i=1}^{n-1}\mathrm{A}_i\big) > 0$ implicerar $\mathrm{P}\big(\bigcap_{i=1}^{k}\mathrm{A}_i\big) > 0$ för $k = 1, ..., n-1$. (Visa detta!)

Sats 5.5 Låt $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$ vara en uppdelning av Ω i parvis disjunkta händelser, dvs

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i,\ \ \mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j = \emptyset\ (i\neq j).$$

Då gäller för en godtycklig händelse B

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}_i).$$

Bevis Vi har

$$\mathrm{B} = \Omega\cap\mathrm{B} \ = \ \Big(\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i\Big)\cap\mathrm{B} \ = \ \bigcup_{i=1}^{n}(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{B}),$$

enligt Sats 1.5 c). Följaktligen

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{B}) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}_i)$$

enligt Sats 3.11 och 5.3. □

Sats 5.6 (Bayes sats) Låt $\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_n$ vara som i Sats 5.5. Då gäller

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_k/\mathrm{B}) \ = \ \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}_k)}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}_i)}$$

om $\mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$.

Bevis Enligt Sats 5.3 gäller

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{A}_k/\mathrm{B}) \ &= \ \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}_k)\\ \Longleftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}_k/\mathrm{B}) \ &= \ \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}_k)}{\mathrm{P}(\mathrm{B})},\end{aligned}$$

ty $\mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$.

Men enligt Sats 5.5 $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}_i)$.

□

Exempel 5.7 En urna innehåller 3 svarta, 4 gröna och 8 röda kulor. Man drar utan återläggning tre kulor ur urnan. Vad är sannolikheten att erhålla a) en svart, en grön och en röd kula, b) två svarta och en grön?

a) Sätt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}_1 = \{\text{den första kulan är svart}\}\\
&\mathrm{G}_2 = \{\text{den andra kulan är grön}\}\\
&\mathrm{R}_3 = \{\text{den tredje kulan är röd}\}.
\end{aligned}$$

Enligt Sats 5.3 gäller

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{G}_2 \cap \mathrm{R}_3) = \mathrm{P}(\mathrm{S}_1)\mathrm{P}(\mathrm{G}_2/\mathrm{S}_1)\mathrm{P}(\mathrm{R}_3/\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{G}_2).$$

Vi har $\mathrm{P}(\mathrm{S}_1) = \frac{3}{15}$.

$\mathrm{P}(\mathrm{G}_2/\mathrm{S}_1) = \frac{4}{14}$, ty under förutsättning att S_1 har inträffat innehåller urnan endast 14 kulor varav 4 är gröna.

$\mathrm{P}(\mathrm{R}_3/\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{G}_2) = \frac{8}{13}$, ty under förutsättning att $\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{G}_2$ har inträffat innehåller urnan endast 13 kulor varav 8 är röda.

$\because \mathrm{P}(\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{G}_2 \cap \mathrm{R}_3) = \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{8}{13}$.

Låt $\mathrm{F} = \{$erhålla en svart, en grön och en röd kula$\}$. Vi har

$$\mathrm{F} = (\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{G}_2 \cap \mathrm{R}_3) \cup (\mathrm{S}_2 \cap \mathrm{G}_1 \cap \mathrm{R}_3) \cup \ldots \cup (\mathrm{S}_3 \cap \mathrm{G}_2 \cap \mathrm{R}_1),$$

där t.ex. $\mathrm{S}_i = \{$den i:te kulan är svart$\}$. Men

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{G}_2 \cap \mathrm{R}_3) \;=\; \mathrm{P}(\mathrm{S}_2 \cap \mathrm{G}_1 \cap \mathrm{R}_3) \;=\ldots=\; \mathrm{P}(\mathrm{S}_3 \cap \mathrm{G}_2 \cap \mathrm{R}_1) \;=\; \frac{3 \cdot 4 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13}.$$

Följaktligen

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}) = 3!\,\frac{3 \cdot 4 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13},$$

där 3! är antalet permutationer av de tre kulorna.

b) Vi har, t.ex.,

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2 \cap \mathrm{G}_3) = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{4}{12}.$$

Låt $\mathrm{G} = \{$erhålla två svarta och en grön$\}$.

Då är

$$\mathrm{P}(\mathrm{G}) \;=\; \frac{3!}{2!1!}\,\frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{4}{12},$$

ty vi har $\frac{3!}{2!1!}$ åtskiljbara permutationer av de tre kulorna.

