

Kapitel 3

Sannolikhetsbegreppet

Betrakta följande försök: Ett symmetriskt mynt kastas 100 gånger och antalet krona observeras.

Antal kast	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Antal krona	6	12	16	21	25	30	34	38	42	47
Relativ frekvens för krona	0,6	0,6	0,53	0,53	0,5	0,5	0,49	0,48	0,47	0,47

Vi ser att den relativa frekvensen för krona varierar kring 0,5. Om vi fortsätter att upprepa detta försök blir variationerna kring 0,5 mindre och mindre.

Allmänt gäller att om vi upprepar ett försök under **konstanta** omständigheter så kommer den relativa frekvensen för den betraktade händelsen att stabilisera sig kring ett tal mellan 0 och 1. Detta fenomen kallas de **relativa frekvensernas stabilitet** och är den fysiska ramen för hela sannolikhetsläran.

Nämligen, låt n vara det totala antalet utförda försök och $g(n)$ antalet gynnsamma utfall bland dessa n (dvs sådana där den betraktade händelsen har inträffat). Sannolikheten för denna händelse definieras då som gränsvärdet av $\frac{g(n)}{n}$, när $n \rightarrow \infty$.

Det är svårt att skapa en matematisk teori utgående från ett begrepp som definieras empiriskt. Därför kommer vi inte att utgå från de relativa frekvensernas stabilitet utan från en axiomatisk definition av sannolikheten. Före vi ger denna definition införs begreppen utfallsrum och händelse.

Utfallsrum: Då vi konstruerar och genomför ett försök har vi nästan alltid en uppfattning om de olika möjliga utfallen av detta försök. **Mängden av dessa olika utfall benämns försökets utfallsrum.**

Exempel 3.1

- a) Försöket "Kast med ett mynt" har utfallsrummet $\Omega = \{\text{krona, klave}\}$.

- b) Försöket “Kast med två mynt” har utfallsrummet $\Omega = \{(\text{krona, klave}), (\text{krona, krona}), (\text{klave, krona}), (\text{klave, klave})\}$.
- c) Försöket “Dra ett kort ur en vanlig kortlek” har utfallsrummet som består av 52 ordnade par (a, b) , där a är någon av färgerna hjärter, ruter, spader och klöver och b något av talen 1, 2, ..., 13.
- d) Försöket “Kast med en vanlig tärning” har utfallsrummet $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- e) Försöket “Dra två kulor ur en urna som innehåller tre kulor numrerade 1, 2, 3” har utfallsrummet $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

Händelse: Låt Ω vara ett ändligt utfallsrum (eller högst numrerbart) och A mängden av alla delmängder till Ω . En **händelse** är en delmängd av utfallsrummet Ω . Alltså: **A är en händelse** $\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$.

Om Ω inte är numrerbart (Se Exempel 3.1 f), så är vanligtvis A , mängden av alla delmängder, en alltför stor samling för att **varje** element i A vore en händelse. Den allmänna definitionen av en händelse ges på kursen i sannolikhetslära II.

Exempel 3.2 Betrakta försöket “Kast med två tärningar”. Utfallsrummet är $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. I detta utfallsrum kan vi t.ex. betrakta händelserna

$A =$ “Den första tärningen visar en etta”,

$B =$ “Summan av poängtalerna är högst 5”,

$C =$ “Åtminstone den ena av tärningarna visar 5”.

A. N. Kolmogoroff, en rysk matematiker, formulerade på 30-talet den axiomatiska sannolikhetsdefinitionen. Vi ger här ett specialfall.

Definition 3.3 Låt Ω vara en ändlig (eller högst numrerbar) mängd och beteckna med $\mathcal{A}$ mängden av alla delmängder till Ω . **Sannolikhetsmåttet** P är en funktion från $\mathcal{A}$ till $[0, 1]$, som uppfyller

1. $P(A) \geq 0$ för varje $A \in \mathcal{A}$.
2. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ för disjunkta $A, B \in \mathcal{A}$ (dvs $A \cap B = \emptyset$).

Det är inte svårt att konstruera sannolikhetsmått i ett ändligt (eller numrerbart) utfallsrum. Låt $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ och p_i , $i = 1, \dots, n$, n stycken icke-negativa tal, sådana att $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Inför nu en funktion P på A genom

$$P(\{w_i\}) = p_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(\{w_i\}).$$

(T.ex. om $A = \{w_2, w_4, w_6, w_8\}$, så innebär

$$\begin{aligned} \sum_{w_i \in A} P(\{w_i\}) &= P(\{w_2\}) + P(\{w_4\}) + P(\{w_6\}) + P(\{w_8\}) \\ &= p_2 + p_4 + p_6 + p_8. \end{aligned}$$

Funktionen P uppfyller då Definition 3.3. Talen p_i kallas härvid **elementärsannolikheter**.