Observera att dessa resultat också fås direkt, dvs

$$\begin{aligned} \mathrm{P(F)} &= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{15}{3}} \quad \text{och} \\ \mathrm{P(G)} &= \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{15}{3}}, \end{aligned}$$

under förutsättning att alla kulor är åtskiljbara (t.ex. numrerar vi de svarta s_1, s_2, s_3, de gröna g_1, g_2, g_3, g_4 och de röda $r_1, r_2, ..., r_8$).

Exempel 5.8 I en låda ligger fyra symmetriska tärningar: två röda, en svart och en vit. De två röda är numrerade 1, 2, 3, 4, 5, 6. Den svarta är numrerad 1, 1, 3, 5, 5, 5 och den vita 2, 2, 4, 6, 6, 6. En tärning tages på måfå ur lådan och kastas.

a) Vad är sannolikheten att få en sexa?

b) Vad är då sannolikheten att tärningen är röd under förutsättning att vi erhållit en sexa?

Låt $\mathrm{A} = \{\text{erhålla en sexa}\}$

$\mathrm{B}_1 = \{\text{dra en röd tärning}\}$

$\mathrm{B}_2 = \{\text{dra en svart tärning}\}$

$\mathrm{B}_3 = \{\text{dra en vit tärning}\}$.

Då gäller $\Omega = \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{B}_3$ och $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset,\ i \neq j$.

a) $\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(B_1)P(A/B_1)} + \mathrm{P(B_2)P(A/B_2)} + \mathrm{P(B_3)P(A/B_3)}$,

$\mathrm{P(B_1)} = \frac{2}{4},\ \mathrm{P(A/B_1)} = \frac{1}{6}$,

$\mathrm{P(B_2)} = \frac{1}{4},\ \mathrm{P(A/B_2)} = 0$,

$\mathrm{P(B_3)} = \frac{1}{4},\ \mathrm{P(A/B_3)} = \frac{3}{6}$.

$\because \mathrm{P(A)} \;=\; \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \;=\; \frac{5}{24}$.

b) $\mathrm{P(B_1/A)} \;=\; \frac{\mathrm{P(B_1 \cap A)}}{\mathrm{P(A)}} \;=\; \frac{\mathrm{P(B_1)P(A/B_1)}}{\mathrm{P(A)}} \;=\; \frac{2}{5}$.

Exempel 5.9 En närsynt person skjuter med slangbåge mot en tavla och träffar med sannolikheten 0,3. Hans lille son meddelar om han träffat eller ej. Sannolikheten att pojken rapporterar träff då pappa träffat är 0,8 och sannolikheten att han rapporterar träff fastän pappan inte har träffat är 0,2. Bestäm sannolikheten för träff om pojken rapporterar träff.

Låt

A = {pojken rapporterar träff}
B = {pappa träffar}.

Då gäller $P(B) = 0,3,\ P(B^c) = 0,7,\ P(A/B) = 0,8,\ P(A/B^c) = 0,2$. Vi har

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A/B)}{P(B)P(A/B) + P(B^c)P(A/B^c)} \\ &= \frac{0,3 \cdot 0,8}{0,3 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,2} = \frac{12}{19}\,. \end{aligned}$$

Vi har tidigare sett ett exempel där den betingade och obetingade sannolikheten för en viss händelse är lika (Exempel 5.2). Detta fenomen leder till

Definition 5.10 Om $P(A/B) = P(A)$ säges A vara oberoende av B. Om i stället $P(A/B) \neq P(A)$ säges A vara beroende av B.

Sats 5.11

a) Om A är oberoende av B, så är B oberoende av A.

b) A och B oberoende $\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Bevis

a) Vi har

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A/B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} \\ &= P(B), \end{aligned}$$

där vi har använt att A är oberoende av B.

b) ($\Rightarrow$) Antag att A och B är oberoende. Då fås $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(A)P(B)$.

($\Leftarrow$) Antag att $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Då fås

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

□

Ofta bör vi också avgöra om n stycken händelser $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$ är oberoende. I detta fall används

Definition 5.12 Händelserna $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$ är oberoende om likheten

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_{k_1} \cap \mathrm{A}_{k_2} \cap ... \cap \mathrm{A}_{k_p}) \;=\; \mathrm{P}(\mathrm{A}_{k_1})\mathrm{P}(\mathrm{A}_{k_2}) \cdot ... \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_{k_p})$$

gäller för alla heltal $k_1, k_2, ..., k_p$ sådana att $1 \leq k_1 < k_2 < ... \leq k_p \leq n$ $(p = 1, 2, ..., n)$.

Exempel 5.13 Händelserna A, B och C är oberoende om och endast om

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}) \\
&\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{C}) \\
&\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{C}) \\
&\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{C})
\end{aligned}$$

Exempel 5.14 Betrakta försöket "två kast med ett symmetriskt mynt" och händelserna $\mathrm{A} = \{$det första kastet ger krona$\}$, $\mathrm{B} = \{$det andra kastet ger klave$\}$. Intuitivt är dessa två händelser oberoende. Vi visar att de också är matematiskt oberoende.

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{(\mathrm{kr,kr}),\ (\mathrm{kr,kl}),\ (\mathrm{kl,kr}),\ (\mathrm{kl,kl})\} \\
&\mathrm{A} = \{(\mathrm{kr,kr}),\ (\mathrm{kr,kl})\} \\
&\mathrm{B} = \{(\mathrm{kr,kl}),\ (\mathrm{kl,kl})\} \\
&\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{(\mathrm{kr,kl})\}
\end{aligned}$$

Således $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{4}$ och $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{2}{4}$. Följaktligen $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$, dvs A och B är oberoende.

Exempel 5.15 P_1, P_2 och P_3 avlossar oberoende av varandra var sitt skott mot en tavla. Träffsannolikheterna är 0,4, 0,2 resp. 0,1. En enda träff noteras. Vad är sannolikheten att det var P_1 som träffade?

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F} = \{\text{det blir träff}\} \\
&\mathrm{A}_1 = \{P_1 \text{ träffar, } P_2 \text{ bommar, } P_3 \text{ bommar}\} \\
&\mathrm{A}_2 = \{P_1 \text{ bommar, } P_2 \text{ träffar, } P_3 \text{ bommar}\} \\
&\mathrm{A}_3 = \{P_1 \text{ bommar, } P_2 \text{ bommar, } P_3 \text{ träffar}\}.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{F} = \bigcup_{i=1}^{3} \mathrm{A}_i, \quad \mathrm{P}(\mathrm{F}) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$$

och

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,2880$$

$$P(A_2) = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,1080$$

$$P(A_3) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,0480$$

Således

$$\begin{aligned} P(A/F) &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A_1 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3))}{P(F)} \\ &= \frac{P(A_1)}{P(F)} = \frac{0,2880}{0,4440} \simeq 0,649 \end{aligned}$$

Övningsuppgifter

1. Vad är vid dragning utan återläggning av två kort ur en kortlek sannolikheten att det andra dragna kortet är ett spaderkort, om det första var det? Vad är denna sannolikhet om vi drar med återläggning?

2. I en familj med tre barn finns åtminstone en flicka. Vad är sannolikheten att det finns en flicka till?

3. En urna innehåller fyra vita och sex svarta kulor, en annan urna sex vita och fyra svarta kulor. Man flyttar en på måfå vald kula från urna 1 till urna 2. Om man sedan tar en kula ur urna 2, vad är sannolikheten att den är vit?

4. Vid rysk roulette väljer spelarna på måfå en av flera revolvrar, ställer på måfå in magasinet och avfyrar ett skott mot pannan. Om man vid ett tillfälle använder tre revolvrar med sex platser vardera i magasinen och med ett, två resp. tre skarpa skott, vad är sannolikheten att den första spelaren överlever?

5. Visa att om $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{F}$, så är $\mathrm{P(A/F)} = \frac{\mathrm{P(A)}}{\mathrm{P(F)}}$.

6. Visa att $\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{F}^c) = \frac{\mathrm{P(A)} - \mathrm{P(A \cap F)}}{1 - \mathrm{P(F)}}$.

7. Visa att om A och B är disjunkta, så är $\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P(A)}}{\mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}}$.

8. För de tre händelserna $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$ och C gäller att $\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(B)} = 0,5,\ \mathrm{P(C)} = 0,4$ samt att $\mathrm{P(A \cap B \cap C)} = \mathrm{P(A \cap B)}$ och $\mathrm{P(A \cap B/C)} = 0,5$. Beräkna $\mathrm{P(A \cup B)}$!