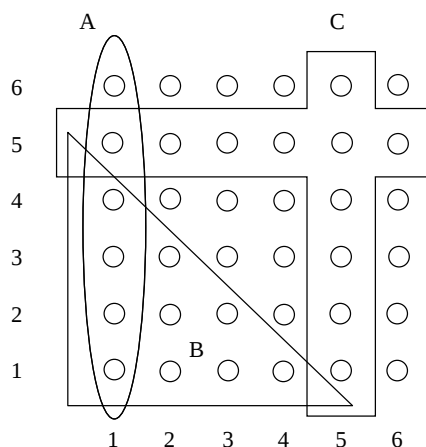
Exempel 3.4 Låt $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ och sätt $P(\{i\}) = 2^{-i}$. Detta är ett sannolikhetsmått, ty $P(\{i\}) > 0$ för varje $i \in \Omega$ och $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Exempel 3.5 (Den s.k. klassiska sannolikhetsdefinitionen, likformigt sannolikhetsmått) Låt $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ och sätt $P(\{w_i\}) = \frac{1}{n}$ för varje i , dvs utfallen i Ω är alla lika sannolika. Man säger att sannolikhetsmassan är likformigt fördelad över Ω . Låt $A \in \mathcal{A}$ och $n(A) = k \leq n$. Vi har

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(w_i) = \sum_{w_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$

dvs sannolikheten för A är antalet element i A genom totala antalet element. Detta är den s.k. klassiska sannolikhetsdefinition som formulerades av Pascal och Fermat på 1600-talet.

Exempel 3.6 Betrakta samma försök som i Exempel 3.2. Försöket har utfallsrummet



$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, och vi kan anta att försökets utfall är lika sannolika, dvs den klassiska sannolikhetsdefinitionen kan tillämpas. Låt A, B och C vara desamma som i Exempel 3.2. Då fås

$$P(A) = P(\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = P(\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}) = \frac{10}{36}$$

$$\text{På samma sätt fås } P(C) = \frac{11}{36}.$$

Exempel 3.7 Vad är sannolikast vid 6 kast med en symmetrisk tärning,

A: att få upp samtliga valörer; eller

B: att få upp 3 valörer 2 gånger (och de övriga 3 valörerna ingen gång)?

Utfallsrummet är $X_{i=1}^6 \Omega$, där $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och alla utfall är lika sannolika.

$$n(\Omega) = 6^6$$

$n(A) = 6!$, ty det första kan väljas på 6 olika sätt, det andra på 5 olika sätt, osv (dragning med återläggning med hänsyn till ordningen).

$n(B) = \frac{6!}{2!2!2!} \binom{6}{3}$, där $\binom{6}{3}$ anger antalet sätt att välja de tre valörerna bland 6 (t.ex. 1,2,3; då är en möjlig realisation 113322), $\frac{6!}{2!2!2!}$ anger antalet åtskiljbara permutationer av dessa 6 element (t.ex. 112233, 121233, 123123, 122133 osv...).

$$\frac{n(A)}{n(B)} = \frac{2^3}{\binom{6}{3}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2^3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow n(A) < n(B).$$

Således är händelsen B mera sannolik än händelsen A.

Vi ska nu ge några satser som följer ur Definition 3.3.

Sats 3.8 $P(A) = 1 - P(A^c)$, $A \in \mathcal{A}$

Bevis Eftersom $A \cup A^c = \Omega$ och $A \cap A^c = \emptyset$ fås enligt 2. och 3. i Definition 3.3 att

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \\ &\Leftrightarrow P(A) = 1 - P(A^c). \end{aligned}$$

□

Sats 3.9

a) Om $A \subset B$, så är $P(B - A) = P(B) - P(A)$ och $P(A) \leq P(B)$.

b) $0 \leq P(A) \leq 1$.

Bevis

a) Om $A \subset B$, så gäller att $B = A \cup (B - A)$ och $A \cap (B - A) = \emptyset$.

Således är

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup (B - A)) \stackrel{3}{=} P(A) + P(B - A) \\ \Leftrightarrow P(B - A) &= P(B) - P(A). \end{aligned}$$

Vidare

$$P(A) \leq P(B), \text{ ty } P(B - A) \geq 0.$$

b) Använd a)-fallet samt 1. och 2. Då fås $0 \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

□

Sats 3.10 $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ om $A_1, \dots, A_n$ är parvis disjunkta händelser (dvs $A_i \cap A_j = \emptyset$ för $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$).

Bevis Detta följer direkt ur 3.

□

Sats 3.11 (Additionssatsen)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bevis $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ (Se Sats 1.6 a) och enligt Sats 3.10

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A).$$

Men $A - B = A - (A \cap B)$ och $A \cap B \subset A$. Således gäller enligt Sats 3.9 a) att

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

□

Anmärkning 3.12

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ange den motsvarande formeln för $\bigcup_{i=1}^n A_i$!

Exempel 3.13 Per och Pål åker utför en skidbacke. Sannolikheten att Per faller är $\frac{1}{2}$ medan sannolikheten att Pål faller är $\frac{1}{3}$. Båda faller med sannolikheten $\frac{1}{4}$. Beräkna sannolikheten att båda klarar backen.

Låt $A = \{\text{Per faller}\}$, $B = \{\text{Pål faller}\}$. Då gäller $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ och $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. $A^c \cap B^c = \{\text{båda klarar backen}\}$.

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Övningsuppgifter

1. Ange lämpliga utfallsrum för följande försök
 - a) Kast med tre mynt
 - b) Kast med ett mynt tills myntet visar krona
 - c) Kast med två tärningar och notering av summapoäng.
2. En population består av 10 personer, varav 3 är svenskar, 4 japaner och 3 irländare. Ett slumpmässigt stickprov om 6 personer drages utan återläggning. Definiera följande händelser:
 A = händelsen att stickprovet innehåller exakt 1 svensk
 B = händelsen att stickprovet innehåller minst 2 irländare
 C = händelsen att stickprovet innehåller högst 2 japaner
Tolka händelsen $(A^c \cup B^c \cup C)^c$ i ord.
3. Betrakta försöket att kasta en symmetrisk tärning två gånger. Beräkna sannolikheterna för följande händelser
 - a) Poängsumman är mindre än sex.
 - b) Poängsumman är större än sju.
 - c) Man får åtminstone en gång fem eller sex poäng.
 - d) Andra kastet ger större poäng än det första.
 - e) Högst en gång får man jämn poäng.
4. En urna innehåller 10 kulor numrerade från 1 till 10. Slumpmässigt och utan återläggning drages 3 kulor. Bestäm sannolikheten att kula nr 6 blir vald.
5. En population omfattar fyra familjer. Antalet individer i familjerna är 3, 4, 5 resp. 6. Från denna population väljes fullständigt slumpmässigt fyra individer. Beräkna sannolikheten att en individ från varje familj kommer med i urvalet om detta göres a) utan återläggning b) med återläggning.
6. Tag slumpmässigt utan återläggning tre kort ur en väl blandad kortlek med 52 kort. Bestäm sannolikheten att
 - a) alla tre är hjärter

- b) inget är hjärter
 - c) alla tre är ess.
7. Bland 15 glödlampor finns fem defekta. Man tar 5 glödlampor på måfå utan återläggning. Beräkna sannolikheten att man härvid får
- a) exakt två defekta lampor,
 - b) högst två defekta lampor,
 - c) minst 3 defekta lampor.
8. Beräkna sannolikheten att man vid dragning utan återläggning av fem kort ur en kortlek med 52 kort erhåller
- a) ess, kung, dam, knekt, tio i samma färg
 - b) fem kort i följd i samma färg
 - c) fem kort i samma färg.
9. En person kastar med fem tärningar. Vad är sannolikheten att han får ett tretal och ett par?
10. Vad är sannolikheten att en spelare i en pokergiv får ett tretal och ett par?
11. Man drar slumpmässigt utan återläggning 13 kort ur en vanlig kortlek. Vad är sannolikheten att erhålla tre kvadruplar? Med en kvadrupel menas fyra kort i samma valör.
12. En person kastar tio gånger med en tärning. Sök sannolikheten att två värden förekommer vardera exakt tre gånger, ett värde exakt två gånger och två värden vardera exakt en gång.
13. En person skall vid en tentamen besvara fem frågor. Varje fråga skall besvaras med ja eller nej. Personen svarar på frågorna genom att kasta ett symmetriskt mynt fem gånger och låter krona betyda ja och klave nej. Beräkna sannolikheten att personen får
- a) åtminstone en rätt besvarad fråga
 - b) exakt två rätt besvarade frågor
 - c) åtminstone tre rätt besvarade frågor.
14. Låt A och B vara två händelser sådana att $P(A) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,3$ och $P(A \cup B) = 0,6$. Beräkna $P(A \cap B^c)$, $P(B)$ och $P(A^c \cup B^c)$.

15. Låt A , B och C vara godtyckliga händelser. Bevisa att
- $P(A \cap B \cap C) \leq \min\{P(A), P(B), P(C)\}$
 - $P(A \cup B \cup C) \geq \max\{P(A), P(B), P(C)\}$.
16. Vi har att $A \cap A = A$, men när gäller att $P(A) \cdot P(A) = P(A)$? Är det möjligt att $P(A) = 0$ men $A \neq \emptyset$?
17. Låt A , B , C och D vara fyra ömsesidigt uteslutande händelser: $P(A) = 0,12$, $P(B) = 0,10$, $P(C) = 0,06$, $P(D) = 0,02$. Beräkna sannolikheten att a) en av dessa händelser inträffar och b) ingen av dessa inträffar.
18. Om man på måfå placerar två drottningar på ett schackbräde, vad är sannolikheten att de kommer i slagläge?
19. Av 20 motorer har sex mindre felaktigheter, tre allvarliga felaktigheter och de övriga elva motorerna är felfria. Man väljer på måfå tre av motorerna utan återläggning. Beräkna sannolikheten att man härvid får
- två motorer med mindre felaktigheter och en felfri,
 - åtminstone två motorer med felaktigheter av något slag,
 - en motor med mindre fel, en med allvarligt fel och en felfri.
20. Betrakta samma situation som i föregående övning, men anta att man i stället väljer åtta motorer. Vad är sannolikheten att man härvid får
- fyra motorer med mindre felaktigheter, två motorer med allvarliga fel och två felfria motorer,
 - fyra felfria motorer, en motor med allvarligt fel och tre med mindre felaktigheter?