9. I det gamla Egypten förekom en viss sjukdom hos kameler. Erfarenheten visade att 30% av alla kameler i Egypten hade denna sjukdom. En veterinär, vars uppgift var att diagnosticera kameler, ställde med sannolikheten 0,95 diagnosen sjuk, då en kamel var sjuk och med sannolikheten 0,99 diagnosen ej sjuk, då en kamel inte var sjuk. Vad var sannolikheten för feldiagnos?

10. I en skrivbordslåda finns fyra svarta, fyra gröna och två röda pennor. Helt slumpmässigt väljes fyra pennor ur lådan utan återläggning.

    a) Beräkna sannolikheten att man får två svarta, en grön och en röd penna.

    b) Hur stor är sannolikheten att de två först dragna pennorna är svarta, den tredje grön och den fjärde röd?

11. En urna innehåller 6 röda och 4 svarta kulor. Ur urnan drages slumpmässigt 3 kulor i följd, vilka kastas bort utan att färgen registreras. Därefter drages på samma sätt som tidigare ytterligare 2 kulor. Vad är sannolikheten att båda dessa kulor är svarta?

12. I en familj i Våmhus (en kommun i norra Dalarna) där samtliga generationer försörjer sig som korgmakare, står farfar, far och son för respektive 30, 40 och 30 % av tillverkningen av en viss korgtyp. Av erfarenhet vet man vidare att farfars produktion till 1 % består av kassabla korgar. Motsvarande siffror för far och son är 0,5 och 1 %. En korg väljes på måfå från familjens produktion och visar sig vara kassabel. Vad är sannolikheten att den tillverkats av farfar?

13. Vad är sannolikheten att vid en givning i bridge någon av de fyra spelarna erhåller exakt 6 ruter och exakt 2 klöver?

14. Sannolikheten att en jägare skall träffa en älg på avståndet r är $\frac{a^2}{r^2}$, a är en konstant och $r > a$. Jägaren skjuter första gången, då älgen är på avståndet $3a$. Om han då missar, laddar han om och skjuter igen då älgen är på avståndet $4a$ och analogt för avstånden $5a$ osv. Beräkna sannolikheten

    a) att jägaren träffar älgen först på sitt tredje skott,

    b) att jägaren träffar älgen först på sitt n:te skott,

    c) att älgen är oskadd efter n skott.

    d) Beteckna den sista sannolikheten med P_n och beräkna $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n$.

15. Låt A och B vara oberoende. Visa att även A och B^c, A^c och B, samt A^c och B^c är oberoende.

16. I en urna ligger tre kuvert, ett vitt innehållande ett vitt brevpapper, ett blått innehållande ett blått brevpapper samt ett blått innehållande ett vitt brevpapper. Man drar på måfå ett av kuverten och studerar händelserna

    A = {det dragna kuvertet är blått}

    B = {det dragna kuvertet har samma färg som dess innehållande brevpapper}.

    Är händelserna oberoende?

17. Betrakta försöket att kasta en symmetrisk tärning två gånger. Låt A, B och C vara händelserna "udda poäng vid första kastet", "udda poäng vid andra kastet" resp. "udda poängsumma". Visa att händelserna A, B och C är parvis oberoende. $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = 0$.

18. A, B och C är oberoende händelser som inträffar med sannolikheterna 0,1, 0,2 resp. 0,3. Bestäm sannolikheten att minst en av dem inträffar.

19. För två preparerade tärningar, T_1 och T_2, gäller att sannolikheten för sexa är 0,15 resp. 0,20. Man väljer fullständigt slumpmässigt en tärning och gör två kast med denna. Låt A beteckna händelsen "sexa i första kastet" och B händelsen "sexa i andra kastet". Är A och B oberoende?

20. En maskin består av tre delar, för vilka man vet att sannolikheten att de är felfria är 0,9, 0,85 resp. 0,95. Funktionsdugligheten hos de tre delarna kan antas vara oberoende av varandra. Bestäm sannolikheten att maskinen fungerar, om för att så skall ske

    a) samtliga tre delar måste vara felfria

    b) det räcker med att åtminstone en är felfri.

21. Vid kast med två eller flera symmetriska tärningar studerar man händelsen att differensen mellan högsta och lägsta värdet är 5, dvs att minst en tärning visar en etta och minst en en sexa. Bestäm sannolikheten för denna händelse vid kast med

    a) tre tärningar

    b) n tärningar.